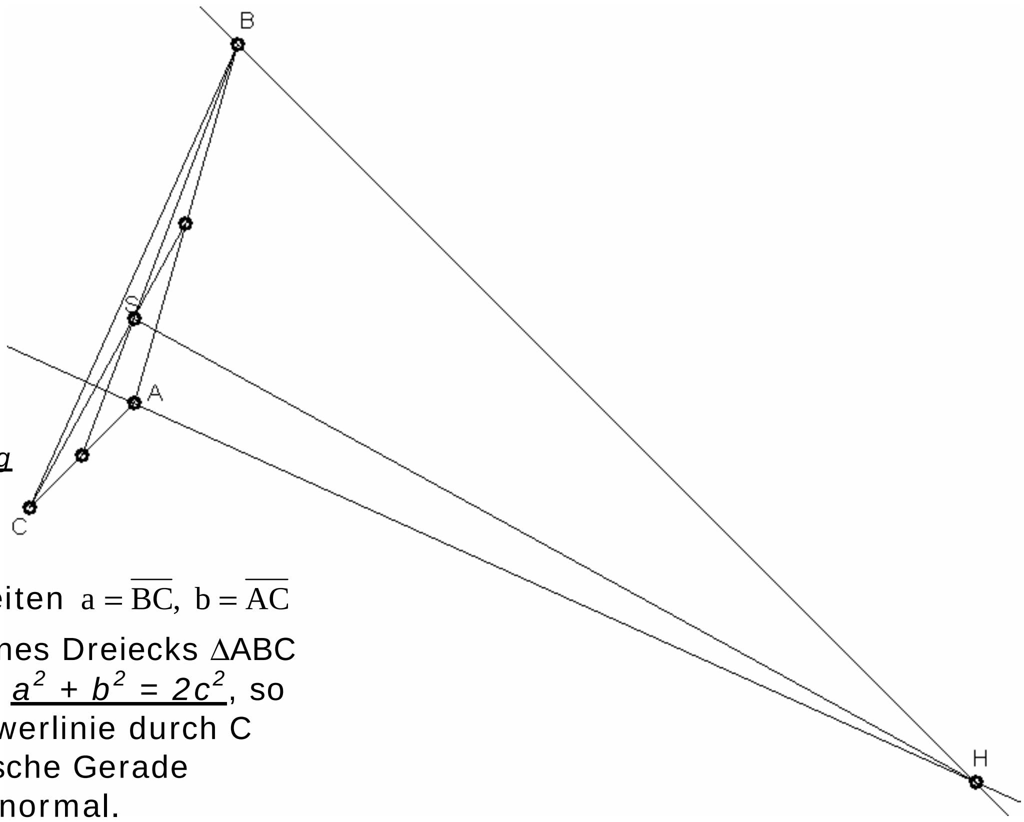
72 Übungsaufgaben für die schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik [Klasse: 8D(Rg), Sommertermin 2010]

I) Analytische Geometrie der Ebene (Aufgaben 1 bis 18)

1) Lassen sich die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC in der Form $a=2k+1$, $b=k+2$ und $c=k+1$ mit $k>0$ darstellen, dann verläuft die Gerade durch den Inkreismittelpunkt und den Schwerpunkt des Dreiecks normal zur kürzesten Dreiecksseite. Verifiziere diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(19|0), C(-16|12)]$, wobei zunächst die Voraussetzungen zu überprüfen sind (durch Berechnung von k) und der Schwerpunkt ohne Schwerpunktformel (außer für die Probe) zu ermitteln ist!

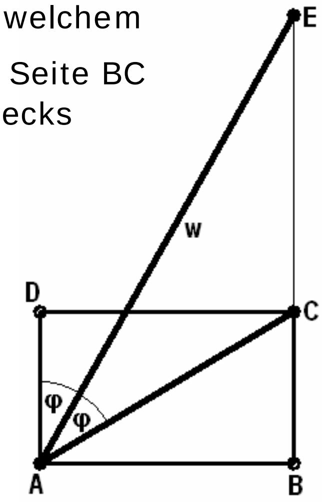
2) In nebenstehender Abbildung ist ein Dreieck ΔABC zusammen mit zwei seiner Schwerlinien sowie einem Teil seiner EULERschen Gerade abgebildet, wobei die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die *spezielle Voraussetzung* des folgenden Satzes erfüllen:



SATZ. Gilt für die Seiten $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC die Gleichung $\underline{a^2 + b^2 = 2c^2}$, so steht die Schwerlinie durch C auf die EULERsche Gerade des Dreiecks normal.

Zeige, dass das Dreieck $\Delta ABC[A(3|3), B(6|6+3\sqrt{6}), C(0|0)]$ diese spezielle Voraussetzung erfüllt und überprüfe am konkreten Beispiel dieses Dreiecks die Gültigkeit des Satzes.

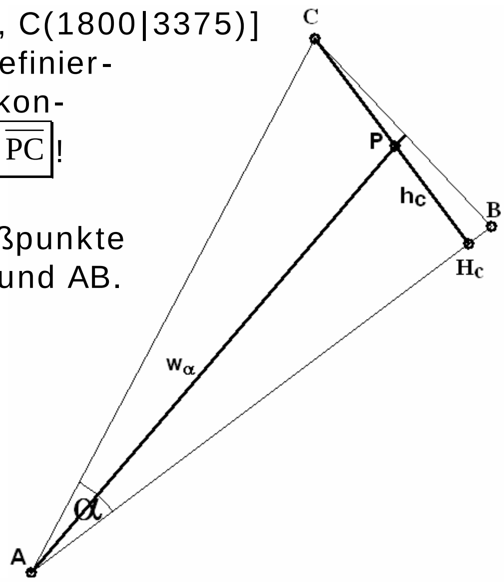
3) In nebenstehender Abbildung ist ein Rechteck ABCD illustriert, in welchem die Winkelsymmetrale w des Winkels ∢DAC die Trägergerade der Seite BC im Punkt E schneidet. Verifiziere am konkreten Beispiel des Rechtecks ABCD[A(–45|–30), B(3|–50), C(18|y), D] den allgemeingültigen Satz, demzufolge das Dreieck ΔACE gleichschenklig ist.



4) In jedem Dreieck gilt folgender
SATZ. Der Normalabstand d des Höhenfußpunkts H_c von der Trägergerade g_{AC} der Seite AC läßt sich (wobei – wie üblich! – $\overline{AC} = b$ sowie $∢CAB = \alpha$ gilt!) durch die Formel $\boxed{d = \frac{b \cdot \sin(2\alpha)}{2}}$ berechnen.
Kontrolliere diesen Satz durch Anwendung der HESSEschen Abstandsformel für das Dreieck ΔABC[A(–10|–9), B(6|–1), C(–1|3)]!

Hinweis: Die Formeln $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ sowie $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ könnten neben der "VW-Formel" durchaus hilfreich sein ... ☺

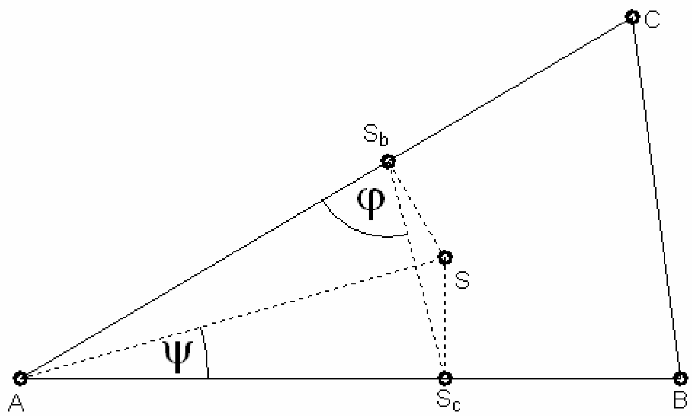
5) Berechne für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(2916|2187), C(1800|3375)] die Koordinaten des gemäß der angegebenen Skizze definierten Schnittpunkts P und kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $\boxed{\cos\alpha = \overline{H_cP} : \overline{PC}}$!



6) In der Abbildung rechts unten sind S_b und S_c die Lotfußpunkte des Dreiecksschwerpunkts S auf die Dreieckseiten AC und AB. Für die eingezeichneten Winkel φ und ψ gilt dann stets die Beziehung $\varphi+\psi=90°$. Verifiziere dies anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(45|45), C(30|60)]!

7) In jedem Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ zugehörigen Höhen h_a, h_b und h_c sowie dem Höhenschnittpunkt H gelten die folgenden Identitäten: $2 \cdot \overline{AH} \cdot h_a = b^2+c^2-a^2$, $2 \cdot \overline{BH} \cdot h_b = a^2+c^2-b^2$, $2 \cdot \overline{CH} \cdot h_c = a^2+b^2-c^2$

Überprüfe dies für das konkrete Dreieck ΔABC[A(–7|–4), B(8|1), C(4|7)]!



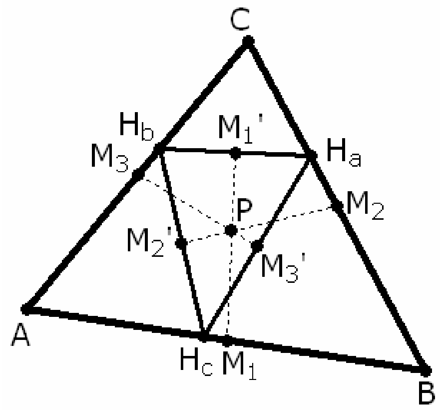
8) Legt man in den Eckpunkten B und C eines Dreiecks ΔABC die Tangenten an den Umkreis, so begrenzen diese ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt μ dann die Formel $\mu = \frac{1}{4} \cdot \tan\alpha \cdot a^2$ gilt, wobei wie üblich $a = \overline{BC}$ und $\alpha = ∢CAB$ gilt. Verifiziere diesen Lehrsatz der Elementargeometrie anhand des Dreiecks ΔABC mit den Eckpunkten A(–16|–18), B(17|15) und C(–7|27)!

9) In jedem Dreieck ΔABC mit dem Flächeninhalt F, den Seitenmittelpunkten M_{BC}, M_{AC} und M_{AB} sowie der Schwerlinie s durch A und M_{BC} gilt die folgende Satzgruppe:

Satz 1. Die Normalabstände $d(M_{AC},s)$ und $d(M_{AB},s)$ sind gleich groß ("d").
Satz 2. Für den in Satz 1 definierten gemeinsamen Normalabstand d gilt die Formel $\boxed{d = \frac{F}{2 \cdot \overline{AM_{BC}}}}$.

Überprüfe diese Satzgruppe für das konkrete Dreieck BC[A(0|0), B(70|10), C(50|80)]!

10) Verbindet man die Höhenfußpunkte eines Dreiecks ΔABC miteinander, so erhält man das sogenannte Höhenfußpunktdreieck $\Delta H_aH_bH_c$ des Dreiecks ΔABC. Zeige, dass die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmittelpunkte der beiden Dreiecke einander in einem Punkt P schneiden (siehe Abbildung rechts!), und zwar anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(140|0) und C(120|60)]!



11) Gilt für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC die Gleichung $a^2 + 2c^2 = 2b^2$, dann schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle M_{BC}AB$ die Dreieckseite BC orthogonal. Verifiziere dies für das konkrete Dreieck ΔABC[A(0|0), B(169|0), C(–407|240)]!

12) Im Dreieck ΔABC sei P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α mit der Schwerlinie s_c. Dann gilt $\overline{AP} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{\overline{AM_{AB}}} + \frac{1}{\overline{AC}}}$. Kontrolle erbeten für ΔABC[A(0|0), B(52|0), C(5|12)]!

13) Ein ganz besonders schöner Satz der Dreiecksgeometrie lautet wie folgt:
Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Streckensymmetrale m_{AB} und die Schwerlinie s_b eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, dann besteht zwischen den Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Beziehung $\boxed{(a^2 - b^2 + c^2)^2 = b^2c^2}$.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(138|0), C(60|144)]!

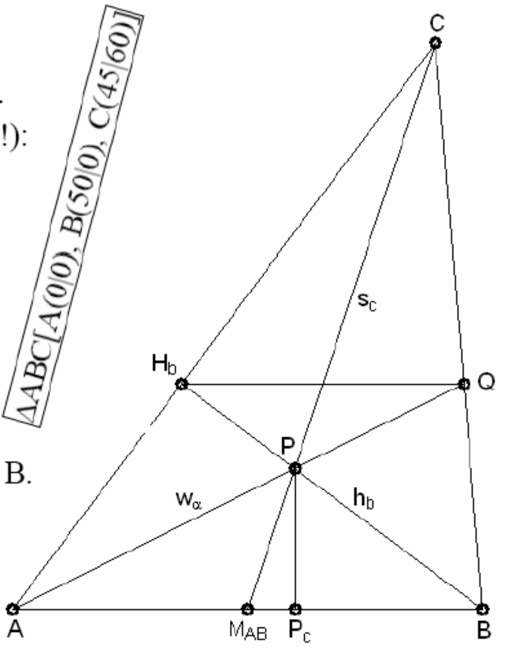
14) Ein nicht geringeres Juwel der Dreiecksgeometrie ist das folgende Theorem:
Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Streckensymmetrale m_{AB} und die Höhe h_b eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, dann gilt $\alpha = 60°$.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(6|0), C(2|2√3)]!

15) Ein besonders schöner Lehrsatz aus der Elementargeometrie der Ebene lautet wie folgt (siehe nebenstehende mittlere Abbildung!):

SATZ. Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Höhe h_b sowie die Schwerlinie s_c eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, so verläuft die Gerade durch H_b und Q parallel zur Gerade durch A und B.

Überprüfe die Gültigkeit dieses Satzes an obigem Beispiel.

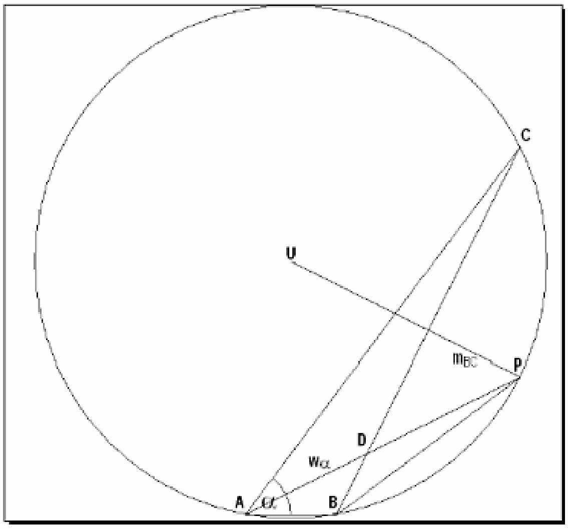
$\Delta ABC[A(0|0), B(50|0), C(45|60)]$



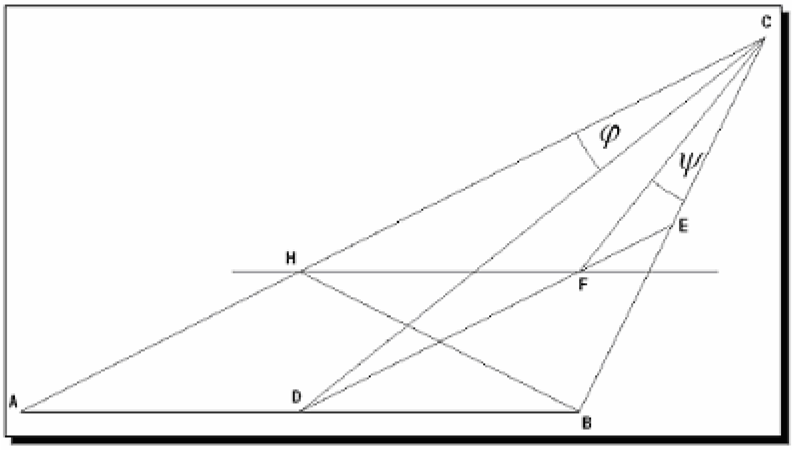
Zeige ferner, dass $\overline{AP_c} = \overline{H_bQ}$ gilt (Dabei ist P_c die Normalprojektion von P auf g_{AB}.)!

16) "Spiegelt man die Höhen eines Dreiecks an den entsprechenden Winkelsymmetralen, dann schneiden einander die drei gespiegelten Geraden im Umkreismittelpunkt des Dreiecks." Bestätige diesen Lehrsatz am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(-88|-40), B(24|72), C(80|-64)]$!

17) Bezogen auf die nebenstehende Abbildung besagt ein Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass die Winkel $\sphericalangle ABP$ und $\sphericalangle ADC$ kongruent sind [und ferner (vgl. 5D, Frühjahr 2007!), dass w_α und m_{BC} einander in einem Punkt des Umkreises schneiden!]. Rechne dies am Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(4|0), C(12|16)]$ nach! Begründe (Alexandra! ☺), warum die Berechnung der Lage von D dazu nicht notwendig ist!



18) Die rechte untere Abbildung illustriert schließlich den folgenden Lehrsatz der Elementargeometrie: Ist D bzw. E der Mittelpunkt der Seite AB bzw. BC eines Dreiecks ΔABC sowie H jener Punkt auf der Seite AC, welcher von A und B gleich weit entfernt ist und ist $\sphericalangle HBC$ ein rechter Winkel, dann ist auch $\sphericalangle ABF$ ein rechter Winkel und ferner sind die Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle FCB$ kongruent (wobei – siehe Abbildung! – F der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch H mit g_{DE} ist!)



Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(16|8)]$!

Lösungen geeigneter Aufgaben:

1) $I(1|3)$, $S(1|4)$

2) $H(15+5\sqrt{6}|-3-2\sqrt{6})$, $S(3|3+\sqrt{6})$

3) $C(18|-14)$, $D(-30|6)$, $E(43|46)$

4) $H_C(2|-3)$, $d=6$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$

5) $H_C(2772|2079)$, $P(2310|2695)$, $\cos\alpha=\frac{77}{85}$

6) $S_b(19|38)$, $S_c(30|30)$, $\cos\psi=\frac{6}{\sqrt{37}}$, $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{37}}$ (ergo folgt wegen $\cos\delta=\sin(90°-\delta)$ sowie $\cos^2\psi+\cos^2\varphi=1$ die Behauptung!)

7) $H(5|4)$, $h_a=\frac{55}{\sqrt{13}}$, $h_b=\frac{10}{\sqrt{2}}$, $h_c=\frac{22}{\sqrt{10}}$

8) $U(-4|3)$, $\{P\}=t_B\cap t_C$: $P(9|29)$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$

9) $d=17$, $F=2550$

10) $H_a(126|42)$, $H_b(112|56)$, $P(95|25)$

12) $P(12|8)$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

13) $P(69|46)$

14) $P(3|\sqrt{3})$

15) $P(30|15)$, $H_b(18|24)$, $Q(48|24)$

16) $U(1|-17)$

17) $P(12|6)$, der Cosinus beider Winkel beträgt minus vier Fünftel!

18) $H(6|3)$, $F(12|3)$