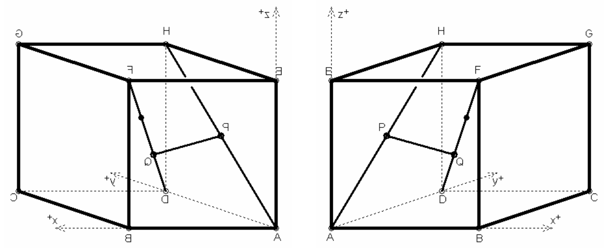
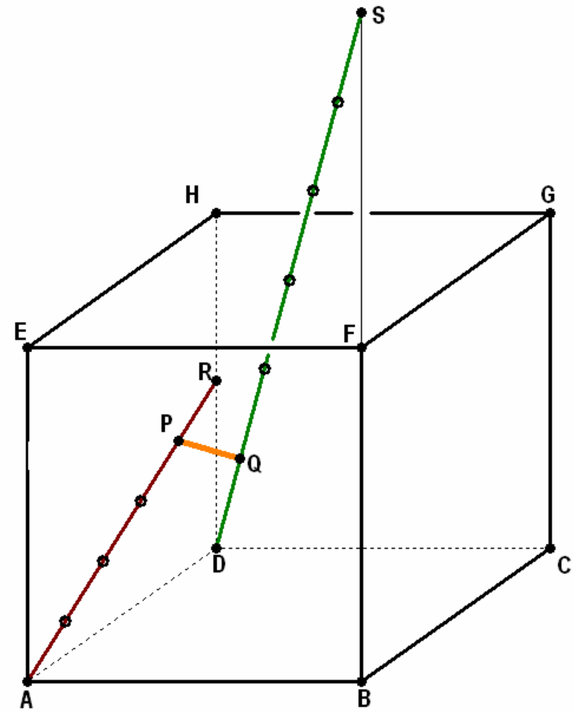
Weitere Übungen für die 1. Schularbeit



(6A, Gymnasium, 2010/11)

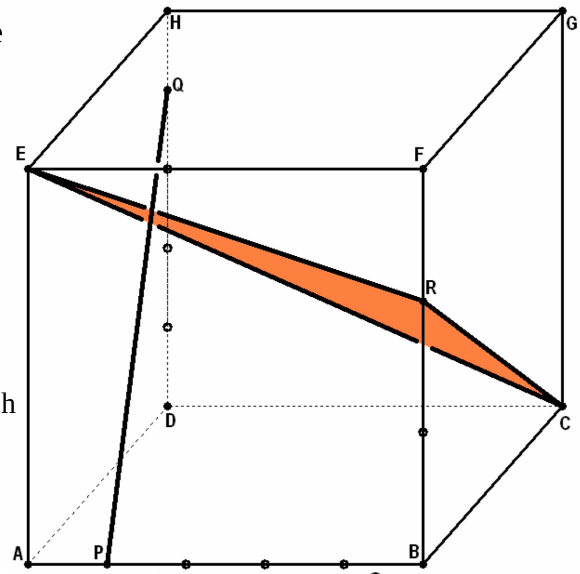
Diese zusätzlichen Übungsbeispiele bieten dir weitere Möglichkeiten, die für eine erfolgreiche Absolvierung der ersten Schularbeit notwendige Routine aus (und hoffentlich nicht erst auf-!) zubauen.

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben ist daher eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



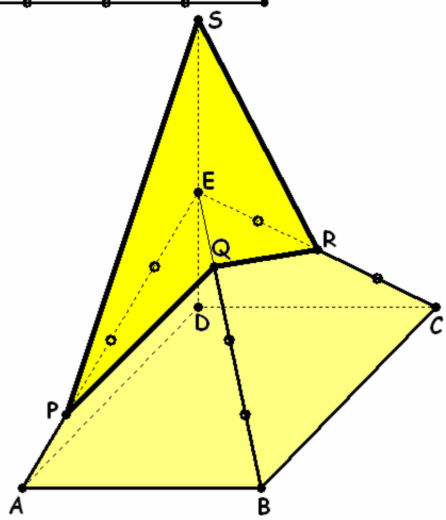
43) Im nebenstehend abgebildeten Würfel (Kantenlänge 30) ist R der Mittelpunkt der Kante DH sowie S der Spiegelpunkt von B an F. Durch Unterteilung der Strecke AR bzw. DS in fünf bzw. sechs gleich lange Teile entstanden die Punkte P und Q.

Zeige, dass die Geraden g_{AR}, g_{PQ} und g_{DS} paarweise aufeinander normal stehen!



44) Im nebenstehend abgebildeten Würfel der Seitenlänge 15 wurden die Kanten AB und DH in fünf, die Kante BF in drei gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte P, Q und R hervorgehen. In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt von g_{PQ} und ε_{ECR} die Länge der Strecke PQ?

45) Senkrecht über dem Eckpunkt D eines Quadrats ABCD befindet sich die Spitze E einer schiefen quadratischen Pyramide, deren Seitenkanten AE, BE und CE in vier gleich lange Teile geteilt werden (siehe Abbildung rechts unten!). Die markierten Teilungspunkte P, Q und R spannen eine Ebene ε auf, welche die Gerade(!) g_{DE} in einem Punkt S schneidet. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks PQRS, wenn $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 48$ und $\overline{DE} = 4$ gilt. Beachte, dass das Viereck PQRS in Q eine "einspringende Ecke" aufweist!



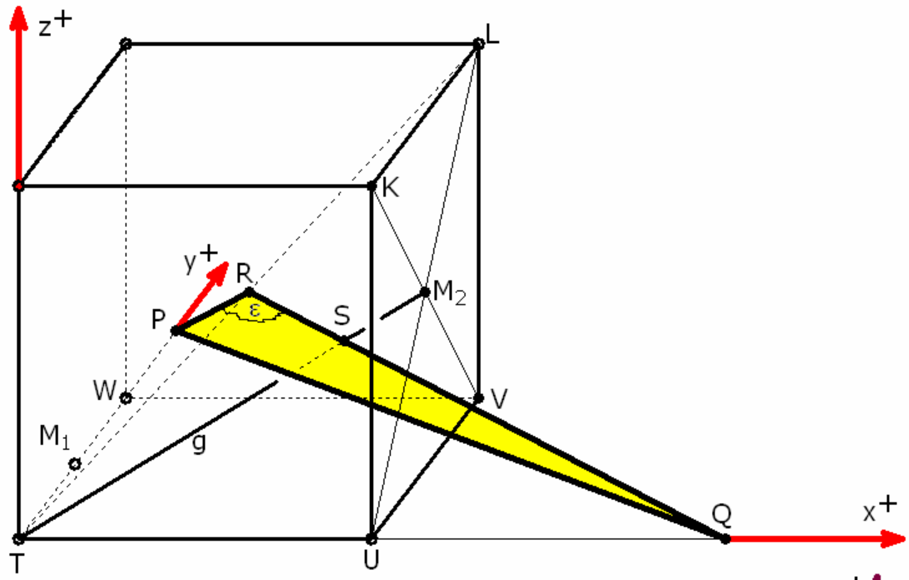
46) Verifiziere die nachstehende für alle Vektoren des

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot [(\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})] = 2 \cdot \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$\mathbb{R}^3$ gültige Identität für drei selbst gewählte Vektoren!

47) Im nebenstehend abgebildeten Würfel (Seitenlänge 10) gilt:

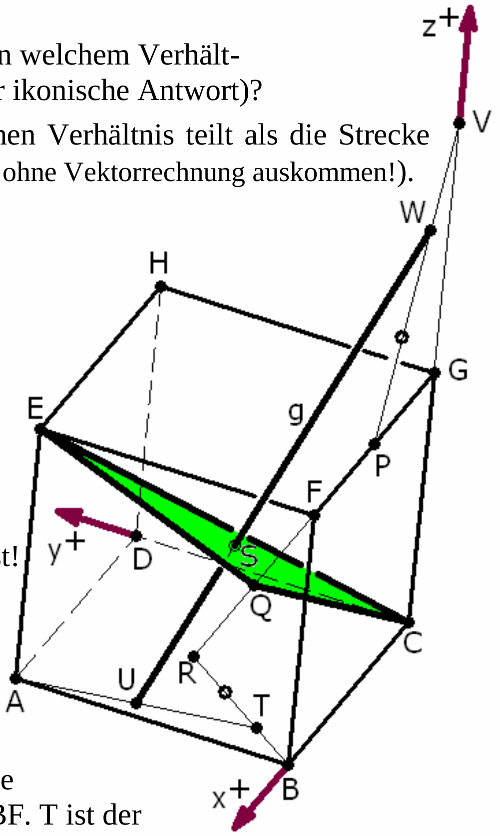
- M_1 ist der Mittelpunkt der Würfelkante TW.
- M_2 ist der Mittelpunkt der Würfelfläche UVLK.
- P ist der Spiegelpunkt von M_1 an der Würfelecke W.
- Q ist der Spiegelpunkt der Würfelecke T an U.
- R ist der Mittelpunkt der Raumdiagonale TL.
- g ist die Gerade durch die Punkte T und M_2
- ε ist die Trägerebene des Dreiecks ΔPQR.



a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts S von g mit ε. In welchem Verhältnis teilt der Punkt S die Länge der Strecke TM_2 (verbale oder ikonische Antwort)?

b) Zeige, dass S auf der Strecke RQ liegt und diese im gleichen Verhältnis teilt als die Strecke TM_2 (**Hinweis:** Man kann mit Hilfe des Strahlensatzes auch fast ohne Vektorrechnung auskommen!).

48) Im nebenstehend abgebildeten Würfel (Kantenlänge 6) ist P der Mittelpunkt der Kante FG, Q der Spiegelpunkt von P an F sowie R der Spiegelpunkt von F an Q. T entsteht durch Drittelung der Strecke BR, U ist der Mittelpunkt der Strecke AT. V ist der Spiegelpunkt von G an C, W entsteht durch Drittelung der Strecke PV.



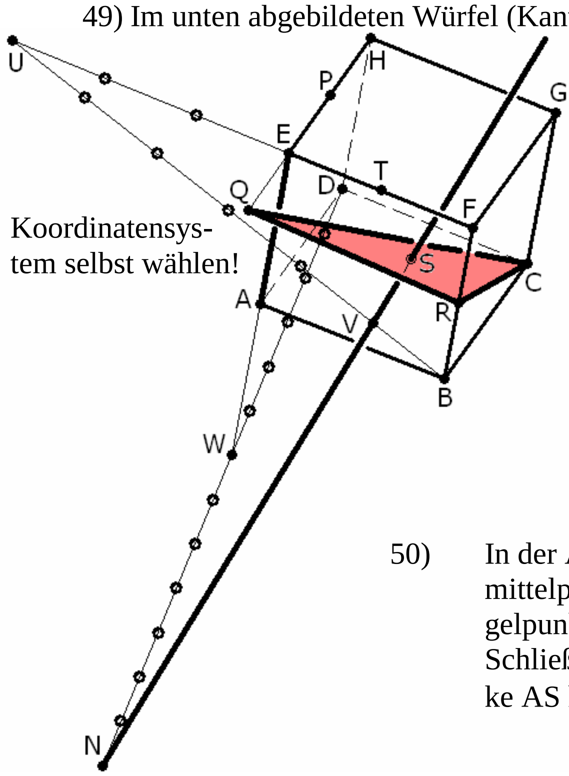
a) Zeige, dass der Schnittpunkt $\{S\} = g \cap \varepsilon_{EQC}$ die Strecke UW im Verhältnis 1:2 teilt!

b) Überprüfe, dass S auch der Schwerpunkt des Dreiecks ΔEQC ist!

c) Begründe, warum g normal auf ε_{EQC} steht!

49) Im unten abgebildeten Würfel (Kantenlänge 12) ist P der Mittelpunkt der Kante EH, Q der Spiegelpunkt von P an E sowie R der Mittelpunkt der Kante BF. T ist der Mittelpunkt der Kante EF, U entsteht durch fortlaufende Spiegelung von T an E, V geht durch Sechstelung der Strecke BU hervor, W ist der Spiegelpunkt von E an A und N geht schließlich durch fortlaufende Sechstelung der Strecke DW hervor.

Koordinatensystem selbst wählen!

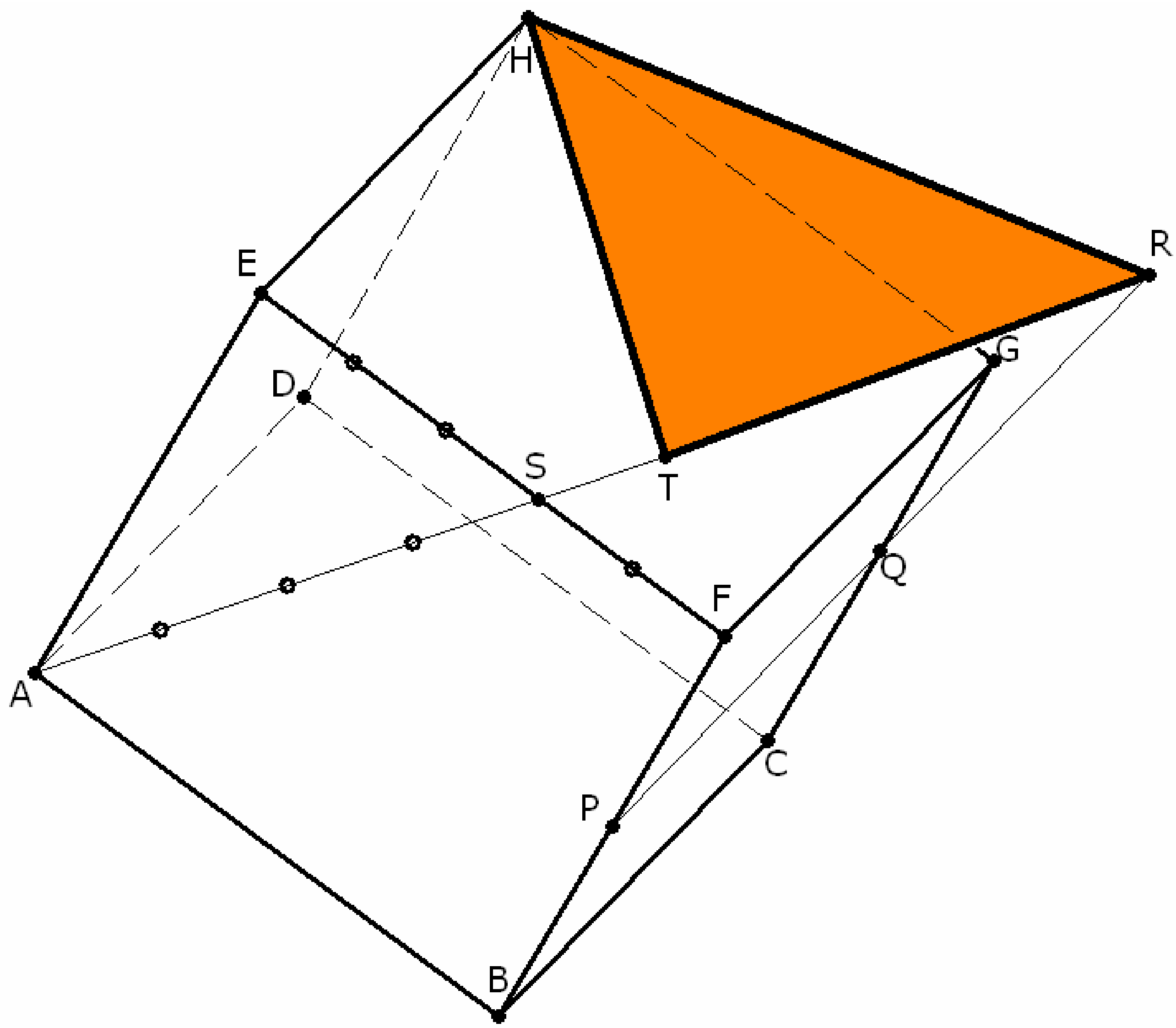


a) Zeige, dass V die Strecke NS (wobei $\{S\} = g_{NV} \cap \varepsilon_{CQR}$!) im Verhältnis 7:1 teilt!

b) Überprüfe, dass S auch der Schwerpunkt des Dreiecks ΔCQR ist!

c) Begründe, warum g_{NV} normal auf ε_{EQC} steht!

50) In der Abbildung auf der nächsten Seite sind P und Q Kantenmittelpunkte eines Würfels der Seitenlänge 20. R ist der Spiegelpunkt von P an Q. S entsteht durch Drittelung der Kante EF. Schließlich geht T aus einer fortlaufenden Viertelung der Strecke AS hervor. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔHTR!



Lösungen ausgewählter Aufgaben:

43) ---

44) $\overline{PS}:\overline{SQ}=2:1$

45) 390

46) ---

47) a) $\overline{TS}:\overline{SM_2}=4:1$, b) ---

48) a) bis c): Q(9/0/6), U(7/3/1), W(1/0/10), ε_{EQC}: 2x+y-3z=0, S(5/2/4)

49) Wenn das Koordinatensystem wie in 48) gewählt wird, dann gilt für a) bis c):
Q(18/12/12), V(12/5/2), N(26/12/-26), ε_{CQR}: 2x+y-4z=0, S(10/4/6)

50) Wenn A und B die x-Achse, A und D die y-Achse sowie A und E die z-Achse aufspannen, dann gilt:
H(0/20/20), R(20/40/10), T(15/0/25), $F_{\Delta HTR}$=375

Wien, im Oktober 2010. Dr. R. Resel, e. h.