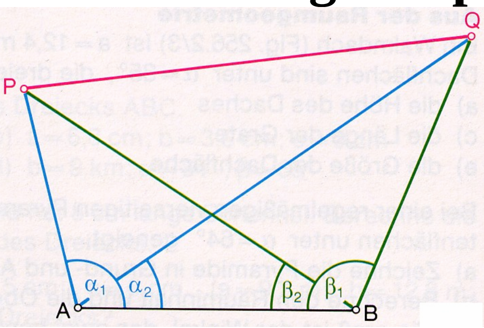
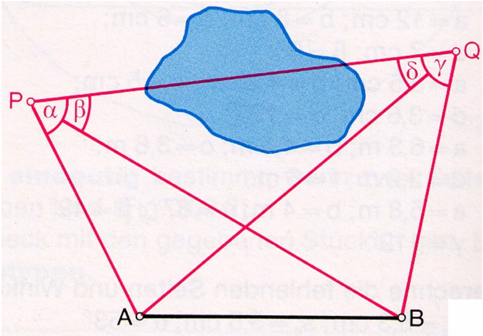
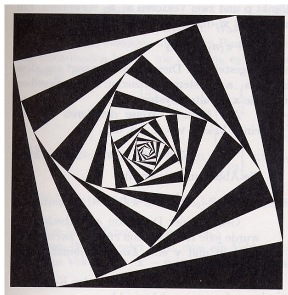
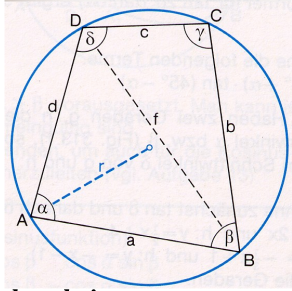
Übungsbeispiele für die 3. Schularbeit (zweistündig)

(5A, Gymnasium, 2009/10)





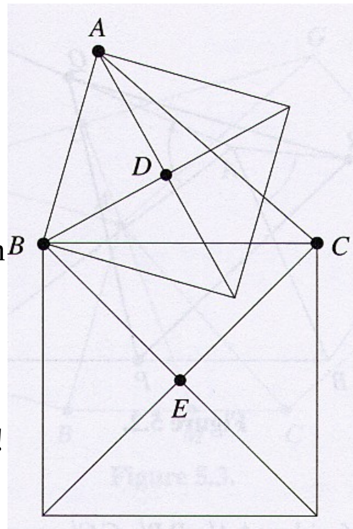




*Diese Beispiele sollen durch jene für die Trigonometrie sowie für das damit verbundene Zwischenstück der Analytischen Geometrie relevanten Grundaufgaben [Definition von Sinus und Cosinus über Determinante und Skalarprodukt, Summensätze (nur zum "Kennenlernen"!), Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck, Trigonometrie und Analytische Geometrie (***Vektor-Winkel-Formel***), Sinus und Cosinus im allgemeinen Dreieck (Sinus- und Cosinussatz), Vermessungsaufgaben] führen, die du bei der dritten Schularbeit **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen.*

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

ANALYTISCHE GEOMETRIE 1: GEMISCHTES MIT UND OHNE TRIGONOMETRIE (Fortsetzung der ersten >28 Aufgaben!) …



1) **Schularbeitsbeispiel der 5E vom 14. 3. 2008:**
Werden den Seiten AB und BC eines beliebigen Dreiecks ΔABC wie aus nebenstehender Figur deutlich ersichtlich Quadrate mit den Mittelpunkten D und E aufgesetzt, so gilt stets folgender

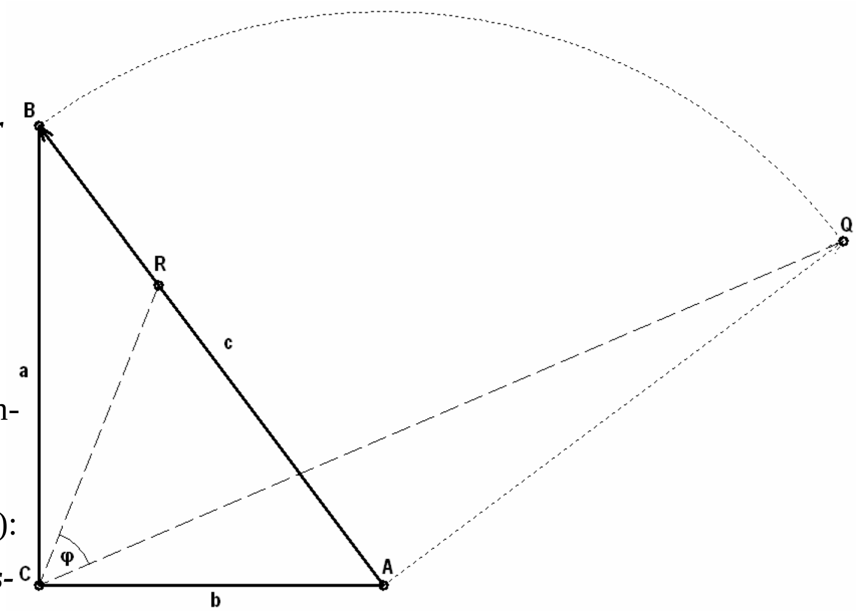
SATZ. Das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Geraden g_{AC} und g_{DE} bleibt unabhängig von der Form des Dreiecks ΔABC immer gleich groß, sodass stets $\boxed{\overline{DE} = \overline{AC} \cdot \cos\varphi}$ gilt.

Bestätige diesen Lehrsatz für das Dreieck ΔABC[A(2|8), B(0|0), C(8|0)] und berechne auch das Maß von φ!

2) **Schularbeitsbeispiel der 5E vom 30. 5. 2008:**
Ein Satz der Elementargeometrie besagt:
In jedem Dreieck schneiden einander die Winkelsymmetrale eines Winkels und die Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Dreieckseite in einem Punkt des Umkreises k_U.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)] anhand der Winkelsymmetrale w_α (und damit automatisch der Streckensymmetrale m_{BC})!
Verwende dazu die Parameterdarstellung und fertige eine ordentliche Skizze an!
Schreibe in Symbolform an, wie du nachweist, dass der Schnittpunkt auf k_U liegt!

3) **Aus einer Nachtragsschularbeit der 5E vom 4. 4. 2008:**

In nebenstehender Abbildung geht der Punkt Q durch eine 90°-Drehung von B um A im Uhrzeigersinn hervor. R ist jener Punkt auf der Hypotenuse AB, für den das Abstandsverhältnis $\overline{BR}:\overline{RA}=a^2:[b\cdot(a+2b)]$ ***gilt.***



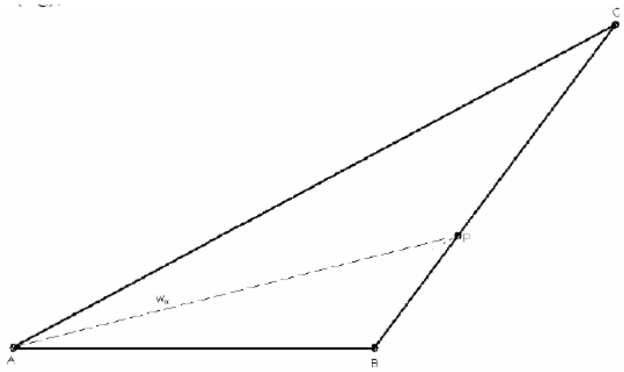
Verifiziere anhand des konkreten rechtwinkligen Dreiecks $\Delta ABC[A(69|0), B(0|92), C(0|0)]$ für den Punkt R(24|60) den folgenden Satz der Elementargeometrie (Zeige zunächst, dass R ***obige Voraussetzung*** überhaupt erfüllt!):

SATZ. ***Unter den obigen Voraussetzungen*** ist das Maß des Winkels φ unabhängig von der Form des rechtwinkligen Dreiecks immer gleich groß, sodass stets obige Gleichung gilt,

$$\boxed{F_{\Delta ABC}\cdot\overline{CQ}=\cos\varphi\cdot\left(\tfrac{a^2}{2}+b^2+F_{\Delta ABC}\right)\cdot\overline{CR}}$$

wobei $F_{\Delta ABC}$ den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC bezeichnet.

4) Ist P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α mit der Seite BC im Dreieck ΔABC, dann gilt unter Verwendung der Bezeichnungen $w=\overline{AP},\ u=\overline{PC},\ v=\overline{BP},\ b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Gleichung $\boxed{w^2=(b+u)\cdot(c-v)}$.



Verifiziere diesen Satz am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(117|0), C(195|104)]!

Zusatz: Verifiziere ebenso am vorliegenden Beispiel die Gültigkeit der Formel $\boxed{w=H(b,c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$!

(Dabei bezeichnet H(b,c) das harmonische Mittel der Zahlen – in diesem Fall: Dreieckseitenlängen – b und c.)

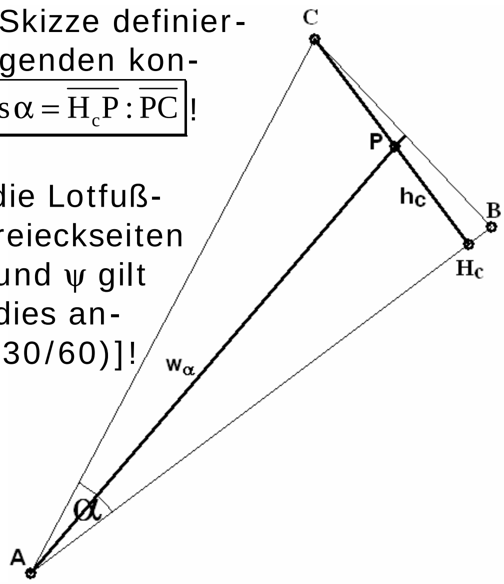
5) *Ist P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α eines Dreiecks ΔABC mit der Seite BC, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sowie (wie üblich)* $a=\overline{BC},\ b=\overline{AC}$ sowie $c=\overline{AB}$*, dann gilt* $\overline{IP}=\dfrac{2abc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{(a+b+c)\cdot(b+c)}$*. Verifiziere dies für das konkrete ΔABC[A(0/0), B(252/0), C(72/135)]!*

6) Lassen sich die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC in der Form $a=2k+1$, $b=k+2$ und $c=k+1$ mit $k>0$ darstellen, dann verläuft die Gerade durch den Inkreismittelpunkt und den Schwerpunkt des Dreiecks normal zur kürzesten Dreiecksseite. Verifiziere diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0/0), B(19/0), C(-16/12)]$, wobei zunächst die Voraussetzungen zu überprüfen sind (durch Berechnung von k) und der Schwerpunkt ohne Schwerpunktformel (außer für die Probe) zu ermitteln ist!

7) In jedem Dreieck gilt folgender
$\boxed{\text{SATZ.}}$ Der Normalabstand d des Höhenfußpunkts H_c von der Trägergerade g_{AC} der Seite AC läßt sich (wobei – wie üblich! – $\overline{AC}=b$ sowie $\sphericalangle CAB=\alpha$ gilt!) durch die Formel $\boxed{d=\frac{b\cdot\sin(2\alpha)}{2}}$ berechnen.
Kontrolliere diesen Satz durch Anwendung der HESSEschen Abstandsformel für das Dreieck $\Delta ABC[A(-10|-9), B(6|-1), C(-1|3)]$!

Hinweis: Die Formeln $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$ sowie $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ könnten neben der "VW-Formel" durchaus hilfreich sein ... ☺

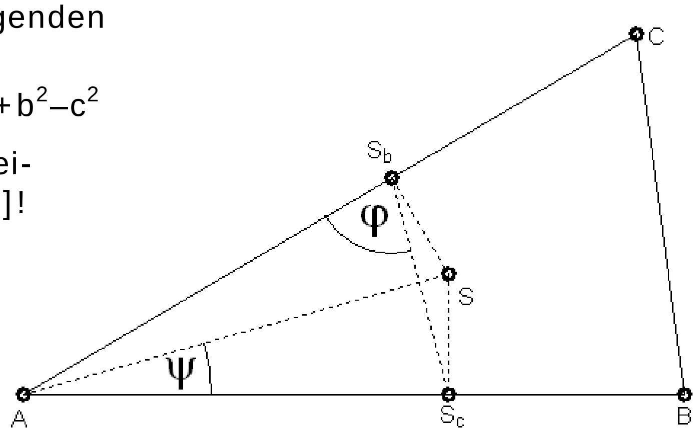
8) Berechne für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(2916|2187), C(1800|3375)]$ die Koordinaten des gemäß der angegebenen Skizze definierten Schnittpunkts P und kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $\boxed{\cos\alpha=\overline{H_cP}:\overline{PC}}$!



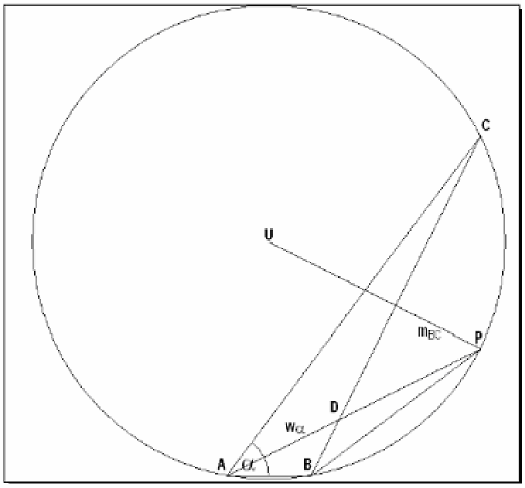
9) In der Abbildung rechts unten sind S_b und S_c die Lotfußpunkte des Dreiecksschwerpunkts S auf die Dreieckseiten AC und AB. Für die eingezeichneten Winkel φ und ψ gilt Dann stets die Beziehung $\varphi+\psi=90°$. Verifiziere dies an-Hand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0/0), B(45/45), C(30/60)]$!

10) In jedem Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ zugehörigen Höhen h_a, h_b und h_c sowie dem Höhenschnittpunkt H gelten die folgenden Identitäten: $2\cdot\overline{AH}\cdot h_a = b^2+c^2-a^2$, $2\cdot\overline{BH}\cdot h_b = a^2+c^2-b^2$, $2\cdot\overline{CH}\cdot h_c = a^2+b^2-c^2$

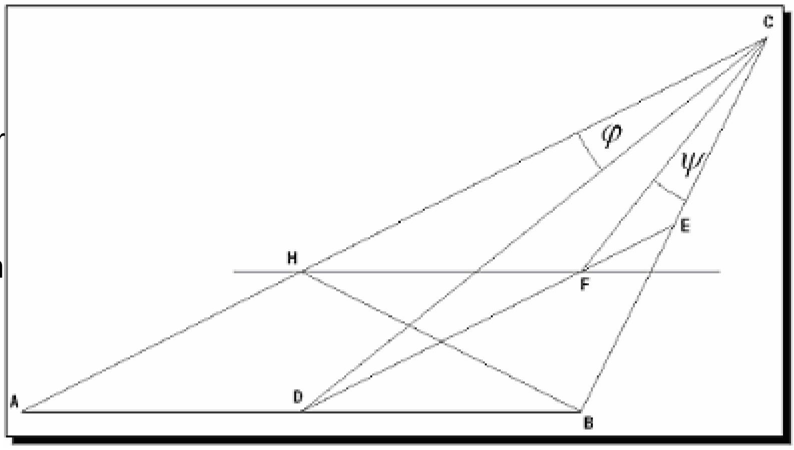
Überprüfe dies für das konkrete Dreieck $\Delta ABC[A(-7/-4), B(8/1), C(4/7)]$!



11) Bezogen auf die nebenstehende Abbildung besagt ein Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass die Winkel ∢ABP und ∢ADC kongruent sind [und ferner – vgl. Aufgabe 2)! –, dass w_α und m_{BC} einander in einem Punkt des Umkreises schneiden!]. Rechne dies am Dreieck ΔABC[A(0|0), B(4|0), C(12|16)] nach! Begründe, warum die Berechnung der Lage von D dazu nicht notwendig ist!



12) Die rechte untere Abbildung illustriert schließlich den folgenden Lehrsatz der Elementargeometrie:
Ist D bzw. E der Mittelpunkt der Seite AB bzw. BC eines Dreiecks ΔABC sowie H jener Punkt auf der Seite AC, welcher von A und B gleich weit entfernt ist und ist ∢HBC ein rechter Winkel, dann ist auch ∢ABF ein rechter Winkel. Ferner sind die Winkel ∢ACD und ∢FCB kongruent (wobei – siehe Abbildung! – F der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch H mit g_{DE} ist!). Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(12|0), C(16|8)]!



13) Zwar nicht in diesen Bereich passend, aber egal:

Nora (die fotografierende Dame in der rechten Abbildung) hat im Euro-Lotto gewonnen und sich einen eigenen See gekauft. Um in diesem See die Entfernung zweier Inselpunkte P und Q zu bestimmen, steckt Tamara (die gestreifte Dame in der rechten Abbildung) eine 4700m lange Standlinie AB ab und misst die folgenden Winkel:
∢PAB=α=110,7°; ∢PBA=β=40,3°; ∢BAQ=γ=32,5°; ∢ABQ=δ=63,1°
Berechne die Entfernung der beiden Inselpunkte P und Q!

TRIGONOMETRIE 1/ANALYTISCHE GEOMETRIE 2: WINKELBERECHNUNGEN IN DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE

14) In jedem Dreieck ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c sind die Winkel $\angle AH_bH_c$, $\angle CH_bH_a$ und $\angle ABC$ kongruent.
Bestätige diesen Satz anhand des Dreiecks ΔABC[A(–22|–17), B(23|–2), C(13|18)]!

15) **Schularbeitsbeispiel A1 der 5D(Rg) vom Fr, den 09. März 2007:**

In jedem spitzwinkligen Dreieck ΔABC mit dem Innenwinkel $\gamma = \angle BCA$, dem Höhenfußpunkt H_c sowie den Seitenhalbierungspunkten M_{AB}, M_{BC} und M_{AC} gilt stets $\boxed{\angle M_{AC}H_cM_{BC} = \angle M_{AC}M_{AB}M_{BC} = \gamma}$.
Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(38|0), C(6|16)]. Berechne dazu auch **das Maß dieses** dreifach auftretenden **Winkels**! ***Fertige eine saubere Skizze an, deren ordentliche Beschriftung (inkl. Koordinatensystem!) den Zusammenhang zur Rechnung deutlich herstellen soll!***

16) In jedem Dreieck ΔABC mit den Innenwinkeln $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle BCA$, dem Umkreisradius r, dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c gilt $\overline{H_aH} \cdot \overline{HA} = \boxed{\overline{H_bH} \cdot \overline{HB} = \overline{H_cH} \cdot \overline{HC} = 4r^2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma}$. Verifiziere diesen Satz für die Höhen h_b und h_c anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-4), B(16|6), C(3|17)]$!

17) Es sei M_{BC} der Mittelpunkt der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_b und H_c. Dann gilt stets $\angle H_cM_{BC}H_b = 180° - 2 \cdot \angle CAB$. Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-12|-11), B(28|9), C(2|31)]$!

18) Im Quadrat $ABCD$ sei M der Mittelpunkt der Strecke AB. n sei die Normale auf g_{CM} durch M, K der Schnittpunkt von n mit der Seite AD. Beweise, dass die Winkel $\angle BCM$ und $\angle KCM$ kongruent sind!

19) Die folgenden beiden Sätze [a) und b)] lassen sich mit dem Lehrsatz von THALES sowie dem Peripheriewinkelsatz sehr einfach beweisen. Hier soll es aber genügen, deren Richtigkeit anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(60|0), C(20|40)]$ zu überprüfen!

Im Dreieck ΔABC sei D der Halbierungspunkt der Seite AB sowie E der Halbierungspunkt der Verbindungsstrecke der Höhenfußpunkte H_a und H_b.

(a) Beweise, dass die Geraden g_{DE} und $h_{H_aH_b}$ aufeinander normal stehen.

(b) Beweise: $\angle DH_aE \cong \angle ACB$

20) Noch einfacher zu beweisen (Alles, was du dazu wissen musst, ist, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck ……° beträgt!), aber hier ebenso nur anhand des Dreiecks aus Aufgabe 14) zu bestätigen:

Im spitzwinkligen Dreieck ABC sei H der Höhenschnittpunkt und U der Umkreismittelpunkt. Zeige: Die Winkel HAB und $\angle$ UAC sind gleich groß.

21) Auch nicht sehr kompliziert zu beweisen (freiwillige Übung!), aber an dieser Stelle lediglich am konkreten Beispiel des Dreiecks DABC[A(0|12), B(0|0), C(5|0)] nachzurechnen:

SATZ. Ist ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AC und der längeren Kathete AB, M jener Punkt auf der Strecke AB mit $\overline{AM} = \overline{BC}$ sowie N jener Punkt auf der Strecke BC (bzw. wenn notwendig: auf ihrer Verlängerung über B hinaus) mit $\overline{CN} = \overline{BM}$, dann ist das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen g_{AN} und g_{CM} unabhängig von der Form des Dreiecks immer gleich groß, sodass stets $\overline{CM} = \overline{AN} \cdot \cos\varphi$ gilt.

22) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(-20|-100), B(69|-11), C(-59|69)]$ die Maße der Innenwinkel!

23) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(250|-200), B(341|-18), C(-362|191)]$ die Maße der Innenwinkel!

24) Aus einem Kurswettbewerb für Anfänger:

Verbindet man den Ursprung O eines Koordinatensystems mit den Punkten P(1/1), Q(2/1) und R(3/1), so schließen die Strecken OP, OQ und OR mit der positiven x-Achse drei Winkel ein, deren Summe 90° ist. Dies ist zu beweisen!

DIES LÄSZT SICH IN DER TAT OHNE ZUHILFENAHME WEDER DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE NOCH DER TRIGONOMETRIE GANZ ELEMENTAR MIT SPIEGELUNGEN UND DEM PLS BEWEISEN!

Dennoch wollen wir BEIDE DISZIPLINEN bemühen, um diese Aufgabe auf ZWEI ARTEN zu lösen!

25) Zum Entspannen etwas Elementares ohne über den rechten Winkel hinausgehende Winkel:

In einem spitzwinkligen Dreieck werden über zwei Seiten NACH AUSSEN Quadrate errichtet. Beweise oder verifiziere anhand eines einfachen Beispiels [A(0|0), B(6…|0), …]:

a) Die Mittelpunkte der Quadrate und der Mittelpunkt der **verbleibenden Dreieckseite** bilden dann stets ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

b) Die Verbindungsstrecke der Schwerpunkte der beiden Dreiecke verläuft zur **verbleibenden Dreieckseite** normal und ist $\frac{1}{6}$ mal so so lang als **diese**.

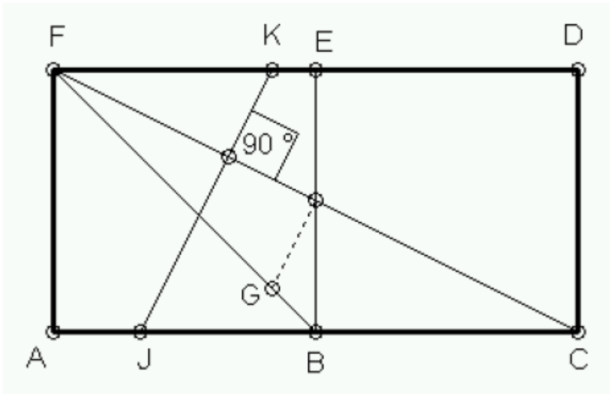
Zusätzliche Fragestellungen zu Aufgabe 25):

(1) Behalten die Sätze aus a) und b) ihre Gültigkeit, wenn man die Quadrate NACH INNEN errichtet?

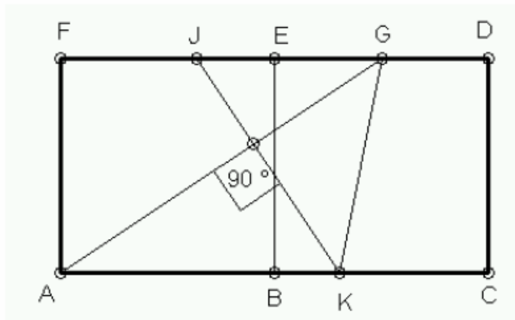
(2) Illustriere beide Situationen anhand eines geeigneten (ausreichend großen!) Dreiecks (händisch oder mit EUKLID!) und stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lagebeziehung der nunmehr insgesamt drei involvierten Schwerpunkte auf!

(3) Versuche, diese Vermutung zu beweisen oder sie zumindest durch Rechnung an einem konkreten Beispiel zu verifizieren!

26) ABEF und BCDE sind benachbarte Quadrate mit Seitenlänge 6 (vgl. Abbildung!). G ist jener Punkt auf der Diagonale BF, welcher von C und F gleich weit entfernt ist. K ist der Schnittpunkt der Normalen auf die Diagonale CF durch J mit der Strecke EF, wobei J so auf AB liegt, dass AJ=1 gilt. Berechne das Maß des Winkels $\angle KAG$!



27) ABEF und BCDE sind benachbarte Quadrate mit Seitenlänge 30 (vgl. Abbildung!). G ist der Mittelpunkt der Strecke DE, J jener Punkt auf der Seite EF mit JE=11, K der Schnittpunkt der Normalen auf AG durch J mit der Strecke BC. Berechne das Maß des Winkels $\angle AGK$!



28) Gegeben sind das Quadrat $ABCD[A(0|0),\ B(35|0),\ C(x_C|y_C > 0),\ D]$ und der Punkt P auf der Seite AD mit $\overline{AP} = 14$ (Skizze!).

(a) Ermittle die Koordinaten jenes Punkts Q auf der Seite CD, für den der Umfang des Dreiecks ΔPQD halb so groß ist wie der Umfang des Quadrats.

(b) Berechne das Maß des Winkel $\varphi = \angle PBQ$!