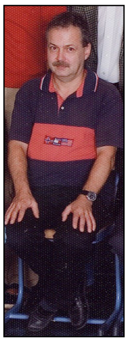
Übungsaufgaben zu 1b9):
1b901 und 1b903 in den Vorbereitungsstunden:

1b901) φιλ, Bino und Benny (Hintergrund!) gehen im August einem Ferialjob in einem gemeinsamen Büro nach. Jeden Tag gegen 12^{00} zückt jeder von ihnen eine Münze, um den "Schani " zu bestimmen, der für sich und die anderen beiden das Essen vom Supermarkt holt. Es kommt jenem die Ehre des Schanis zu, der Kopf wirft, wenn die anderen beiden Adler werfen oder Adler wirft, wenn die anderen beiden Kopf werfen. Die Zufallsvariable X zähle nun, wie viele Wurfrunden notwendig sind, bis der Schani feststeht. Berechne den Erwartungswert von X! Wie viele Wurfrunden werden die drei gemäß dieses theoretischen Werts an ihren 24 Arbeitstagen über sich ergehen lassen müssen?

1b902) Fünf Lehrer (siehe Abbildung unten) werfen täglich von Montag bis Freitag in der 11^{h}-Pause zugleich je eine Münze, und dies so oft, bis *einer* Kopf wirft und alle anderen Zahl (oder umgekehrt). Dann darf *derjenige* für alle den Kaffee zahlen. Sei nun X jene diskrete Zufallsvariable, welche die Anzahl der dafür notwendigen Wurfrunden zählt. Berechne E(X)! Wie viele Wurfrunden sind daher pro Woche im Mittel notwendig?

1b903) Fortsetzung von Aufgabe 1b902): Wie viele Wurfrunden wären täglich notwendig, wenn die in den unteren Abbildungen abgebildeten Herren ebenfalls mitwerfen?





1b904 und 1b905 in den Vorbereitungsstunden:

1b904) 13 Schüler der 8X, die nicht den Religionsunterricht besuchen, verfügen über einen überdurchschnittlich großen Rucksack, in dem durchaus Ration für 13 hungrige Religionsabgemeldete ("RA") passt. Damit nicht alle in den Supermarkt müssen – Schließlich kann der Rucksack ja genau so gut von einem Schüler alleine getragen werden! – , hat Emmy dreizehn Münzen mitgenommen, um durch Spielen von "odd one out" den "Glücklichen" zu bestimmen, der mit dem Rucksack losmarschieren darf. Gehen darf jener, der zuerst Kopf wirft, während alle anderen RA Zahl werfen oder umgekehrt. Black River entgegnet, dass dazu ja laut seiner Rechnung im Durchschnitt mehr als 300 Wurfserien zu erwarten sind.

a) Rechne nach, ob Black Rivers Behauptung stimmt!

b) Emmy "Lomo-Polo" erwidert daraufhin, dass er gezinkte Münzen verwendet, bei denen mit 47%iger Wahrscheinlichkeit Kopf fällt, was seinen Rechnungen zufolge die durchschnittlich zu erwartende Anzahl an Wurfrunden *deutlich senkt*. Nimm dazu ausführlich Stellung und quantifiziere *Emmys vage Aussage*!

1b905) Ex-Klassenkollege "Wuschl" aus der Nachbarklasse bekommt von Emmys Aktion Wind und hat die glorreiche Idee, etwas Ähnliches mit 15 auserwählten Schülern "seiner" 8Y zu machen, und zwar zwecks Bestimmung eines "Dokumentators und Archivators" von Sprüchen für eine spätere Maturazeitung [an und für sich eine nette Idee, sollte auch(!) die 8X in Erwägung ziehen!]. Black River rät ihm davon ab, weil dafür s. E. durchschnittlich an die 1100 Wurfrunden erforderlich sind.

a) Liegt Black River [auch(?) hier] mit seiner Einschätzung richtig?

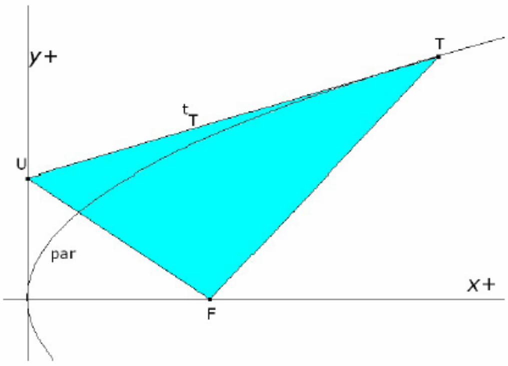
b) Emmy ermutigt "Wuschl", es mit 15 gezinkten Münzen (Wurfwahrscheinlichkeit für Zahl: 46%) zu versuchen, da dies Black Rivers prognostizierte Wahnsinnszahl erheblich verringert. Konkretisiere Emmys Argument!

1b906) 19 verhaltensauffällige Schüler sollen für längere Zeit beschäftigt (insbesondere statistisch geschult!) werden. Nach mittlerweile reichhaltigen Erfahrungen mit dem Spiel "odd one out" schlagen Black river, "Wuschl" und Emmy vor, die "Horde" regelmäßig (z.B. einen Vormittag pro Woche) mit 19 gezinkten Münzen auszustatten (Wurfwahrscheinlichkeit für Kopf: 41%) und sie dann "odd one out" spielen zu lassen. Wann [von 8^{15} an *ohne Pause* (!) gemessen] wird das Spiel (theoretisch!) durchschnittlich beendet sein, wenn 5 Wurfrunden pro Minute stattfinden?

1b907) Nachdem sich Wuschls Vorhaben aus Aufgabe 1b905) bezogen auf den Aufwand wegen der erforderlichen Wurfrunden als nur schwer realisierbar erwiesen hat, modifiziert er seinen Plan folgendermaßen: Zunächst schränkt er den Kreis der potentiellen Dokumentatoren und Archivatoren auf insgesamt 11 Schüler ein und verwendet aufgrund eines weisen Ratschlags von Tante Emma (Emmy vertraut er nach dem Desaster nicht mehr!) 11 präparierte Münzen, bei denen mit einer Wahrscheinlichkeit von 34% Zahl fällt. Außerdem wird jede Woche neu geworfen, und zwar immer montags ab 11^{00}. Wie viele Minuten wird dieses Procedere im Durchschnitt in Anspruch nehmen, wenn aufgrund zusätzlich angestellter genauer Dokumentationen der einzelnen Wurfrunden jede einzelne davon 46 Sekunden in Anspruch nimmt? Geht sich dies im Schnitt in einer 11h–Pause aus?

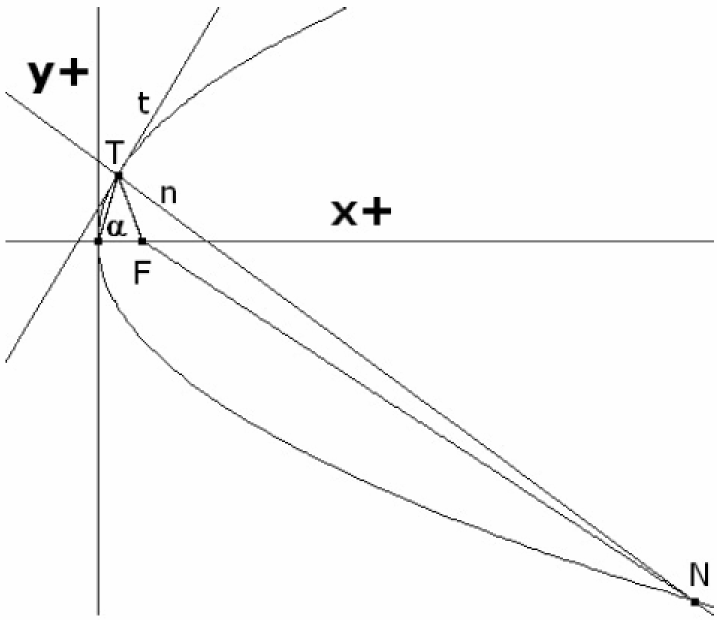
Übungsaufgaben zu 1b10):
1b1002, 1b1003 und 1b1006 in den Vorbereitungsstunden:

1b1001)



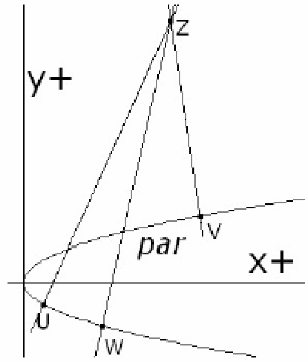
Im Punkt $T(x_T|36)$ jener Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(3|0)$ wird wie in obiger Abbildung illustriert die Tangente t_T gelegt, wodurch ein Dreieck ΔUFT generiert wird. Verifiziere für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ dieses Dreiecks die Formel $\mathcal{A} = \frac{1}{4} \cdot y_T \cdot (x_T + x_F)$!

1b1002)



Für den Flächeninhalt μ des in obiger Figur abgebildeten Dreiecks ΔTFN gilt die Formel $\mu = \tan\alpha \cdot \overline{FT}^2$. Dabei ist t die Tangente, n die Normale an die Parabel in T sowie F der Focus der Parabel. Verifiziere diese Formel (oder beweise sie allgemein) für jene Parabel in erster Hauptlage, welche die Gerade g $[g : 3x - y + 3 = 0]$ als Tangente besitzt.

1b1003)



$F(\frac{25}{2}|0)$ ist der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage.

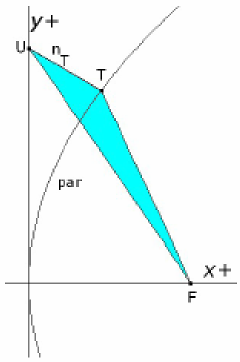
(a) Stelle eine Gleichung von par auf!

(b) In obiger Figur ist par zusammen den Punkten $U(x_U|-10)$ und $V(x_V|40)$ inkl. der entsprechenden Kurvennormalen samt Schnittpunkt Z abgebildet. Berechne die Koordinaten von Z!

(c) Wie aus der Abbildung ersichtlich gibt es noch einen dritten Parabelpunkt W, in dem die Kurvennormale auch durch Z verläuft. Für dessen $x-$Koordinate x_W gilt dann (wie sich zeigen läßt) allgemein die Gleichung $x_W = \frac{(y_1+y_2)^2}{2p}$, wobei p den Parabelparameter bezeichnet. Verifiere dies am konkreten Beispiel!

(d) Für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Dreiecks ΔUVW gilt (wie sich ebenso zeigen läßt) die Formel $\mathcal{A} = \frac{1}{8x_F} \cdot |(y_U - y_V)(y_U + 2y_V)(2y_U + y_V)|$. Kontrolliere dies auch!

1b1004)



Im Punkt $T(x_T|36)$ jener Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(27|0)$ wird wie in obiger Abbildung illustriert die Kurvennormale n_T gelegt, wodurch ein Dreieck ΔUFT generiert wird. Verifiziere für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ dieses Dreiecks die Formel $\mathcal{A} = x_T \cdot y_T \cdot \left(\frac{x_T}{2p} + \frac{1}{4}\right)$, wobei p den Parabelparameter bezeichnet.

1b1005) Für jede Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p gilt der folgende

Satz. Ist $T(x_T|y_T)$ ein Punkt von par sowie n_T die Kurvennormale an par in T, dann gilt für die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts $R(x_R|y_R)$ von n_T und par die Darstellung $\boxed{x_R = x_T + 2p + \frac{p^2}{x_T},\ y_R = -y_T - \frac{2p^2}{y_T}}$.

Rechne dies für den Punkt T(3|12) nach!

1b1006) Durch den Punkt T(1|–6) verläuft genau eine Parabel par in erster Hauptlage.

a) Ermittle eine Gleichung von par, zeige, dass auch der Punkt T´(81|54) auf par liegt und stelle sowohl in T als auch in T´ jeweils eine Gleichung der Tangente an par auf!

b) SATZ. Gelten für zwei Punkte $T(x_T|y_T)$ und $T'(x_{T'}|y_{T'})$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter p die Gleichungen $\boxed{x_T \cdot x_{T'} = \frac{p^2}{4}}$ und $\boxed{y_T \cdot y_{T'} = -p^2}$, dann stehen die Tangenten an par in T und T´ aufeinander normal. Ferner gilt die ("fortlaufende") Formel $$\boxed{\overline{TT'} = x_T \cdot \left(\frac{2x_{T'}}{p} + 1\right)^2 = x_{T'} \cdot \left(\frac{2x_T}{p} + 1\right)^2}.$$

Überprüfe diesen Satz am Beispiel der Parabel par aus a)!

1b1007) *Legt man durch einen Punkt $T(x_T|y_T)$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brenpunkt F und dem Parameter p sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, dann begrenzen die y-Achse, t_T und n_T ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt A die Formel* $A = \frac{x_T y_T}{2p} \cdot \overline{FT}$ *gilt.*

Kontrolliere die Gültigkeit *dieses Lehrsatzes* für den Punkt T(2|8)!

1b1008) *Legt man durch einen Punkt $T(x_T|y_T)$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, dann begrenzen die x-Achse, t_T und n_T ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt A die Formel* $A = y_T \cdot \overline{FT}$ *gilt.*

Kontrolliere die Gültigkeit *dieses Lehrsatzes* für den Punkt T(18|12)!