

Masterplan MRP 2008/09 (M, 8Bf/8Crg)

Dr. R. RESEL

1.) KERNFRAGEN:

Bei 12 Kandidaten (Buzek, Grassl, Grohsebner, Kana, Karajordanov, Morajda, Lanzenberger, Lomoschitz, Portisch, Rudolph, Wiehart, Yu) ergeben sich 24 Kernfragen, wobei 12 davon Beweise sein werden, ergo:

- | | |
|----------------------------|--|
| 1a) Beweise: | 1a1) Orthogonalitätskriterium im \mathbb{R}^2 (nur rg!) |
| | 1a2) CRAMERSche Regel im \mathbb{R}^2 (nur rg!) |
| | 1a3) Beweis des Cosinus-Satzes mit Polarkoordinaten |
| | 1a4) CRAMERSche Regel im \mathbb{R}^3 |
| | 1a5) Herleitung der geometrischen Summenformel |
| | 1a6) Herleitung der logarithmischen Transformationsformel |
| | 1a7) Beweis von $E(X)=np$, wenn X bin.-vert. mit n und p |
| | 1a8) Beweis von $E(X)=1/p$, wenn X geom.-vert. mit EP p |
| | 1a9) Beweis der Berührungsbedingung für die Parabel |
| | 1a10) Beweis der Berührungsbedingung für die Ellipse |
| | 1a11) Beweis der Produkt- und(!) Quotientenregel |
| | 1a12) Beweis der Potenzregel + Umkehrung bei Int. |
| 1b) Aufgabenstellungen zu: | 1b1) Analytische Geometrie der Ebene (ohne Kegelschnitte), rg |
| | 1b2) Lineare Gleichungssysteme aus $\mathbb{R}^{(2,2)}$ mit Parametern, rg |
| | 1b3) Analytische Geometrie des Raums (Treffnormale) |
| | 1b4) Lineare Gleichungssysteme aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ ohne Parameter |
| | 1b5) Geometrische Reihen im Geldwesen |
| | 1b6) Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse |
| | 1b7) Binomialverteilung (u.a. Gewinn- und Ziehchancen) |
| | 1b8) Erwartungswert und Varianz einer diskreten ZV |
| | 1b9) Geometrische Verteilung: Warten auf den ersten Erfolg |
| | 1b10) Analytische Geometrie der Kegelschnitte, f |
| | 1b11) Kurvendiskussionen (auf Polynome beschränkt!) |
| | 1b12) Flächeninhaltsberechnungen mittels best. Integral |

2.) SPEZIALFRAGEN:

Name	Titel
2a) Buzek	Analytische Geometrie der Drehkegel- und Drehzylinderfläche
2b) Grassl	Analytische Geometrie der Kegelschnitte: Beweise von Lehrsätzen
2c) Grohsebner	Bogenlängen- und Mantelflächenberechnungen mittels Integral
2d) Kana	Analytische Geometrie der Kugel
2e) Karajordanov	Schwerpunktberechnungen mittels Integral
2f) Morajda	Elementare Algebra und Zahlentheorie: Teilbarkeitseigenschaften von Termen
2g) Lanzenberger	Parameterdarstellung von Kurven (inkl. Differential- & Integralrechnung)
2h) Lomoschitz	Approximation von Funktionen durch Taylor-Polynome (innermathematisch)
2i) Portisch	Elementare Differentialgeometrie ebener Kurven (Krümmung)
2j) Rudolph	Vektoralgebra
2k) Wiehart	Numerische Integration
2l) Yu	Approximation von Funktionen durch Taylor-Polynome (außermathematisch)

Übungsaufgaben zu 1b1):

1b101) Bestätige am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(51|0), C(16|12)]$ den folgenden elementargeometrischen

SATZ. Ist D bzw. E der Lotfußpunkt von A auf die Innenwinkelsymmetrale w_β bzw. w_α eines Dreiecks ΔABC , dann liegen die Geraden g_{AB} und g_{DE} zueinander parallel.

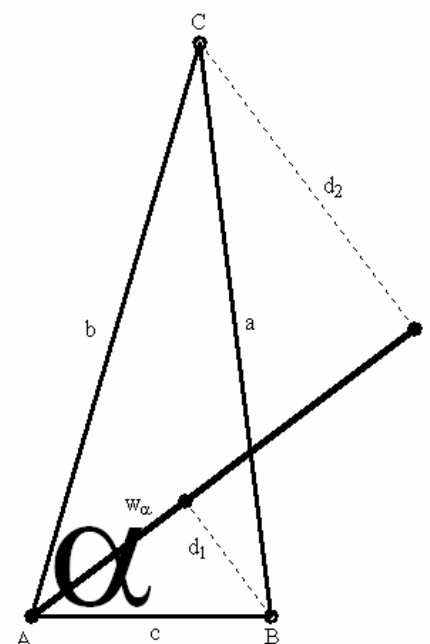
1b102) Bestätige am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-12|0), B(15|9), C(-20|16)]$ für den Punkt $P(x_P|0)$ den folgenden elementargeometrischen

SATZ. Liegt P auf dem Umkreis k_U eines Dreiecks ΔABC mit dem Umkreisradius r (wobei $P \neq A \wedge P \neq B \wedge P \neq C$) und sind X bzw. Y die Lotfußpunkte von P auf die (Trägergeraden der) Seiten BC und AC, dann gilt für den Normalabstand d von P zu g_{XY} die Formel $\overline{PA} \cdot \overline{PX} = 2dr$.

1b103) Aufgabe 1 über das Fuhrmann-Dreieck aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage: [I und U bereits selbst berechnen, "Rest" in Vorbereitungsstunde!](#)

1b104) Mit den in nebenstehender Figur beschrifteten Größen gilt für jedes Dreieck ΔABC mit der Abkürzung $s = d_1 + d_2$ untenstehende Gleichung. Kontrolliere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(150|0), C(7|24)]$!

$$s^2 = \left(a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 + bc \sin^2 \alpha$$



1b105) ΔABC sei ein Dreieck mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$, dem Höhenschnittpunkt H sowie dem Umkreismittelpunkt U. Bezeichnet μ bzw. μ' bzw. μ'' den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC bzw. ΔABH bzw. ΔABU , dann gilt die Formel $\mu' + 2\mu'' = \mu$. Verifiziere diese Formel für das Dreieck $\Delta ABC[A(-5|-4), B(13|2), C(9|10)]$! [U bereits selbst berechnen, "Rest" dann in der Vorbereitungsstunde!](#)

1b106) Gegeben sei ein Dreieck mit einer beliebigen Geraden g durch dessen Schwerpunkt. Liegen zwei Eckpunkte des Dreiecks auf der gleichen Seite von g , so ist die Summe ihrer Abstände von g gleich dem Abstand des dritten Eckpunktes von g .

Verifiziere diesen allgemeingültigen Satz anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(11|-37), B(56|-7), C(41|68)]$, wobei g durch $D(27|-4)$ verläuft.

ZUM EIGENSTÄNDIGEN ÜBEN:

1b107) Aufgabe 10 über den Lemoine-Punkt aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage:

1b108) Beispiel A2 der 5C(Rg), 2005/06, 2. Schularbeit: Für den Umkreisradius r jedes Dreiecks mit den Seitenlängen a , b , und c und dem Flächeninhalt F gilt die Formel $r = \frac{abc}{4F}$. Bestätige diese Formel anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(2|8), B(9|1), C(11|5)]$!

1b109) Verifiziere folgenden elementargeometrischen Satz anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(-4|-5), B(11|-2), C(7|6)]$: Der Abstand des Umkreismittelpunktes eines Dreiecks von einer Dreiecksseite ist halb so groß als der Abstand des Höhenschnittpunkts von dem dieser Seite gegenüberliegenden Eckpunkt.

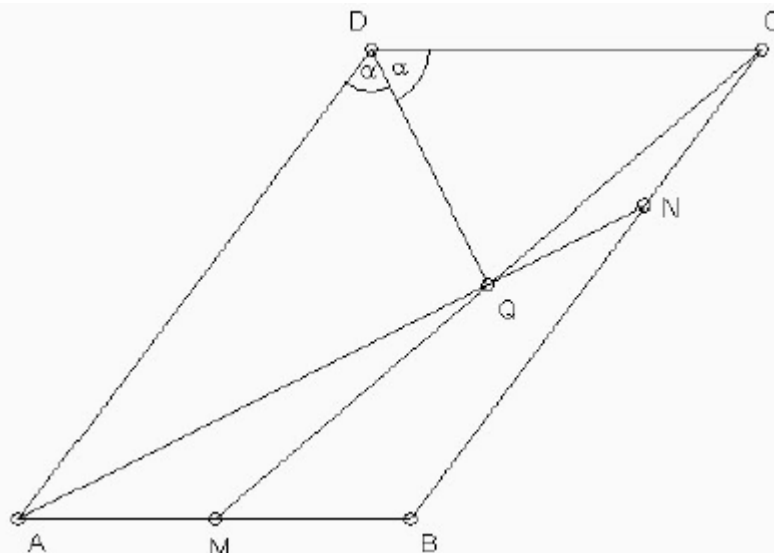
1b110) Nutze die folgende Aufgabe in zweierlei Hinsicht:

- in ihrer aus der Formulierung hervorgehenden ursprünglichen Intention,
- als Übungsaufgabe zum Winkelsymmetralenschnitt mit Ergebniskontrolle!

Kontrolliere "mit Hausverstand" bzw. der HESSESchen Abstandsformel, dass $I(42|14)$ der Inkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(63|0), C(48|36)]$ ist!

1b111) Beispiel A1 der 5C(Rg), 2005/06, 4. Schularbeit: Im Parallelogramm $ABCD[A(0|0), B(10|0), C(19|12), D]$ liegen die Punkte M und N auf den Seiten AB und BC derart, dass $\overline{AM} = \overline{CN} = 5$ gilt.

- Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts Q von g_{AN} und g_{CM} (vgl. Abbildung!). Verwende dazu eine Parameterdarstellung von g_{CM} !
- Zeige, dass Q auf der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ADC$ liegt!



1b112)

- a) Zeige, dass das Viereck ABCD[A(-4|6), B(11|-3), C(14|6), D(11|11)] einen Umkreis besitzt und ferner aufeinander normal stehende Diagonalen aufweist.
- b) Für Sehnenvierecke mit dieser Eigenschaft gilt der **SATZ von W. GÖTZ**: Der Normalabstand des Umkreismittelpunkts zu einer Seite ist stets halb so groß als die gegenüberliegende Seite. Verifiziere diesen Satz für alle vier Varianten am vorliegenden konkreten Beispiel!

Übungsaufgaben zu 1b2):

- 60) Für welche Werte des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine bzw. unendlich viele Lösungen? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass diesfalls $x+2y$ unabhängig von a konstant ist. Wie groß ist diese Konstante?
- $$\begin{cases} (2a + 18)x + (a + 3)y = 3 \\ (a + 6)x + (a + 1)y = 1 \end{cases}$$
- 61) Für welchen Wert des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen? Welcher Fall liegt vor? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass diesfalls $5x+3y$ unabhängig von a konstant ist. Wie groß ist diese Konstante?
- $$\begin{cases} (2a + 5)x + (a + 2)y = 1 \\ (a + 15)x + (a + 11)y = -2 \end{cases}$$
- 62) Für welchen Wert des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen? Welcher Fall liegt vor? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass diesfalls $3x+y$ unabhängig von a konstant ist. Wie groß ist diese Konstante?
- $$\begin{cases} (2a + 13)x + (a + 6)y = 1 \\ (a + 11)x + (a + 7)y = 2 \end{cases}$$
- 63) Für welchen Wert des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen? Welcher Fall liegt vor? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass diesfalls $x+2y$ unabhängig von a konstant ist. Wie groß ist diese Konstante?
- $$\begin{cases} (2a + 17)x + (a + 4)y = 3 \\ (a + 9)x + (a + 8)y = a + 11 \end{cases}$$
- 64) Für welchen Wert des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine oder unendlich viele Lösungen? Welcher Fall liegt vor? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass diesfalls $2x+y$ unabhängig von a konstant ist. Wie groß ist diese Konstante?
- $$\begin{cases} a^2x + (3a + 36)y = 18 \\ (a - 4)x + 4y = 1 \end{cases}$$
- 65) Für welche Werte des Parameters a hat das nebenstehende lineare Gleichungssystem keine bzw. unendlich viele Lösungen? Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die eindeutige Lösung $(x|y)$? Zeige, dass nur eine Zahl des geordneten Paares $(x|y)$ von a abhängt (Welche?)!
- $$\begin{cases} ax + (a + 1)y = 1 \\ (a^2 + 1)x + (a + 1)^2y = 2 \end{cases}$$

1b201) Aufgabe 60 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

1b202) Aufgabe 62 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

1b203) Aufgabe 63 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

1b204) Aus einer Nachtrags-Schularbeit:

$$\begin{cases} a^2 x + (8a - 12)y = a + 6 \\ (a + 3)x + 9y = a - 3 \end{cases} (*)$$

- Für welchen Wert des Parameters a hat das obige lineare Gleichungssystem (*) keine Lösung bzw. unendliche viele Lösungen? Welcher Fall liegt dann vor?
- Multipliziere $(a-6) \cdot (-8a-3)$ aus!
- Multipliziere $(a-6) \cdot (a^2+2a+3)$ aus!
- Ermittle für den Fall der eindeutigen Lösbarkeit von (*) die Lösungsmenge $L = \{(x|y)\}$ von (*) und rechne nach, dass dann $\boxed{x+y=a}$ gilt! Verwende dazu b) und c)!!

ZUM EIGENSTÄNDIGEN ÜBEN:

1b205) Aus einer schriftlichen Wiederholungsprüfung:

Betrachte das rechts gerahmte lineare Gleichungssystem und bearbeite:

- Für welche Werte von a besitzt (*) keine eindeutige Lösung? Welcher Fall liegt jeweils vor und wie lautet die entsprechende Lösungsmenge?

$$\begin{cases} (a + 12) \cdot x + (a + 4) \cdot y = a + 14 \\ (33 - a) \cdot x + (a + 9) \cdot y = a + 44 \end{cases} (*)$$

- Multipliziere $(a+2) \cdot (2a+33)$ aus!
- Wie lautet im Fall der eindeutigen Lösbarkeit die Lösung $(x|y)$? Verwende 4b), um zu zeigen, dass diesfalls $9x+5y$ unabhängig von a konstant ist und berechne diese Konstante!

1b206) Aufgabe 61 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

1b207) Aufgabe 64 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

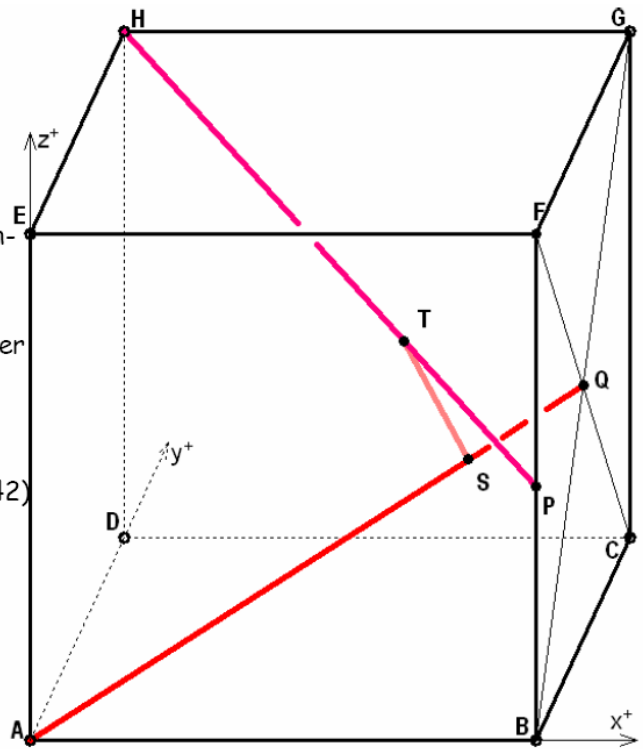
1b208) Aufgabe 65 der obigen Sammlung linearer Gleichungssysteme

Anhang zu 1b2): Lösungen zu den linearen Gleichungssystemen aus der Sammlung:

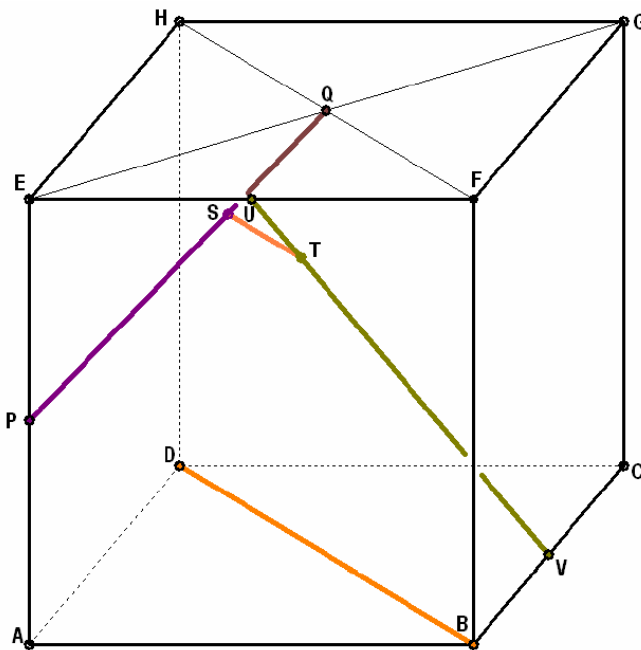
- Aufgabe 60: $\det K = 0 \leftrightarrow a=0 \vee a=-11$; $a=0 \rightarrow L = \{(x|y) \mid 6x+y=1\}$, $a=-11 \rightarrow L = \{\}$, $a \neq 0 \wedge a \neq -11 \rightarrow L = \{(2/(a+11) \mid -1/(a+11))\} \rightarrow x+2y=0$
- Aufgabe 61: $\det K = 0 \leftrightarrow a=-5$; $a=-5 \rightarrow L = \{(x|y) \mid 5x+3y=-1\}$, $a \neq -5 \rightarrow L = \{(3/(a+5) \mid -5/(a+5))\} \rightarrow 5x+3y=0$
- Aufgabe 62: $\det K = 0 \leftrightarrow a=-5$; $a=-5 \rightarrow L = \{(x|y) \mid 3x+y=1\}$, $a \neq -5 \rightarrow L = \{(-1/(a+5) \mid 3/(a+5))\} \rightarrow 3x+3y=0$
- Aufgabe 63: $\det K = 0 \leftrightarrow a=-10$; $a=-10 \rightarrow L = \{(x|y) \mid x+y=-1\}$, $a \neq -10 \rightarrow L = \{((-a-2)/(a+10) \mid (2a+16)/(a+10))\} \rightarrow x+2y=3$
- Aufgabe 64: $\det K = 0 \leftrightarrow a=12$; $a=12 \rightarrow L = \{(x|y) \mid 8x+4y=1\}$, $a \neq 12 \rightarrow L = \{(-3/(a-12) \mid (a-6)/(a-12))\} \rightarrow 2x+y=1$
- Aufgabe 65: $\det K = 0 \leftrightarrow a=-1 \vee a=1$; $a=-1 \rightarrow L = \{\}$, $a=1 \rightarrow L = \{(x|y) \mid x+2y=1\}$, $a \neq -1 \wedge a \neq 1 \rightarrow L = \{(1 \mid (1-a)/(1+a))\}$

Übungsaufgaben zu 1b3):

- 1b301) Gemäß der angegebenen Skizze ist P bzw. Q der Mittelpunkt der entsprechenden Kante bzw. Flächendiagonale des Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 106) sowie S bzw. T der jeweilige Endpunkt der Treffnormale der Geraden g_{AQ} und g_{HP} .
- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Strecke AQ bzw. PH?
 - Berechne für den Punkt $U(66|0|42)$ das Maß des Winkels $\angle UST$!
[Lsg.: $\angle UST \approx 56^\circ$]



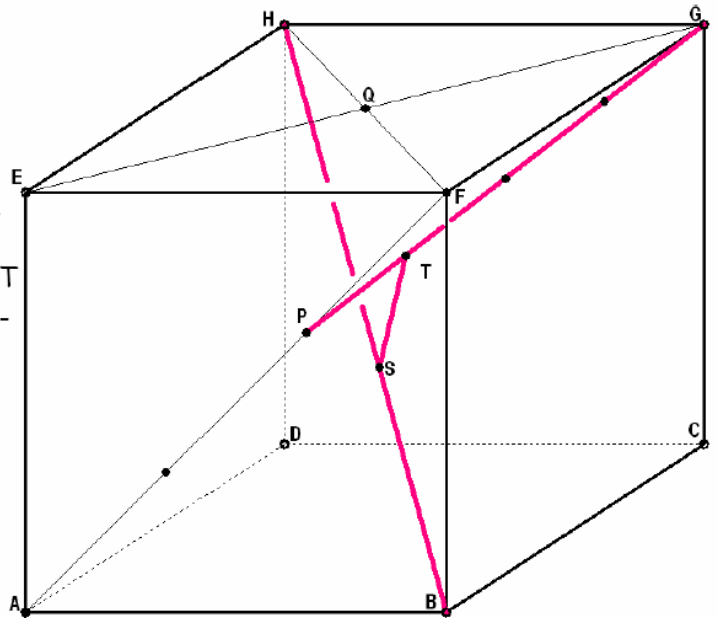
1b302)



In der linken Abbildung sind die Punkte P, Q, U und V durch Halbierung von Würfelkanten bzw. Flächendiagonalen entstanden, wobei der Würfel ABCDEFGH eine Seitenlänge von 12 aufweist.

- Zeige, dass die Geraden g_{PQ} und g_{UV} aufeinander normal stehen!
- In welchem Verhältnis teilen die Endpunkte der Treffnormale der Geraden g_{PQ} und g_{UV} die Strecken PQ und UV?
- Erläutere, inwiefern die Eigenschaft aus a) die Berechnungen in b) erleichtert!
- Zeige, dass g_{ST} parallel zu g_{BD} verläuft! In welchem Verhältnis stehen die Streckenlängen \overline{ST} und \overline{BD} ?

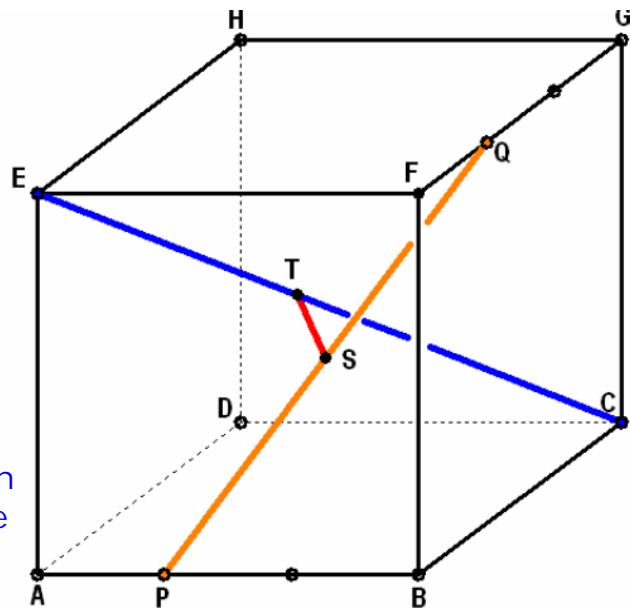
- 1b303) Gemäß der angegebenen Skizze entsteht P durch Drittelung einer Flächendiagonale des Würfels und ist Q ein Flächenmittelpunkt des Würfels ABCDEFGH (Seitenlänge 12). S bzw. T ist der jeweilige Endpunkt der Treffnormale der Geraden g_{BH} und g_{PG} .



- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Strecke BH bzw. PG?
- Zeige, dass g_{ST} zu g_{DQ} parallel verläuft und ermittle das Verhältnis der Streckenlängen \overline{ST} und \overline{DQ} !
- R liegt in der Ebene $\varepsilon_{ABE(F)}$, und zwar 40 Einheiten über der Ebene $\varepsilon_{ABC(D)}$ genau so weit links von der Ebene $\varepsilon_{BCG(F)}$ wie S. Berechne ohne Taschenrechner das Maß des Winkels $\sphericalangle RST$.

ZUM EIGENSTÄNDIGEN ÜBEN:

- 1b304) In nebenstehender Abbildung wurden die Kanten AB und FG des Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 18) in drei Teile geteilt, was die Punkte P und Q hervorbringt.

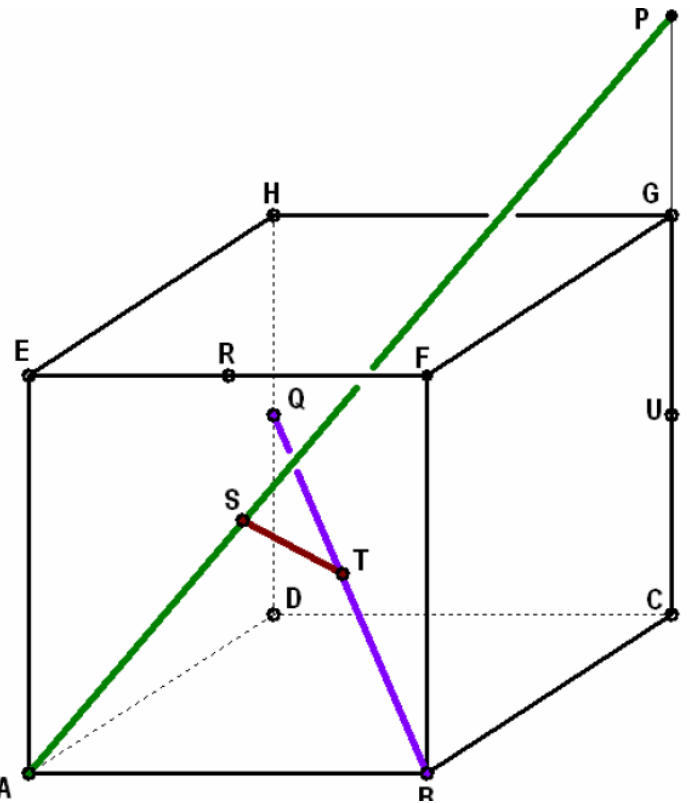


- Zeige, dass die Geraden g_{PQ} und g_{CE} aufeinander normal stehen!
- In welchem Verhältnis teilen die Endpunkte der Treffnormale der Geraden g_{PQ} und g_{CE} die Strecken PQ und CE?
- Erläutere, inwiefern die Eigenschaft aus a) die Berechnungen in b) erleichtert!

Zusatz: d) Wenn die x^+ -Achse von A nach B, die y^+ -Achse von A nach D und die z^+ -Achse von A nach E zeigt, welches Maß weist dann für den Punkt $R(0|39|33)$ der Winkel $\sphericalangle RST$ auf (ohne TR!)?

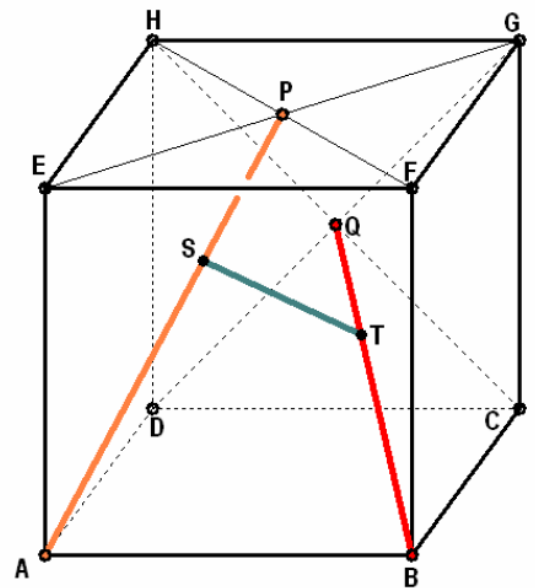
- 1b305) Zusatz zu 1b302):
- Wenn die x^+ -Achse von A nach B, die y^+ -Achse von A nach D und die z^+ -Achse von A nach E zeigt, welches Maß weist dann für den Punkt $R(12|0|14)$ der Winkel $\sphericalangle RST$ auf?
 - Wenn die x^+ -Achse von A nach B, die y^+ -Achse von A nach D und die z^+ -Achse von A nach E zeigt, weist dann für den Punkt $U(0|32|0)$ der Winkel $\sphericalangle UST$ ein Maß größer oder kleiner als 135° auf (ohne TR!)?

1b306) Gemäß der angegebenen Skizze entsteht P durch Spiegelung des Kantenmittelpunkts U an G und ist Q ein weiterer Kantenmittelpunkt des Würfels ABCDEFGH (Seitenlänge 18). S bzw. T ist der jeweilige Endpunkt der Treffnormale der Geraden g_{AP} und g_{BQ} .



- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Strecke AP bzw. BQ?
- Zeige, dass g_{ST} zu g_{RC} parallel verläuft und ermittle das Verhältnis der Streckenlängen \overline{ST} und \overline{RC} , wobei R ein weiterer Kantenmittelpunkt ist.

1b307) Gemäß der angegebenen Skizze sind P und Q Flächenmittelpunkte eines Würfels ABCDEFGH (Seitenlänge 6). S bzw. T ist der jeweilige Endpunkt der Treffnormale der Geraden g_{AP} und g_{BQ} .



- In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Strecke AP bzw. BQ?
- Zeige, dass S und T auf der Raumdiagonale CE liegen und drücke deren exakte Position durch Teilverhältnisse aus!

Übungsaufgaben zu 1b4):

- 1b401) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (3) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (3)!

$$\begin{cases} 5x - y + 7z = 16 \\ 3x + 2y - 6z = -3 \\ 8x + y + z = 29 \end{cases} \quad (3)$$

- 1b402) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (4) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (4)!

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 31 \\ 7x + 3y - z = -1 \\ x + 14y - 13z = -158 \end{cases} \quad (4)$$

- 1b403) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (6) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 47 \\ x - 7y - 2z = -71 \end{cases} \quad (6)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (6)!

ZUM EIGENSTÄNDIGEN ÜBEN:

- 1b404) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (10) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 7x - y + 3z = 6 \\ 4x + 2y - 5z = 23 \\ x + 5y - 13z = 30 \end{cases} \quad (10)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (10)!

- 1b405) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (11) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 9x - 4y + 2z = 73 \\ x - 5y + 2z = 19 \\ 2x + 8y - 3z = -5 \end{cases} \quad (11)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (11)!

- 1b406) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (12) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 2x - 7y + 3z = 84 \\ 5x + 2y - z = -3 \\ x + 16y - 7z = 13 \end{cases} \quad (12)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (12)!

- 1b407) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (13) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} x + 4y + 2z = -5 \\ 5x + 7y + 6z = 10 \\ 2x - 8y - z = 33 \end{cases} \quad (13)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (13)!

- 1b408) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (14) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 5x - 4y + 2z = 47 \\ 3x + y - 7z = -12 \\ x - 11y + 25z = 130 \end{cases} \quad (14)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (14)!

- 1b409) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (15) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstriplel $(x|y|z)$ besitzt.
$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 23 \\ x - 8y - 4z = -41 \\ 12x - 20y + 8z = 92 \end{cases} \quad (15)$$
- b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (15)!

Anhang zu 1b4): Lösungen zu den linearen Gleichungssystemen aus der Sammlung:

- 1b401) Dach
- 1b402) Büschel
- 1b403) Punkt
- 1b404) Dach
- 1b405) Punkt
- 1b406) Dach
- 1b407) Punkt
- 1b408) Büschel
- 1b409) Büschel

Übungsaufgaben zu 1b5):

1b501) Nach seinem Studium verdient Bino (Abbildung rechts) im ersten Jahr 20000€ netto und freut sich natürlich auf jede weitere Gehaltserhöhung. Die gute Nachricht für ihn ist die, dass er in jedem Jahr 2% mehr verdient als im Jahr zuvor. Nach wie vielen arbeitsreichen Jahren wird Bino unter dieser Voraussetzung ziemlich genau die Gesamtverdienstsumme von 1 Million € erreicht haben?

Um wie viel € liegt die exakte Gesamtverdienstsumme nach all diesen Jahren unter bzw. über 1 Million €? Wie hoch war sein Nettoeinkommen in seinem letzten Arbeitsjahr beinahe?



1b502) Wie man sieht, bereitet Tommy das Arbeiten nach Schule und Studium nicht gerade sonderlich viel Freude! Deshalb will er sich noch vor seinem 50. Geburtstag mit $\frac{1}{4}$ Million € in einem Steuerparadies zur Ruhe setzen und zahlt deshalb von seinem 22. Geburtstag an jährlich 8500 € auf ein Sparbuch, für welches er zwar nur einen Zinssatz von $2\frac{2}{3}\%$ p.a. aushandeln kann, was aber immer noch besser ist als gar keine Zinsen. Wie alt wird Tommy sein, bis er ziemlich genau seine $\frac{1}{4}$ Million € angespart haben wird und um wie viel € unterscheidet sich sein angespartes Kapital dann exakt von $\frac{1}{4}$ Million €?



1b503) Es war einmal ...

Klasse: 6B(G)	1. Schularbeit (zweistündig, Gr. A)	06. 03. 2007
<u>Pflichtmodul PM2:</u> Stochastik 1, Folgen und Funktionen		
1) a) Wilhelm (siehe Abbildung rechts!) verdiente in seinem ersten Arbeitsjahr (welches er mit seinem 30. Geburtstag begann) 26000 € netto. Sein Jahresgehalt ist in jedem Jahr um 16% höher als im Jahr zuvor. Zu welchem Geburtstag von Wilhelm beträgt (theoretisch! – all dies ist weder wahrheitsgetreu noch realistisch) sein bisher verdientes Gesamteinkommen ziemlich genau 3 Millionen €? Um wie viel € liegt dieses Gesamteinkommen knapp unter bzw. über 3 Millionen €?		
b) Da er schon von Beginn seiner Arbeitstätigkeit an so gut verdient, entschließt sich Wilhelm, jährlich 8000 € in eine Sparanlage mit einem Zinssatz von $5\frac{1}{3}\%$ p.a. einzuzahlen. Wie viele Jahre muss er auf diese Weise sparen, um am Ende ziemlich genau 125000 € herauszubekommen? Um wie viel € liegt sein Guthaben dann knapp unter bzw. über 125000 €?		

1b504) Once upon a time ...

Klasse: 6B(G)	1. Schularbeit (zweistündig, Gr. B)	06. 03. 2007
<u>Pflichtmodul PM2:</u> Stochastik 1, Folgen und Funktionen		
1) a) Rudi (siehe Abbildung rechts!) verdiente in seinem ersten Arbeitsjahr (welches er mit seinem 22. Geburtstag begann) 32000 € netto. Sein Jahresgehalt ist in jedem Jahr um 6% höher als im Jahr zuvor. Zu welchem Geburtstag von Rudi beträgt (theoretisch! – all dies ist weder wahrheitsgetreu noch realistisch) sein bisher verdientes Gesamteinkommen ziemlich genau 6 Millionen €? Um wie viel € liegt dieses Gesamteinkommen knapp unter bzw. über 6 Millionen €?		
b) Da er schon von Beginn seiner Arbeitstätigkeit an so gut verdient, entschließt sich Rudi, jährlich 1000 € in eine Sparanlage mit einem Zinssatz von $5\frac{1}{3}\%$ p.a. einzuzahlen. Wie viele Jahre muss er auf diese Weise sparen, um am Ende ziemlich genau 11000 € herauszubekommen? Um wie viel € liegt sein Guthaben dann knapp unter bzw. über 11000 €?		

Lösungen:

1b501) Nach 31 Jahren, exakte
Summe liegt 53,56€ darunter!
Beinahe 40000€!

1b502) Er wird 45 sein! Abweichung nach unten von 85,83€

1b503)

1b504)

Übungsaufgaben zu 1b6):

- 1b601) Aufgabe 1 über Bodenbrunn aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b602) Aufgabe 3 aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b603) Aufgabe 6 über Karina- bzw. Konstikirchen aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b604) Aufgabe 9 über Carolas bzw. Julias Experimentierfreudigkeit aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage

ZUM EIGENSTÄNDIGEN ÜBEN:

- 1b605) Aufgabe 2 über die "Alumaniacity" aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b606) Aufgaben 4 und 5 über die "Agenten für Sozialhilfeempfänger"
- 1b607) aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b608) Aufgabe 7 über Dianadown bzw. Hornhausen aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b609) Aufgabe 8 über (Escherichia) Tommy aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage
- 1b610) Aufgabe 10 über Ninas bzw. Raphaelas Experimentierfreudigkeit aus der Beispielsammlung auf meiner Homepage