§7. Approximation von Funktionen: TAYLOR-Polynome (Aufgaben 142 bis 168)

142) Approximiere $\sqrt{2}$ durch ein Taylor-Polynom zweiten Grades. Wähle dabei $x_0=1{,}96$ (Warum?) und $\Delta x=0{,}04$ (Why?)!

143) Approximiere $\sqrt{26}$ durch ein Taylor-Polynom zweiten Grades.
Überlege dir selbst [vgl. Aufgabe 1)!] geeignete Werte für x_0 und Δx!
Beachte (hypothetische Situation!): Erhältst du wie Bino (wie man sieht, gilt auch für ihn "Cogito ergo sum"!) bei der Präsentation d/s/einer Lösung den (an und für sich nicht falschen!) rationalen Näherungswert $\frac{5099}{1000}$, so lautet der Kommentar deines matheprof(.at)s dennoch: Es geht vi(iii!)el genauer! L/☺

144) Ermittle $\sqrt{24}$ näherungsweise durch

a) lineare Approximation ($\Delta x = 0{,}01$),

b) quadratische Approximation ($\Delta x = 0{,}1$)

und erkläre, warum die lineare Approximation eine ***bessere(!!)*** Näherung liefert als die quadratische Approximation!

145) Bestimme eine rationale Näherung von $\sqrt{17}$ unter Verwendung eines Taylorpolynoms zweiten Grades, wobei Δx möglichst klein, aber ganzzahlig sein soll!

146) Berechne unter Verwendung eines Taylorpolynoms zweiter Ordnung eine Approximation von $\sqrt{66}$ in Form einer Bruchzahl. Wähle dazu das betragskleinste ganzzahlige Δx!

147) Für $\sqrt{35}$ ist die bestmögliche rationale Approximation zu ermitteln, welche durch ein quadratisches Taylor-Polynom erzielt werden kann, wenn Δx dennoch ganzzahlig sein soll.

148) $\sqrt{97}$ ist durch eine rationale Zahl anzunähern, wozu ein geeignetes Taylor-Polynom heranzuziehen ist, dessen Graph den Graphen der Wurzelfunktion oskulieren soll. Dabei soll die Approximation trotz Verwendung eines ganzzahligen Δx dennoch möglichst genau sein!

149) Mittels quadratischer Approximation (bei ganzzahligem Δx) ist ein möglichst guter rationaler Näherungswert für $\sqrt[3]{25}$ zu erzeugen.

150) $\sqrt[3]{65}$ soll unter Verwendung eines Taylor-Polynom zweiten Grades (mit ganzzahligem Δx) möglichst gut rational approximiert werden.

151) Es ist für $\sqrt[3]{128}$ eine rationale Näherung zu bestimmen, welche durch Einsatz eines Taylor-Polynoms zweiter Ordnung trotz Verwendung eines ganzzahligen Δx möglichst genau sein soll.

152) $\sqrt[3]{345}$ ist durch eine rationale Zahl anzunähern, wozu ein geeignetes Taylor-Polynom heranzuziehen ist, dessen Graph den Graphen der Wurzelfunktion oskulieren soll. Dabei soll die Approximation trotz Verwendung eines ganzzahligen Δx dennoch möglichst genau sein!

153) Mittels quadratischer Approximation (bei ganzzahligem Δx) ist ein möglichst guter rationaler Näherungswert für $\sqrt[3]{7}$ zu erzeugen.

154) $\sqrt[3]{220}$ soll unter Verwendung eines Taylor-Polynom zweiten Grades (mit ganzzahligem Δx) möglichst gut rational approximiert werden.

155) 

"KANA-Kegel" sind Kegel mit sehr kleinem Öffnungswinkel α (im Bogenmaß gemessen!), für welche der ältere KANA-Bruder (siehe Abbildung links) bei vorgegebener Erzeugendenlänge s die näherungsweise Volumsformel $\boxed{V \approx s^3\pi \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot \alpha^2 - \frac{1}{27} \cdot \alpha^4\right)}$ abgeleitet hat, und zwar durch quadratische bzw. kubische Approximation der Cosinus- bzw. Sinusfunktion. Sein Adjutant "Marv" hat jedoch beim Abtippen einen Fehler eingebaut. Korrigiere diesen Fehler!

156) 

Unter "KERNschen Kugelkalotten" (kurz: KKK) wollen wir im Folgenden Kugelkalotten verstehen, deren zum entsprechenden Kugelsektor zugehöriger im Bogenmaß gemessener Öffnungswinkel α sehr klein ist. N. KERN (die Realistin, nicht die Gymnasiastin; siehe Foto links!) hat für das Volumen V von KKKen mit dem Radius r der erzeugenden Kugel die Näherungsformel $\boxed{V \approx r^3\pi \cdot \left(\alpha^2 + \frac{1}{3} \cdot \alpha^3\right)}$ hergeleitet, wobei sie dazu die quadratische Approximation der Cosinusfunktion verwendet hat. Leider enthält die Formel einen auf ihre Freundin "Lady Di" zurückzuführenden Tippfehler. Bitte um Korrektur!

157) 

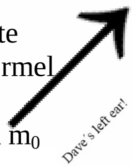
Einem gleichschenkligen Dreieck (Schenkellänge s, Öffnungswinkel α an der Spitze im Bogenmaß) wird ein koaxiales Parabelsegment berühend einbeschrieben, dessen erzeugende Sehne mit der Basis des Dreiecks zusammenfällt. Gilt für kleine Winkel α die Näherungsformel

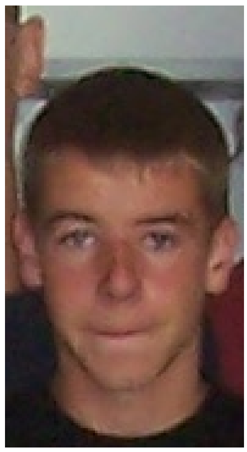
$$\mathcal{A} \approx s^2 \left(\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{36}\alpha^3\right)$$

für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ jenes Bereichs, welche die Schenkel des Dreiecks und der Parabelbogen begrenzen? Oder hat der *creator* dieser Formel (Abbildung links) sich bei der PP (Nein, steht nicht für Psychologie und Philosophie, sondern für die dieser Konfiguration innewohnende "Portisch-Parabel"! ☺) nicht doch verrechnet?[1]

158) Um seine im Schwingungskapitel in der 6. Klasse in Physik bislang schlechteste Zeugnisnote zu kompensieren, schickt sich unser Ali G. an, aus der exakten Formel $\boxed{E_{kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-x^2}} - m_0 \cdot c^2}$ für die kinetische Energie E_{kin} eines Körpers [wobei m_0 dessen Ruhemasse, v seine Geschwindigkeit, c die Lichtgeschwindigkeit und x das Verhältnis v:c (womit – sic! – x<1 gilt!) bezeichnet] für kleine Werte von v durch quadratische Approximation die bekannte Näherungsformel $\boxed{E_{kin} \approx \frac{m_0 \cdot v^2}{2}}$ herzuleiten.

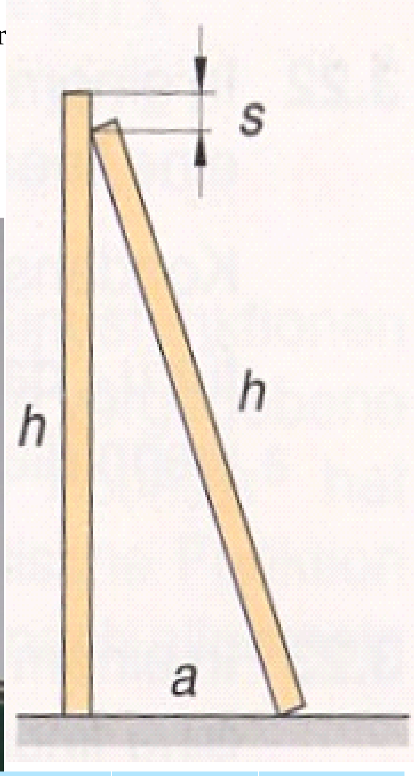
Mach es wie Ali G., press´ die Lippen zusammen und geh´ ans Werk! ☺





[1]: Notice, that even Steven [☺] makes mistakes

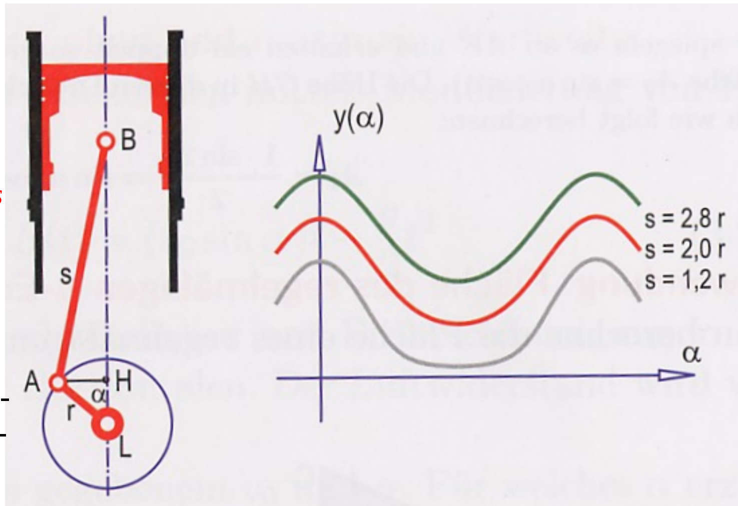
159) In nebenstehender Abbildung ist illustriert, wie sich der Pfeiler einer Brücke der Höhe h seitlich um die Streckenlänge a verschiebt. DSF steht nun im Folgenden nicht für das Deutsche Sportfernsehen, sondern für Daves Senkungsformel, welche näherungsweise (durch quadratische Approximation) die Senkung s der Brücke in Abhängigkeit von a und h angibt.



DSF: $\boxed{s \approx \frac{a^2}{h}}$

Anmerkung: Die Approximation des Kreises k mit der Gleichung k: $x^2+(y-r)^2=r^2$ durch ein quadratisches Taylor-Polynom im Ursprung führt auf das gleiche Problem (→ **siehe File "Abstecken eines Kreisbogens"!**) und zeigt einerseits einmal mehr die Gültigkeit der Scheitelkrümmungskreiskonstruktion für die Parabel (nur jetzt in anderer Richtung!) und andererseits die immense Relevanz der Taylor-Polynome in der Praxis!

160) In nebenstehender Abbildung ist das Wirkungsprinzip des für den Otto-Motor maßgeblichen *Schubkurbelgetriebes* illustriert und ferner die Länge y der vom Kolbenbolzen B bis zur Kurbelwelle L reichenden Strecke als Funktion des Winkels α für verschiedene Werte der Proportion s:r dargestellt.



a) Verifiziere oder kritisiere Dianas exakte Formel $\overline{LB} = y(\alpha) = r\cos\alpha + \sqrt{s^2 - r^2\sin^2\alpha}$!

b) Ebenso mit Dianas durch quadratische Approximation erhaltene Näherungsformel $\boxed{y(\alpha) \approx r+s-\frac{r}{2s}\cdot(r+s)\cdot\alpha^2}$.

161) Im überübernächsten Paragraphen (§10. Stetige Zufallsvariable, Teil 2: Eine spezielle Dichtefunktion - Die Normalverteilung) werden wir u.a. vor das Problem gestellt, das **äußerst schwierig zu berechnende nebenstehende Integral** (welches im herkömmlichen Sinn - d.h. vermöge einer Stammfunktion "in geschlossener Form" - gar überhaupt nicht "berechenbar" ist!) zu bestimmen, was hier aufgrund der zweiten Klammerbemerkung nach einer geeigneten Substitution durch eine MACLAURIN-Approximation elfter Ordnung der involvierten Exponentialfunktion erfolgen soll.

$$\boxed{\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx}$$

162) Vorgegeben ist die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{x}{x^2 + ax + b}, \quad \text{wobei} \quad a \neq 0 \ \wedge \ b \neq 0.$$

Approximiere f an der Stelle 0 durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades p_2 und zeige, dass der Graph von p_2 den Graphen von f noch in einem weiteren Punkt schneidet, welcher auf der Geraden mit der Gleichung $a^2x - b^2y = 0$ liegt oder begnüge dich mit einer Verifikation am konkreten Beispiel (a|b)=(1|2)!

163) a) Approximiere die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{x}{x^3 + x + 2}$$ durch ihr MACLAURIN-Polynom 2. Grades!

b) Zeige, dass Γ_f den Graph des MACLAURIN-Polynoms ferner im gemeinsamen Hochpunkt *berührt*! Begründe zunächst anhand der Art der Berührung im Ursprung, warum eine Berührung in einem anderen gemeinsamen Punkt überhaupt noch möglich ist!

164) Vorgegeben ist die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{x}{x^4 + 4x + 12}\ .$$

Approximiere f an der Stelle 0 durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades p_2 und zeige, dass der Graph von p_2 den Graphen von f in einem weiteren Punkt P berührt und schließlich in einem anderen Punkt Q schneidet!

165) Vorgegeben ist die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{x}{x^5 + 27x + 108}\ .$$

Approximiere f an der Stelle 0 durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades p_2 und zeige, dass der Graph von p_2 den Graphen von f in einem weiteren Punkt P berührt!

166) Gegeben ist die rationale Funktion f_a mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f_a(x) = \frac{1}{x^3 + ax^2 + 6a^3}}$.

a) Approximiere f an der Stelle 0 durch ein Taylorpolynom zweiten Grades p_2!

b) Zeige, dass Γ_f und Γ_{p_2} noch zwei weitere gemeinsame Punkte haben und berechne deren Koordinaten!

167) Gegeben ist die rationale Funktion f_a mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f_a(x) = \frac{1}{x^5 + 2x^2 + 6}}$.

a) Approximiere f an der Stelle 0 durch ein Taylorpolynom zweiten Grades p_2! Ermittle die Art der Berührung und ziehe daraus deine Conclusio!

b) Zeige, dass Γ_f und Γ_{p_2} noch zwei weitere gemeinsame Punkte (einen Berührungspunkt erster Ordnung und einen gewöhnlichen Schnittpunkt) haben und berechne deren Koordinaten!

168) a) Approximiere die rationale Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{3x^2 + 9x + 1}{x^3}$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch ein TAYLOR-Polynom zweiten Grades p_2.

b) Zeige, dass die Graphen von f und von p_2 noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben, in dem sie einander sogar berühren. Von welcher Ordnung ist diese Berührung?

Lösungen der Aufgaben zu §7 (TAYLOR-Polynome zwecks Funktionsapproximation)

142) $\frac{19403}{13720} = 1{,}41421282...$

$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$

143) $\frac{54111203}{10612080}$

144) a) $\frac{4801}{980} = 4{,}89897959...$

b) $\frac{4899}{1000} = 4{,}899$

$\sqrt{24} = 4{,}89897948...$

145) $\frac{2111}{512} = 4{,}12304687...$

$\sqrt{17} = 4{,}12310562...$

146) $\frac{8319}{1024} = 8{,}12402343...$

$\sqrt{66} = 8{,}12403840...$

147) $\frac{10223}{1728} = 5{,}91608796...$

$\sqrt{35} = 5{,}91607978...$

148) $\frac{78791}{8000} = 9{,}848875$

$\sqrt{97} = 9{,}84885780...$

149) $\frac{6395}{2187} = 2{,}92409693...$

$\sqrt[3]{25} = 2{,}92401773...$

150) $\frac{37055}{9216} = 4{,}02072482...$

$\sqrt[3]{65} = 4{,}02072575...$

151) $\frac{15749}{3125} = 5{,}03968$

$\sqrt[3]{128} = 5{,}039684...$

152) $\frac{1060895}{151263} = 7{,}01357899...$

$\sqrt[3]{345} = 7{,}01357908...$

153) $\frac{551}{288} = 1{,}91319444...$

$\sqrt[3]{7} = 1{,}91293118...$

154) $\frac{26405}{4374} = 6{,}03680841...$

$\sqrt[3]{220} = 6{,}03681073...$

164) $P\left(2\middle|\frac{1}{18}\right), Q\left(-1\middle|-\frac{1}{9}\right)$

165) $T\left(3\middle|\frac{1}{144}\right)$

166) $P\left(-3a\middle|y_P\right), Q\left(2a\middle|y_Q\right)$

167) $T\left(1\middle|\frac{1}{9}\right), S\left(-2\middle|-\frac{1}{18}\right)$

168) $T\left(-\frac{1}{6}\middle|90\right)$, gewöhnliche (sic!) Berührung