Klasse: 7B(Rg) **Schuljahr 2011/12**

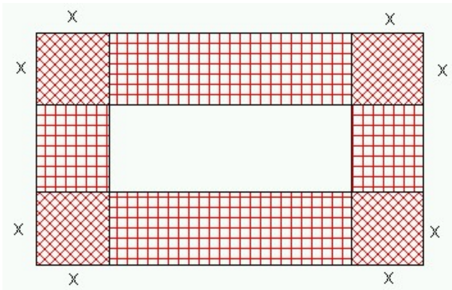
Zusätzliche Übungen für die 3. Schularbeit (zweistündig)

Kurvendiskussionsteile (parallele Kurventangenten) und Optimierungsprobleme

1. Einem 165 cm langen und 48 cm breiten Rechteck sollen von den Ecken Quadrate der Seitenlänge x derart weggeschnitten werden, sodass das Netz einer oben offenen quaderförmigen Schachtel mit maximalem Volumen entsteht (siehe untere Abbildung!).

   (a) Wie groß ist die Einschnitt-Tiefe x zu wählen? Weise das Vorliegen einer Maximumstelle sowie deren Eindeutigkeit nach!

   (b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass für dieses maximale Volumen $V_{\max}$ dann ausgehend von der Länge a und der Breite b des ursprünglichen Rechtecks die schöne Formel $V_{\max} = \frac{1}{18} \cdot [ab(a+b) - 4(a^2 - ab + b^2)x]$ gilt.

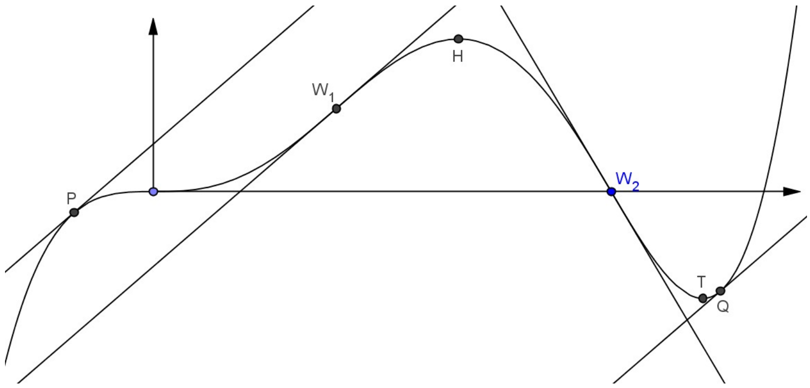


2. Beim Lösen einer Extremwertaufgabe wie 1. ist 50% des "Peter Alexander"-Dous der 7B [auch als Rubber-Rowdies bekannt! :-)], nämlich dem Wil...lie aufgefallen, dass die Werte der zweiten Ableitungen an den potentiellen Extremstellen einander stets nur im Vorzeichen unterscheiden. Überprüfe dies für ein Rechteck der Länge 48 und der Breite 13!

3. In der Figur auf der nächsten Seite ist der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^5 - 35x^4 + 300x^3$ zusammen mit seinen beiden gewöhnlichen Wendepunkten samt Tangenten sowie seinem Hoch- und Tiefpunkt abgebildet.

   (a) Ermittle unter Verwendung von Wurzelausdrücken die $x-$Koordinaten jener Punkte P und Q auf Γ_f, in welchen die Tangenten an Γ_f zur steigenden Wendetangente parallel verlaufen. Kontrolliere, dass $x_P + x_Q = x_{W_1} + x_H$ sowie $x_Q > x_T$ (unter Verwendung von Wurzelausdrücken ohne Einsatz von Dezimalzahlen!) gilt!

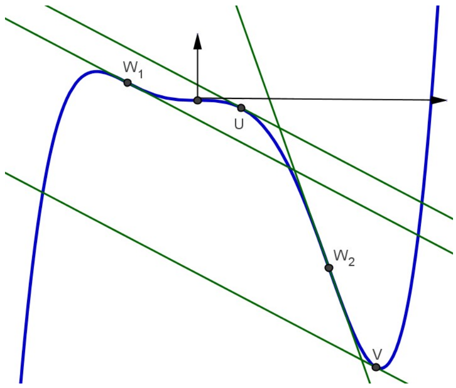
   (b) Zeige, dass W_2 auf der $x-$Achse liegt und es keine zu seiner Wendetangente parallele Kurventangente gibt!



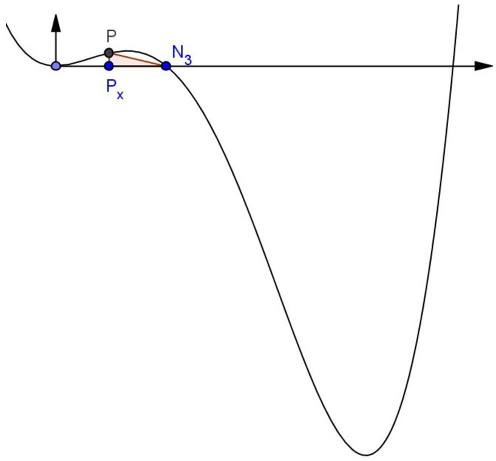
4. In der unteren Figur ist der Graph der Funktion f $[y = f(x) = x^5 - 35x^4 - 3600x^3]$ zusammen mit seinen beiden gewöhnlichen Wendepunkten samt Tangenten abgebildet.

   (a) Ermittle unter Verwendung von Wurzelausdrücken die $x-$Koordinaten jener Punkte U und V auf Γ_f, in welchen die Tangenten an Γ_f zur Wendetangente in W_1 parallel verlaufen.

   (b) Zeige, dass es keine zur Wendetangente in W_2 parallele Kurventangente gibt!



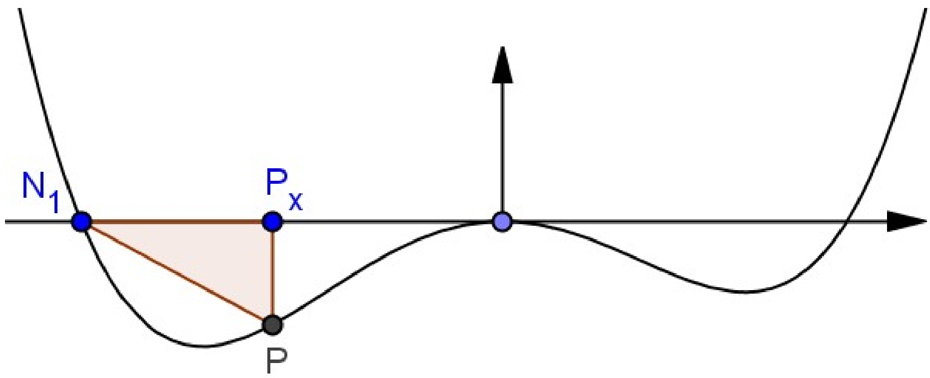
5. Untersuche für die beiden gewöhnlichen Wendepunkte der Kurve mit der Gleichung $y = x^5 - 145x^4 + 3000x^3$, ob es zu den entsprechenden Wendetangenten parallele Kurventangenten gibt. Gib gegegebenfalls die $x-$Koordinaten der entsprechenden Kurvenpunkte an!



6. In der oberen Figur ist der Graph Γ_f der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 115x^3 + 2250x^2$ zusammen mit seiner mittleren Nullstelle N_3 abgebildet. Dem von Γ_f und der $x-$Achse zwischen der linken und der mittleren Nullstelle begrenzten Gebiet $\mathcal{G}$ soll wie in der Figur illustriert das flächeninhaltsgrößte Dreieck einbeschrieben werden.

   (a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte P_x und P des gesuchten optimalen Dreiecks ΔPP_xN_3!

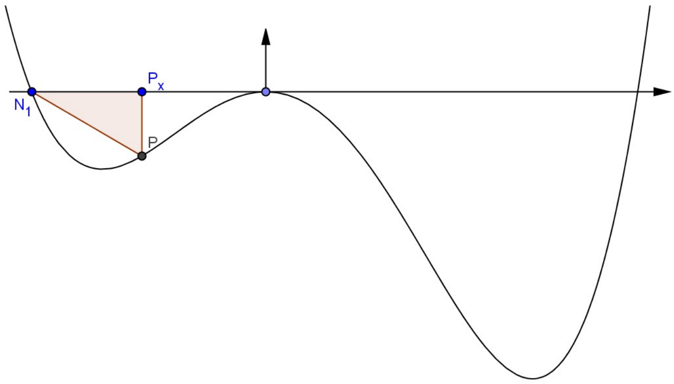
   (b) Mittels Integralrechnung (→ 8. Klasse) lässt sich zeigen, dass $\mathcal{G}$ einen Flächeninhalt von $\frac{9765625}{4}$ aufweist. Zeige, dass das Dreieck aus (a) ziemlich genau $\frac{7}{18}$ des Flächeninhalts von $\mathcal{G}$ einnimmt. Liegt der exakte Bruchteil darüber oder darunter?



7. In der oberen Figur ist der Graph Γ_f der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 + 2x^3 - 99x^2$ zusammen mit seiner kleinsten Nullstelle N_1 abgebildet. Dem von Γ_f und der $x-$Achse zwischen der linken und der mittleren Nullstelle begrenzten Gebiet $\mathcal{G}$ soll wie in der Figur illustriert das flächeninhaltsgrößte Dreieck einbeschrieben werden.

   (a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte P_x und P des gesuchten optimalen Dreiecks ΔPP_xN_1!

   (b) Mittels Integralrechnung (→ 8. Klasse) lässt sich zeigen, dass $\mathcal{G}$ einen Flächeninhalt von $\frac{190333}{10}$ aufweist. Zeige, dass das Dreieck aus (a) ca. 35% des Flächeninhalts von $\mathcal{G}$ einnimmt!



8. In der oberen Figur ist der Graph Γ_f der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 10x^3 - 459x^2$ zusammen mit seiner kleinsten Nullstelle N_1 abgebildet. Dem von Γ_f und der $x-$Achse zwischen der linken und der mittleren Nullstelle begrenzten Gebiet $\mathcal{G}$ soll wie in der Figur illustriert das flächeninhaltsgrößte Dreieck einbeschrieben werden.

   (a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte P_x und P des gesuchten optimalen Dreiecks ΔPP_xN_1!

   (b) Mittels Integralrechnung ($\rightarrow$ 8. Klasse) lässt sich zeigen, dass $\mathcal{G}$ einen Flächeninhalt von $\frac{2589151}{10}$ aufweist. Zeige, dass das Dreieck aus (a) knapp $\frac{3}{8}$ des Flächeninhalts von $\mathcal{G}$ einnimmt!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im März 2012. Dr. Robert Resel, eh.