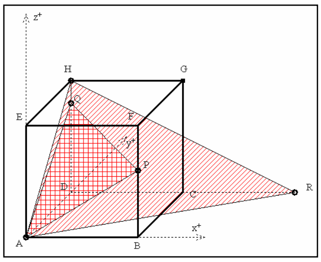
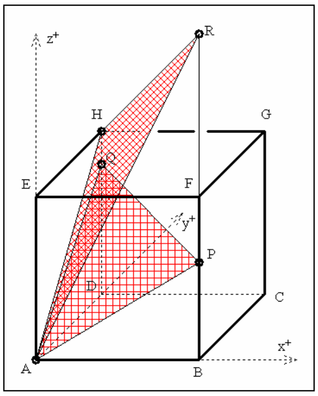
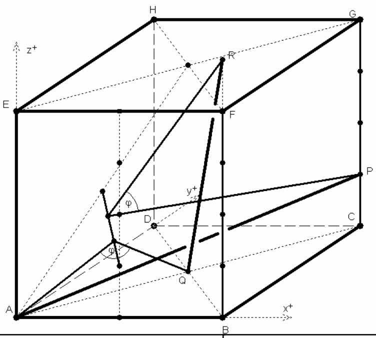
Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit (zweistündig)

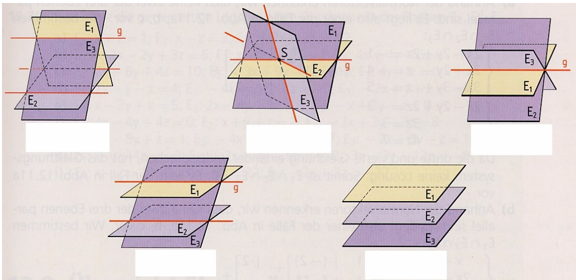
(6X, Realgymnasium, 2008/09)

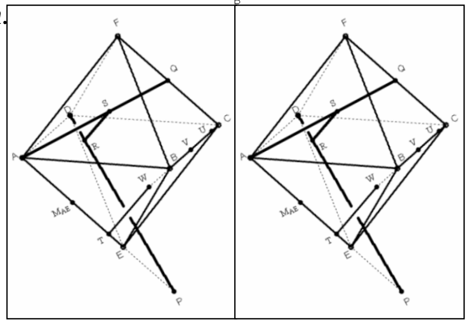




*Diese Beispiele sollen durch jene für den zweiten Teil der Analytischen Raumgeometrie relevanten Grundaufgaben [Treffnormalenbestimmung windschiefer Geradenpaare, Schnitt(gerade) zweier Ebenen (Anwendung: Drehung um eine Achse im Raum), Berechnung der Winkelmaße zwischen Ebenen, Volumsberechnung mittels Spatprodukt, Anwendung von letzterem auf das Lösen linearer Gleichungssysteme in drei Variablen (CRAMERsche Regel)] führen, die du bei der 2. Schularbeit **<u>in jedem Fall</u>** unter Beweis stellen wirst müssen.*







ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

ANWENDUNG DER VEKTORRECHNUNG AUF DIE ANALYTISCHE GEOMETRIE

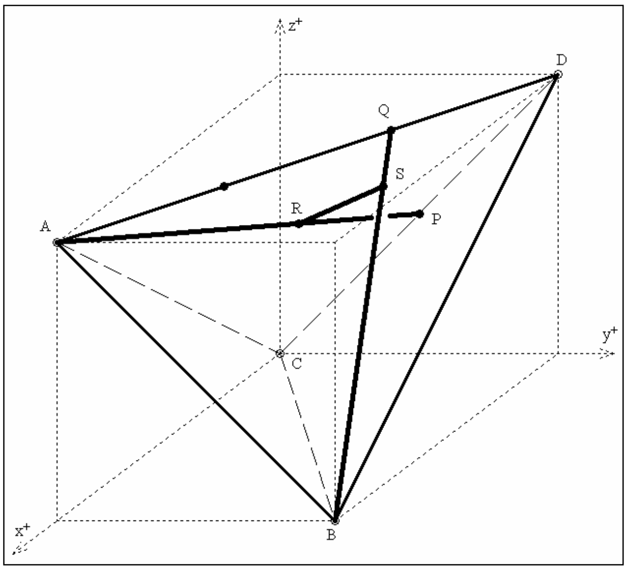
S e i t e n l ä n g e 3
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

1) Ermittle im Würfel ABCDEFGH die **<u>Treffnormale</u>** der Flächendiagonalen AH und BE. In welchem Verhältnis teilen **<u>deren Endpunkte P und Q</u>** diese Diagonalen? Zeige, dass n parallel zu einer Raumdiagonale (Länge d) des Würfels verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{PQ}:\mathrm{d}$!
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
Welche Raumdiagonale?

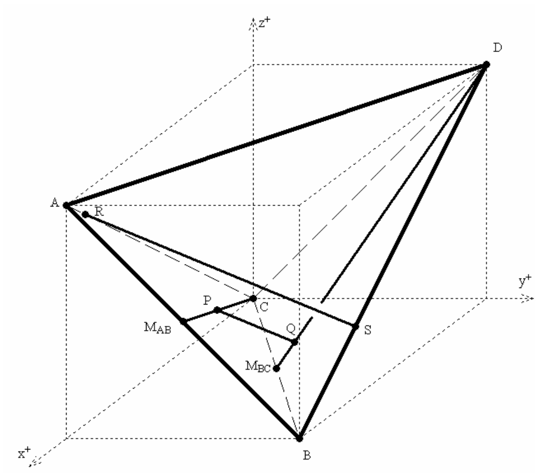
2) Das in nebenstehender Abbildung illustrierte regelmäßige Tetraeder ist aus einem Würfel der Seitenlänge 42 abzuleiten, wobei zum Lösen der folgenden Aufgaben das bereits eingezeichnete Koordinatensystem zu verwenden ist. Q entsteht wie abgebildet durch Drittelung der Tetraederkante AD, P ist der Mittelpunkt der Tetraederkante CD.

   a) Zeige, dass g_{AP} und g_{BQ} aufeinander normal stehen!

   b) In welchem Verhältnis teilen die Endpunkte R und S der Treffnormale der Strecken AP und BQ die jeweilige Strecke (ikonische oder verbale Antwort!)?



3) In nebenstehend abgebildetem Tetraeder (abzuleiten aus einem Würfel der Kantenlänge 70, wobei das bereits eingezeichnete Koordinatensystem zu verwenden ist!) wurden die Kanten AC und BD jeweils in zehn gleich lange Teile geteilt. R ist von A nach C betrachtet der erste Teilungspunkt, S ist von B nach D betrachtet der dritte Teilungspunkt. P und Q bezeichnen die Endpunkte der Treffnormale der Höhen $M_{AB}C$ und $M_{BC}D$.

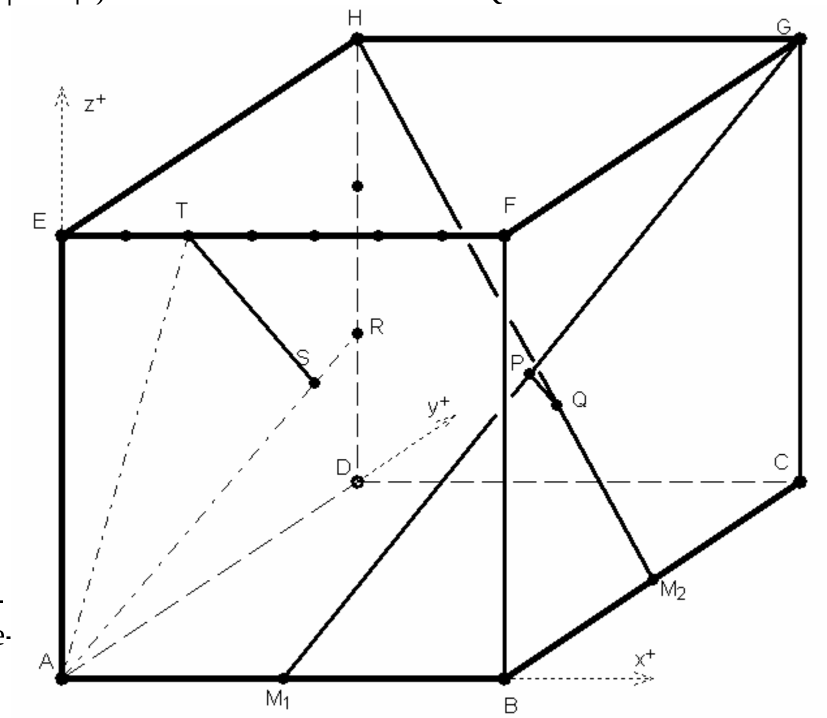


a) In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die Länge der Strecke $M_{AB}C$ bzw. $M_{BC}H$ (ikonische oder verbale Antwort!)?

b) Zeige, dass g_{PQ} parallel zu g_{RS} verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{PQ} : \overline{RS}$!

c) Berechne für den Punkt R(0|–130|6) das Maß des Winkels $\alpha = \angle PQR$!

4) Der nebenstehende Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 130. M_1 und M_2 sind der Abbildung zu entnehmende Kantenmittelpunkte, P und Q sind die Endpunkte der Treffnormale der Strecken M_1G und M_2H. R bzw. T entsteht wie abgebildet durch eine Unterteilung der Kante DH bzw. EF in drei bzw. sieben gleich lange Teile. S liegt auf der Strecke AR derart, dass $\overline{AS} = 6 \cdot \overline{SR}$ gilt. Verwende zum Lösen der folgenden Aufgaben das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!



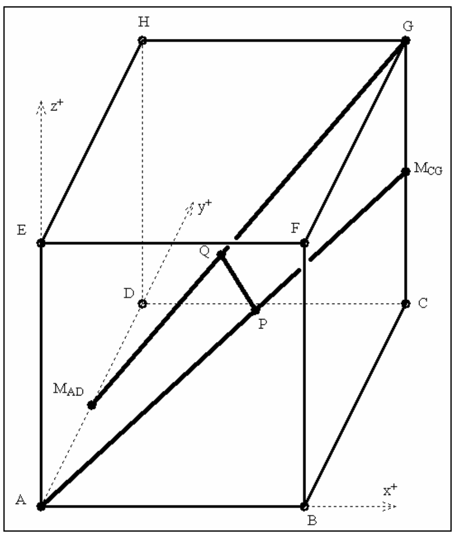
a) In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die Länge der Strecke M_1G bzw. M_2H (ikonische oder verbale Antwort!)?

a) Zeige, dass g_{PQ} parallel zur Gerade g_{TS} verläuft! In welchem Verhältnis stehen die Längen der Strecken PQ und TS zueinander?

c) Berechne für den Punkt R(89|321|42) das Maß des Winkels $\alpha = \angle PQR$!

5) Der in nebenstehender Abbildung illustrierte Würfel hat eine Seitenlänge von 34, die Punkte P und Q bezeichnen die Endpunkte der Treffnormale der Geraden durch A und M_{CG} sowie durch M_{AD} und G.

Verwende zum Lösen der folgenden Aufgaben das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!



a) In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q die jeweilige Strecke (ikonische oder verbale Antwort!)?

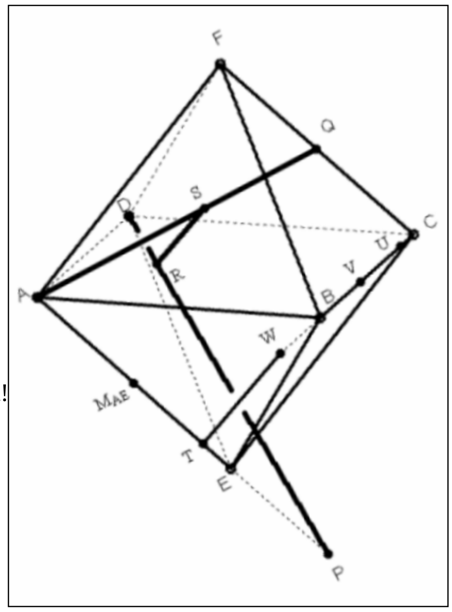
b) Berechne für R(13/19/26) das Maß des Winkels $\alpha = \angle QPR$!

6) Das in nebenstehender Abbildung illustrierte Oktaeder ist aus einem Würfel der Seitenlänge 140 abzuleiten. Q ist der Mittelpunkt der Oktaederkante CF, P entsteht wie abgebildet durch Spiegelung von M_{AE} an E.

a) Zeige, dass g_{AQ} und g_{DP} aufeinander normal stehen!

b) In welchem Verhältnis teilen die Endpunkte R und S der Treffnormale der Strecken AQ und DP die jeweilige Strecke (ikonische oder verbale Antwort!)?

c) T liegt auf der Oktaederkante AE derart, dass $\overline{AT} = 6 \cdot \overline{TE}$ gilt. U liegt auf der Oktaederkante BC derart, dass $\overline{BU} = 6 \cdot \overline{UC}$ gilt. V ist der Mittelpunkt der Strecke BU, W der Spiegelpunkt von V an B. Zeige, dass g_{RS} parallel zu g_{TW} verläuft und ferner $\overline{RS} = \frac{3}{5} \cdot \overline{TW}$ gilt!



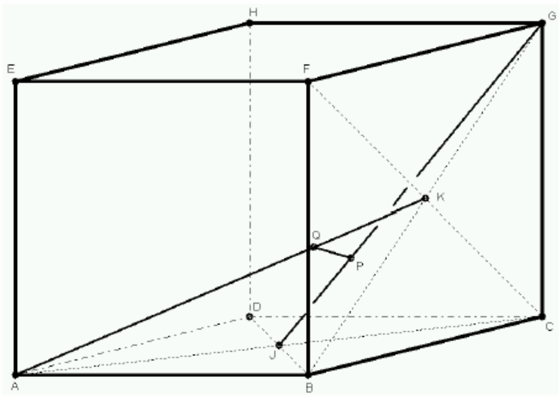
7) **Wie deutlich ersichtlich ein ehemaliges Schularbeitsbeispiel:**

Klasse: 6B(G) **2. Schularbeit (zweistündig)** **09. 01. 2007**

ACHTUNG: Für alle vier Aufgaben sind <u>saubere</u> Skizzen (*Bleistift!*; Freihandskizzen genügen, solange sie <u>sauber</u> sind!) anzufertigen, aus denen das von dir gewählte Koordinatensystem klar ersichtlichlich sein muss! Sonst können deine Rechnungen (die ja in Einklang mit der/n räumlichen Figur/en stehen sollen!) nur bedingt gewertet werden!!

1) In nebenstehend abgebildetem Würfel (passend zum Bezirk: Seitenlänge 22) sind die Strecken AK und GJ (J … Mittelpunkt des Quadrats ABCD, K … Mittelpunkt des Quadrats BCGF) eingezeichnet.

Ermittle die *skizzierte* Treffnormale PQ von AK und GJ (Achtung: *Abmessen gilt nicht, nur Rechnung!* → ***<u>Analytische</u>*** *Raumgeometrie!*). In welchem Verhältnis teilen P und Q die beiden Strecken (Antwort ikonisch oder verbal!)?



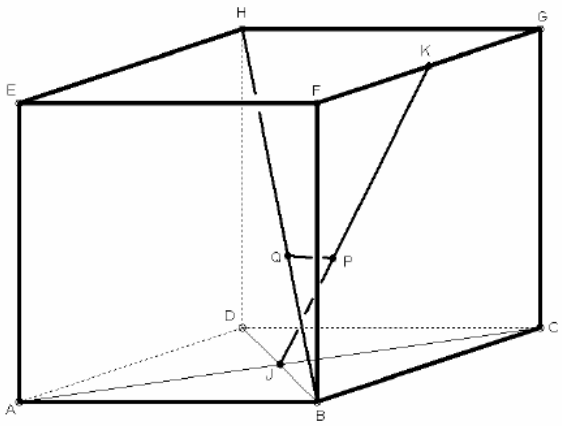
8) **Ebenso leicht erkennbar: ein weiteres ehemaliges Schularbeitsbeispiel:**

Klasse: 6C(Rg) **2. Schularbeit (zweistündig)** **18. 12. 2006**

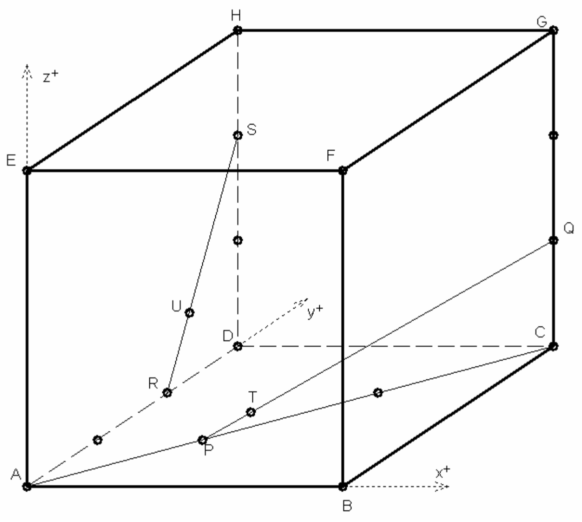
ACHTUNG: Für alle vier Aufgaben sind <u>saubere</u> Skizzen (*Bleistift!*; Freihandskizzen genügen, solange sie <u>sauber</u> sind!) anzufertigen, aus denen das von dir gewählte Koordinatensystem klar ersichtlichlich sein muss! Sonst können deine Rechnungen (die ja in Einklang mit der/n räumlichen Figur/en stehen sollen!) nur bedingt gewertet werden!!

1) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Seitenlänge 28) sind die Raumdiagonale BH sowie die Strecke JK (J … Mittelpunkt des Quadrats ABCD, K … Mittelpunkt der Kante FG) eingezeichnet.

Ermittle die *skizzierte* Treffnormale PQ von BH und JK (Achtung: *Abmessen gilt nicht, nur Rechnung!* → ***<u>Analytische</u>*** *Raumgeometrie!*). In welchem Verhältnis teilen P und Q die beiden Strecken (Antwort ikonisch oder verbal!)?



9) Nebenstehender Würfel hat eine Seitenlänge von 87, bis auf die Punkte T und U sind alle Punkte durch Drittelung entsprechender Strecken entstanden.

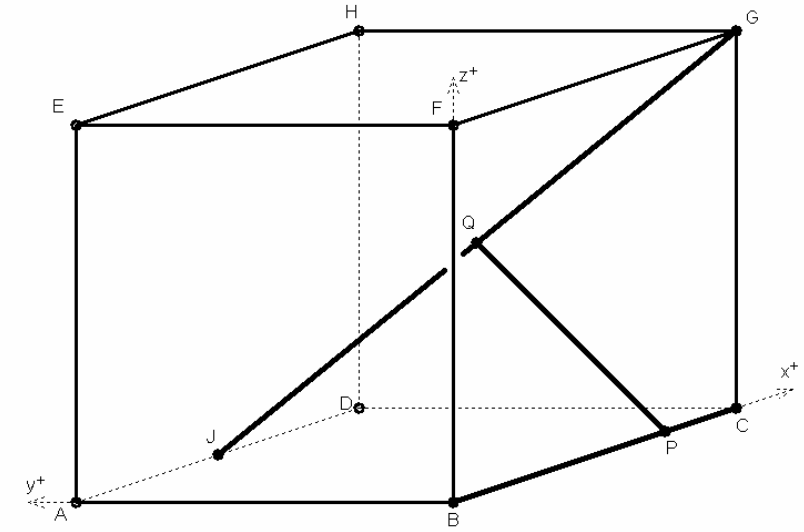


a) Ermittle die Treffnormale der Geraden g_{PQ} und g_{RS} inkl. der Koordinaten der Endpunkte V (auf g_{PQ}) und W (auf g_{RS}). Verwende dazu das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!

b) Berechne für den Punkt N(22|21|169) das Maß des Winkels $\alpha = \angle NVW$!

c) Verifiziere folgende Konstruktion für die Endpunkte V und W der Treffnormale: T ist von P nach Q betrachtet der vierte von 29 Teilungspunkten, U von R nach S betrachtet der neunte von 29 Teilungspunkten. Dann ist V bzw. W der Spiegelpunkt von T an P bzw. von U an R.

10) In nebenstehender Abbildung ist ein Würfel (Kantenlänge 4) zusammen mit einem Kantenmittelpunkt (J) illustriert.



a) Ermittle unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems die Treffnormale der Geraden g_{BC} und g_{GJ}. In welchem Verhältnis teilt P bzw. Q (siehe Abbildung!) die Strecke BC bzw. GJ?

b) Berechne für den Punkt R(19|84|0) das Maß des Winkels $\alpha = \angle QPR$!

11) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_1 und ε_2 [ε_1: $x+9y+3z=33$, ε_2: $x+4y+z=13$].

12) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_1 und ε_2 [ε_1: $3x+y+2z=20$, ε_2: $5x+3y-2z=28$].

13) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgerade s der Ebenen ε_1 und ε_2 [ε_1: $2x+y+3z=38$, ε_2: $4x+3y-5z=-12$].

14) Vom Dreieck ΔABC[A(23|14|–30), B(9|–14|–58), C(–22|17|66)] sind sowohl die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U zu berechnen als auch eine Parameterdarstellung der Drehachse des Umkreises k aufzustellen sowie der Umkreisradius zu berechnen.

15) Vom Dreieck ΔABC[A(29|10|33), B(21|–22|–31), C(–28|34|18)] sind sowohl die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U zu berechnen als auch eine Parameterdarstellung der Drehachse des Umkreises k aufzustellen sowie der Umkreisradius zu berechnen.

16) Vom Dreieck ΔABC[A(46|13|–22), B(26|–17|–82), C(–42|0|71)] sind sowohl die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U zu berechnen als auch eine Parameterdarstellung der Drehachse des Umkreises k aufzustellen sowie der Umkreisradius zu berechnen.

17) Die Kante AB eines Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 6) ist so um eine Achse a zu drehen, dass A mit H und B mit E zur Deckung kommt.

a) Ermittle eine Parameterdarstellung von a und interpretiere das Ergebnis hinsichtlich der inneren Geometrie des Würfels!

b) Berechne die Koordinaten der Mittelpunkte der entsprechenden Bahnkreise sowie den Drehwinkel!

18) Die Kante AB eines Oktaeders ABCDEF (abzuleiten aus einem Würfel der Kantenlänge 12) soll so in die Kante CF gedreht werden, dass A in F und B in C übergeht. Gib die Lage der Drehachse und den zugehörigen Drehwinkel relativ zum Oktaeder an!

19) **Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mo, den 18. Dezember 2006:**

Im Tetraeder ABCD soll die Strecke $M_{AB}C$ so in die Strecke $M_{AC}D$ gedreht werden, dass M_{AB} mit M_{AC} und C mit D zur Deckung kommt. Leite das Tetraeder aus einem Würfel der Seitenlänge 12 ab und bearbeite folgende Aufgaben:

a) Stelle eine Parameterdarstellung der zugehörigen Drehachse d auf (Hinweis: d ist die Schnittgerade der Symmetrieebenen der Strecken $M_{AB}M_{AC}$ und CD)!

b) Berechne für die Drehung von C nach D die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises ***(Skizze!)*** sowie das Maß des Drehwinkels φ und überprüfe, dass M der Schwerpunkt des Dreiecks ΔBCD ist!

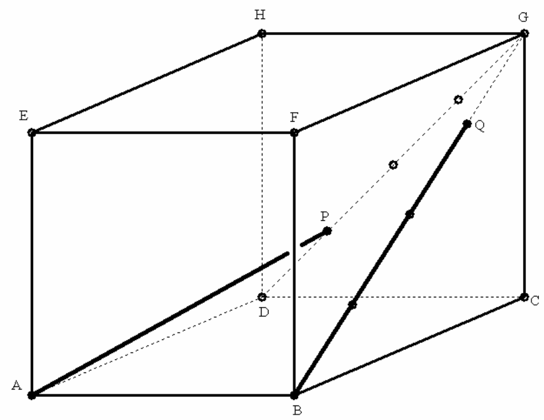
20) **Schularbeitsbeispiel der 6B(G) vom Di, den 09. Jänner 2007:**

Im Tetraeder ABCD soll die Strecke $M_{AB}M_{BC}$ so in die Strecke $M_{AD}D$ gedreht werden, dass M_{AB} mit M_{AD} und M_{BC} mit D zur Deckung kommt. Leite das Tetraeder aus einem Würfel der Seitenlänge 12 ab und bearbeite folgende Aufgaben:

a) Stelle eine Parameterdarstellung der zugehörigen Drehachse d auf (Hinweis: d ist die Schnittgerade der Symmetrieebenen der Strecken $M_{AB}M_{AD}$ und $M_{BC}D$)!

b) Berechne für die Drehung von M_{BC} nach D die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises ***(Skizze!)*** sowie das Maß des Drehwinkels φ und überprüfe, dass M der Mittelpunkt der Tetraederkante BD ist!

21) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 40. Die Flächendiagonalen BG und DG wurden in vier gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die in der Figur entsprechend markierten Teilungspunkte.



a) Zeige, dass die Strecken AP und BQ gleich lang sind.

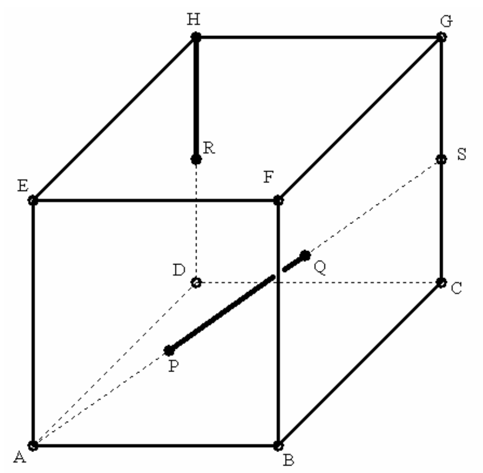
b) Die Strecke AP soll so in die Strecke BQ gedreht werden, dass bei der Drehung A in B und P in Q übergeht. Ermittle eine Parameterdar

c) Berechne für die Drehung von P nach Q die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

d) Berechne für die Drehung von A nach B die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

e) Zeige, dass der in c) und d) berechnete Drehwinkel φ gleich dem stumpfen Schnittwinkel zwischen den Ebenen $\varepsilon_{ABC(D)}$ und ε_{BER} im Würfel ABCDEFGH (o.B.d.A.: Seitenlänge 1) ist, wobei R der Spiegelpunkt von F an G ist!

22) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 24. R bzw. S ist der Mittelpunkt der Würfelkante DH bzw. CG. Die Strecke AS wurde in drei gleich lange Teile geteilt, PQ ist der "Mittelteil" (siehe nebenstehende Figur!).



a) Zeige, dass die Strecken PQ und RH gleich lang sind.

b) Die Strecke PQ soll so in die Strecke RH gedreht werden, dass bei der Drehung P in H und Q in R übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.

c) Berechne für die Drehung von Q nach R die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

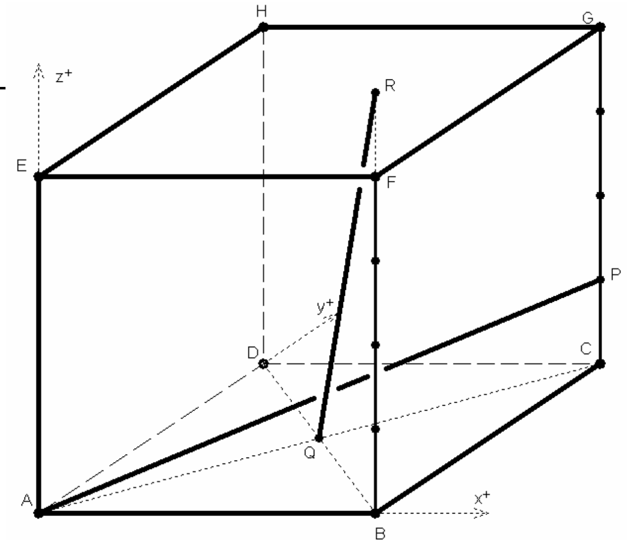
23) Der in obiger Figur abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 168. R bzw. S ist der Mittelpunkt der Würfelkante DH bzw. CG. Die Strecke AS wurde in drei gleich lange Teile geteilt, PQ ist der "Mitteltei l" (siehe obige Figur!).

a) Zeige, dass die Strecken PQ und RH gleich lang sind.

b) Die Strecke PQ soll so in die Strecke RH gedreht werden, dass bei der Drehung P in H und Q in R übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.

c) Berechne für die Drehung von P nach H die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

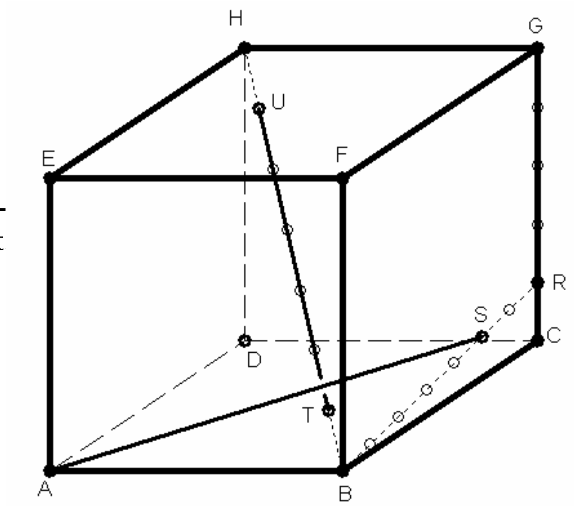
24) In nebenstehendem Würfel (Seitenlänge 12) sind die Punkte P, Q und R durch fortlaufende Halbierung entstanden.



a) Zeige, dass die Strecken AP und QR gleich lang sind.

b) Nun soll AP so in QR gedreht werden, dass A in Q und P in R übergeht. Stelle eine Parameterdarstellung der zugehörigen Drehachse d auf, berechne die Koordinaten der entsprechenden Mittelpunkte der Bankreisbögen und ermittle das Maß des Drehwinkels φ!

25) Der in untenstehender Figur abgebildete Würfel hat eine Seitenlänge von 91. Die Kante CG wird in fünf gleich lange Teile geteilt, woraus R hervorgeht. Dann wird die Strecke BR in sieben gleich lange Teile geteilt, woraus S hervorgeht. Schließlich wird die Raumdiagonale BH in sieben gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte T und U hervorgehen.



a) Zeige, dass die Strecken AS und TU gleich lang sind.

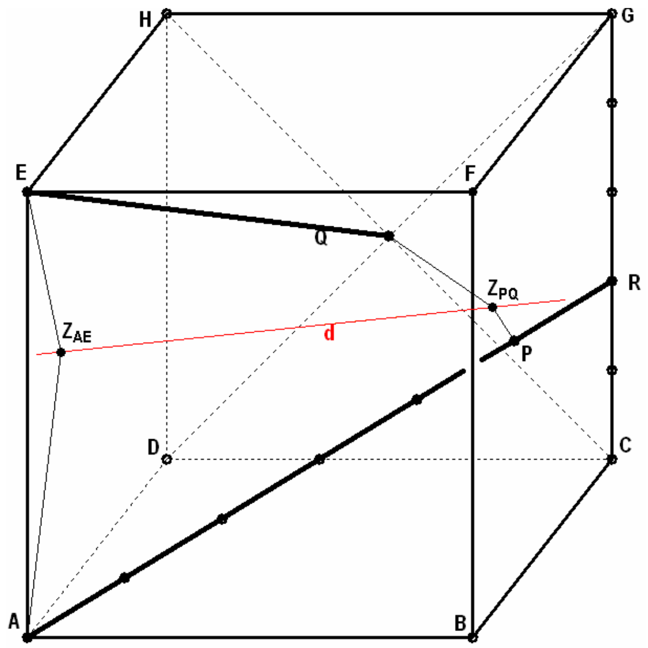
b) Die Strecke AS soll so in die Strecke TU gedreht werden, dass bei der Drehung A in T und S in U übergeht Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.

c) Berechne für die Drehung von A nach T die Koordinaten des Mittelpunkts M des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

d) Berechne für die Drehung von S nach U die Koordinaten des Mittelpunkts M´ des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ.

e) Zeige, dass der in c) und d) berechnete Drehwinkel φ gleich dem Winkel ∠MLN im Dreieck ΔLMN[L(x|9|0), M(3|y|8), N(7|1|z)] ist, welches in der Ebene ε_{IJK}[I(–1|27|15), J(7|34|40), K(8|6|9)] liegt!

26) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel hat eine Seitenlänge von 330. Die Kante CG wird in fünf gleich lange Teile geteilt, woraus R hervorgeht. Dann wird die Strecke AR in sechs gleich lange Teile geteilt, woraus P hervorgeht. Schließlich wird E mit dem Mittelpunkt Q des Quadrats DCGH verbunden.



a) Zeige, dass die Strecken AP und EQ gleich lang sind.

b) Die Strecke AP soll so in die Strecke EQ gedreht werden, dass bei der Drehung A in E und P in Q übergeht. Ermittle eine Parameterdarstellung der Drehachse d.

c) Berechne für die Drehung von A nach E die Koordinaten des Mittelpunkts Z_{AE} des zugehörigen Bahnkreises sowie das Maß des Drehwinkels φ. Kontrolliere, dass $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$ gilt!

d) Analog zu c) für die Drehung von S nach U!

e) Berechne die zu den beiden Bahnkreisen aus c) und d) zugehörigen Radien und zeige, dass sie sich wie $\sqrt{6}:1$ verhalten!

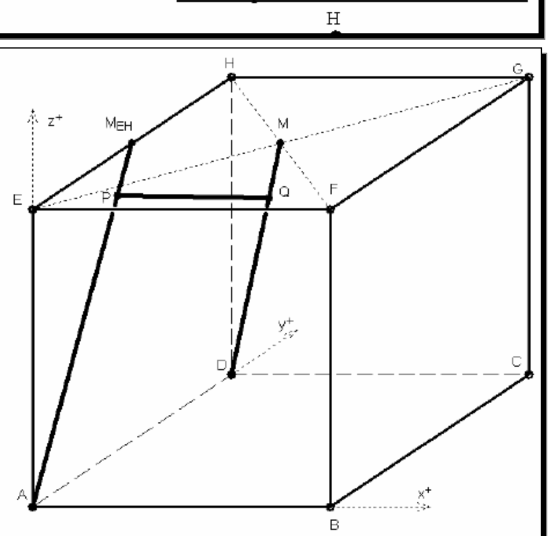
27) und 28): **<u>… aus einer vorjährigen Schularbeit …</u>**

Klasse: 6D(Rg) **2. Schularbeit (zweistündig, Gr. A)** **20. 12. 2007**

ACHTUNG: Für die Aufgabe 1 ist eine <u>saubere</u> Skizze (*Bleistift!*; Freihandskizze genügt, solange sie <u>sauber</u> ist!) anzufertigen, aus der das von dir gewählte Koordinatensystem klar ersichtlich sein muss! Sonst können deine Rechnungen (die ja in Einklang mit der räumlichen Figur stehen sollen!) nur bedingt gewertet werden!! **<u>Schnittoperationen sind anzuschreiben!</u>**

Aufgabe 27

2) Der nebenstehende Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 42. P und Q sind die Endpunkte der Treffnormale der Strecken AM_{EH} und DM (vgl. Abbildung!). Verwende zur Lösung der Aufgaben a) und b) das bereits eingezeichnete Koordinatensystem!



a) In welchem Verhältnis teilen die Punkte P und Q die Längen der Strecken AM_{EH} und DM (ikonische oder verbale Antwort!)?

b) Berechne für den Punkt R(4|1|36) das Maß des Winkels $\angle QPR$!

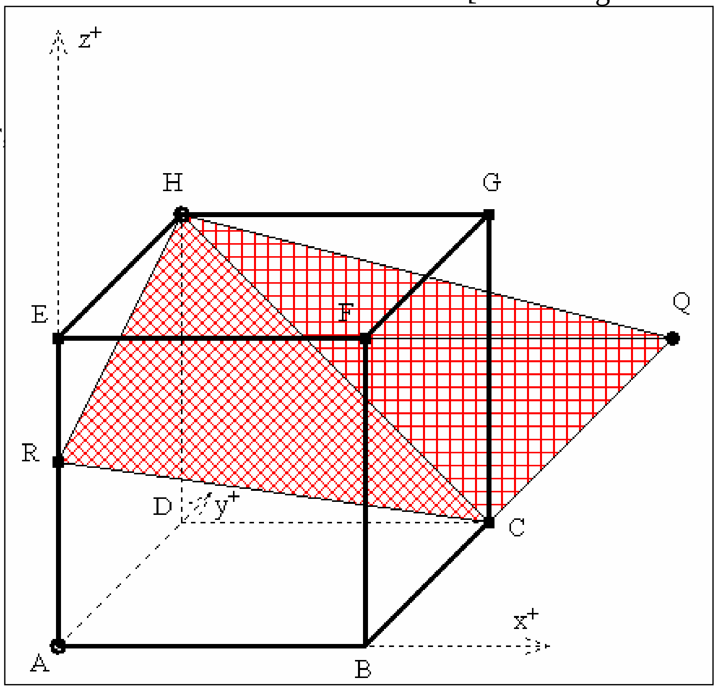
Aufgabe 28

Vom Dreieck $\Delta ABC[A(7|15|-1), B(-9|7|15), C(-2|0|-13)]$ sind die Koordinaten des Umkreismittelpunkts U zu berechnen und anhand aller drei Eckpunkte das Resultat $\boxed{r = 15}$ für den Umkreisradius r zu kontrollieren. (Variante $\sigma_{AB} \cap \sigma_{BC} \cap \ldots$ empfohlen, Radien detailliert berechnen!)

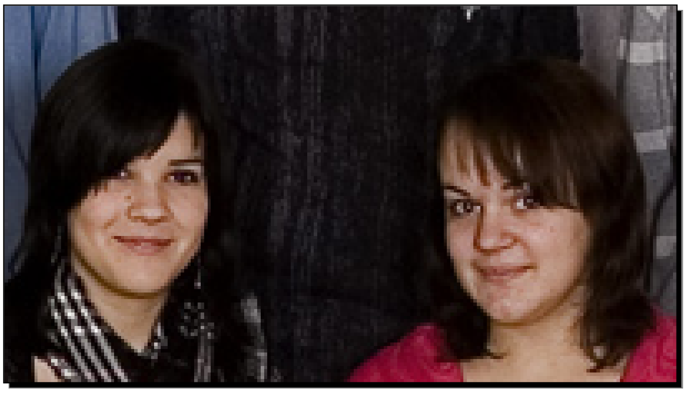
29) Berechne das Maß des Schnittwinkels zweier Tetraederflächen!

30) φ_1 bezeichne den stumpfen Schnittwinkel zweier benachbarter Oktaederflächen [mit einer gemeinsamen (Schnitt-)Kante], φ_2 den spitzen Schnittwinkel zweier gegenüberliegender Oktaederflächen (also ohne gemeinsame Kante). Zeige, dass $\varphi_1+\varphi_2=180°$ gilt, ferner, dass φ_1 dem H-C-H-Bindungswinkel des Methanmoleküls CH_4 entspricht und dass φ_2 dem Schnittwinkel zweier Seitenflächen eines Tetraeders entspricht.

31) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 5cm) liegt R exakt 2cm von E entfernt. Q ist der Spiegelpunkt von E an F. ε_1 (waagrecht und senkrecht schraffiert) bezeichne die Ebene durch C, H und Q, ε_2 (diagonal schraffiert) bezeichne die Ebene durch C, H und R. Berechne unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems den (aufgrund der Abbildung offensichtlich!) stumpfen Schnittwinkel φ zwischen ε_1 und ε_2 und zeige, dass dieser dem Bindungswinkel des Methanmoleküls entspricht!

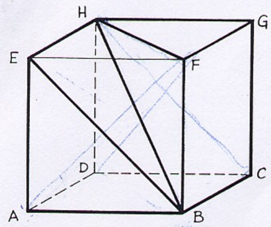


32) Weise die Richtigkeit der Behauptung über den Schnittwinkel in nebenstehendem Jahresberichtsartikel nach, indem du den Würfel (Seitenlänge 1 genügt!) in ein geeignetes Koordinatensystem legst!



33) Im regelmäßigen Tetraeder ABCD spannen der Eckpunkt B, der Kantenmittelpunkt M_{CD} und der Dreieckschwerpunkt $S_{\Delta ACD}$ eine Ebene ε_1 auf. Ist M der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Kantenmittelpunkte M_{BC} und M_{AD} und P der Spiegelpunkt von M an M_{AD}, so spannen auch die Punkte B, D und P eine Ebene ε_2 auf. Alexandra (siehe obere Abbildung rechts!) behauptet, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 45° beträgt. Alena (siehe obere Abbildung links!) ist aber fest davon überzeugt, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 60° beträgt. Hat eine der beiden Damen Recht? Falls ja, welche? **Leite das Tetraeder aus einem Würfel mit der Kantenlänge 6 ab!**

„Kopfgeometrie“



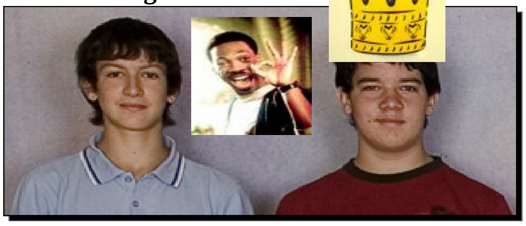
Während der Vorbereitung zur 4. Schularbeit der „Realisten“ der 6A stellte ich den Schülern „zum Aufwärmen“ am Stundenbeginn folgendes Problem (vgl. Skizze): *Gegeben ist ein Würfel, aus dem ein Teil herausgeschnitten wurde. Wie groß ist der Winkel, den die Dreiecke BHE und BHF einschließen?*

Der erwartete Lösungsweg bestand in einer Koordinatisierung der Eckpunkte der Dreiecke und dem Einsatz von Methoden der Vektorrechnung. Während die anderen Schüler mehr oder weniger eifrig zu rechnen begannen, lehnte sich **Jörg Mathe** zurück, starrte nur auf die Tafel und sagte wenig später, ohne etwas gerechnet zu haben: 60°. Richtig! Aber nicht bloß richtig erraten – seine Begründung war kurz und einfach: *Ergänzt man die Dreiecke BHE und BHF zu Rechtecken, so stehen diese Rechtecke BEHC und BFHD normal auf die Flächendiagonalen AF und AC. Diese beiden Normalen schließen 60° ein, da das Dreieck ACF gleichseitig ist. Daher lautet die Lösung der Aufgabe 60° oder 120°. Aufgrund seiner Raumvorstellung schloß Jörg 120° als Lösung aus; also mußte der gesuchte Winkel 60° sein.*

Nicht schlecht, oder?

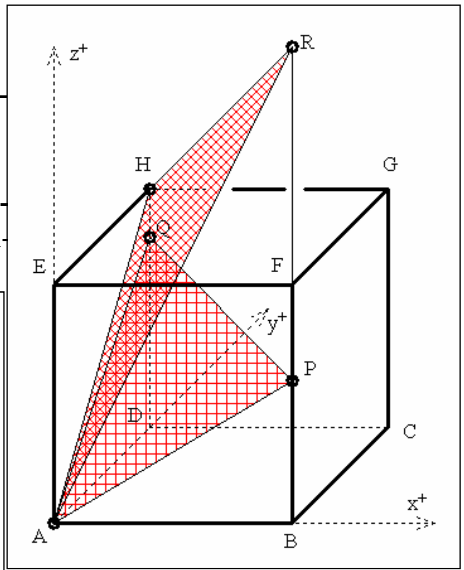
PS: Für besonders Interessierte sei noch kurz ein weiterer Lösungsweg angedeutet, der auch keine Rechnung erfordert: Blickt man in Richtung HB auf den Würfel, so erscheint dieser als regelmäßiges Sechseck und die Dreiecke BHE und BHF als „benachbarte Radien“ dieses Sechsecks.

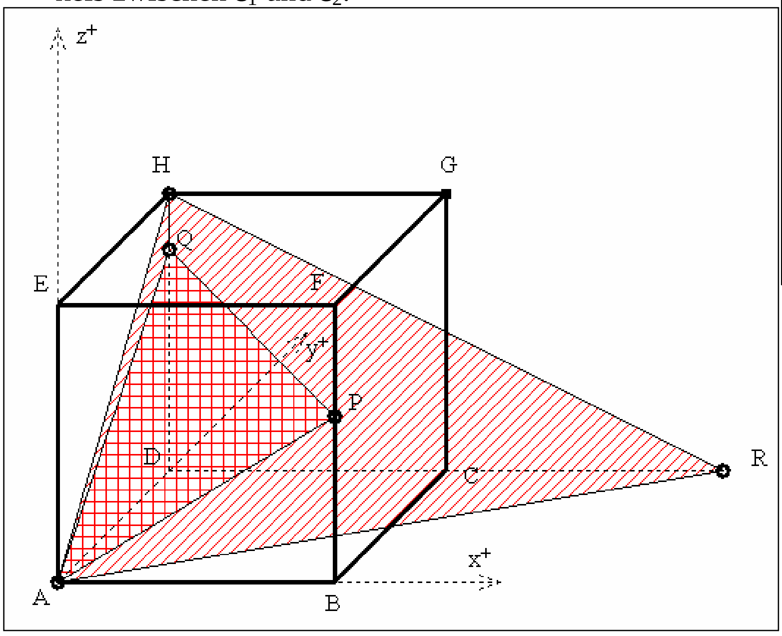
34) Wie Aufgabe 33), wobei die Ebene ε_1 wie in Aufgabe 33) definiert ist und ε_2 durch die Punkte A, D und Q geht. Dabei liegt Q auf der Kante BC derart , dass $\overline{QC} = 3\cdot\overline{BQ}$ gilt. Hanna (rechte Abbildung links) behauptet, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 30° beträgt. Nadja (rechte Abbildung rechts!) ist aber fest davon überzeugt, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 60° beträgt. Hat einer der beiden Damen Recht? Falls ja, welche? **Leite das Tetraeder aus einem Würfel mit der Kantenlänge 12 ab!**



35) Wie Aufgabe 33), wobei die Ebene ε_1 wie in Aufgabe 33) definiert ist und ε_2 durch die Punkte A, C und S geht. Dabei kommt S folgendermaßen zustande: Die Kante AB werde in acht gleich lange Teile geteilt, R sei von A nach B betrachtet der dritte Teilungspunkt. Nun werde die Strecke DR in drei Teile geteilt und diese Unterteilung über R hinaus fortgesetzt, S sei von D aus betrachtet der achte Teilungspunkt. Mr. Foley (obere Abbildung links) behauptet, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 30° beträgt. Mr. King (obere Abbildung rechts!) ist aber fest davon überzeugt, dass der spitze Schnittwinkel zwischen ε_1 und ε_2 45° beträgt. Hat einer der beiden Herren Recht? Falls ja, welcher? **Leite das Tetraeder aus einem Würfel mit der Kantenlänge 24 ab!**

36) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 5cm) liegt P exakt 2cm von F und Q exakt 1cm von H entfernt. R ist der Spiegelpunkt von B an F. ε_1 (waagrecht und senkrecht schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, P und Q, ε_2 (diagonal schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, H und R. Berechne unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ε_1 und ε_2.





37) In nebenstehend abgebildetem Würfel (Kantenlänge 5cm) liegt P exakt 2cm von F und Q exakt 1cm von H entfernt. R ist der Spiegelpunkt von D an C. ε_1 (waagrecht und senkrecht schraffiert) bezeichne die Ebene durch A, P und Q, ε_2 (von links unten nach rechts oben schraffiert und teilweise durch ε_1 verdeckt) bezeichne die Ebene durch A, H und R. Berechne unter Verwendung des bereits eingezeichneten Koordinatensystems das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen ε_1 und ε_2.

38) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mo, den 18. Dezember 2006:</u>**

Im Oktaeder ABCDEF sei S sei der Schwerpunkt des Begrenzungsdreiecks ΔCDF. Leite das Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge 6 ab und bearbeite folgende Aufgaben:

a) Berechne das Maß des Winkels $\angle ASB$! Welches besondere Dreieck ist das Dreieck ΔASB? Begründe deine Antwort!

b) Berechne den spitzen Schnittwinkel zwischen den Trägerebenen der Dreiecke ΔAEB und ΔASB!

c) *Chance auf **<u>sechs(!)</u>** Zusatzpunkte: Zeige, dass der in 3b) berechnete Winkel mit dem Schnittwinkel zweier Tetraederflächen übereinstimmt* $\boxed{\textbf{\textit{(Skizze mit Koordinatensystem!)}}}$*!*

39) **Schularbeitsbeispiel der 6B(G) vom Di, den 09. Jänner 2007:**

Im Oktaeder ABCDEF sei S der Schwerpunkt des Begrenzungsdreiecks ΔBCF. Leite das Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge 6 ab und bearbeite folgende Aufgaben:

a) Beweise, dass die Winkel $\angle ASC$ und $\angle DSB$ gleich groß sind (unterschiedliche Bezeichnungen!) und berechne die entsprechende Winkelgröße!

b) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Trägerebenen der Dreiecke ΔASC und ΔDSB!

c) *Chance auf* ***sechs(!)*** *Zusatzpunkte: Zeige, dass der in a) berechnete Winkel mit dem stumpfen Schnittwinkel ψ der Ebenen ε_{ABC} und ε_{ABP} übereinstimmt, wobei P auf der Kante CD des Tetraeders* ***(abzuleiten aus einem Würfel der Seitenlänge 4!)*** *ABCD derart liegt, dass* $\overline{CP} = 3 \cdot \overline{PD}$ *gilt* ***(Skizze mit Koordinatensystem!)****!* ***(Das Oktaeder ist nun "weg"!)***

40) Im Oktaeder ABCDEF (abzuleiten aus einem Würfel der Kantenlänge 6) sei S_1 bzw. S_2 bzw. S_3 bzw. S_4 der Schwerpunkt des Dreiecks ΔCDF bzw. ΔBCF bzw. ΔABF bzw. ΔADF.

a) Zeige, dass die vier Winkel $\angle DS_1B$, $\angle DS_2B$, $\angle DS_3B$ und $\angle DS_4B$ gleich groß sind und berechne dieses gemeinsame Winkelmaß!

b) Zeige, dass die vier Punkte B, S_1, S_2 und D sowie B, S_3, S_4 und D jeweils in einer Ebene liegen und berechne die Winkelmaße zwischen diesen beiden Ebenen!

41) Die Punkte P, Q und R liegen auf den Kanten AB, CG und EH eines Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 6) derart, dass $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{PB}$, $\overline{CQ} = 2 \cdot \overline{QG}$ und $\overline{ER} = 2 \cdot \overline{RH}$ gilt.

a) Welche der beiden Pyramiden PQRD und PQRF ist volumsgrößer (Rechnung!)?
Zeige, dass die Summe ihrer Volumina exakt $37{,}\dot{0}\dot{3}\dot{7}\,\%$ vom Würfelvolumen ausmacht!

Beweise: Genaueres dazu im Jänner 2009!

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

b) Errichtet man über den Seiten des Dreiecks ΔPQR Quadrate, so bilden deren Flächeninhalte eine **arithmetische Folge**.

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

c) Die Ebene ε_{PQR} teilt die Raumdiagonale AG des Würfels im Verhältnis 5 : 4.

In Aufgabe 33 des Geometrieteils der Übungsaufgaben für die 4. Schularbeit [5E(Rg), 2007/08!] findest du eine einfache Erklärung **dieses Begriffs**!

42) Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). Nun werden die Seitenkanten AS, BS und CS jeweils in fünf gleich lange Teile geteilt und sodann (jeweils von einem Basiseckpunkt zur Spitze S weisend) auf AS, BS bzw. CS der erste, zweite bzw. dritte Teilungspunkt P bzw. Q bzw. R markiert.

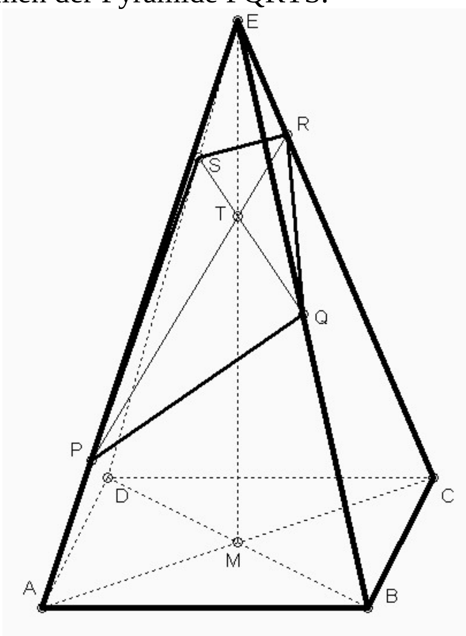
Tip: Wähle für die Basiskantenlänge sowie für die Höhe Vielfache von 50!

a) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt T der Ebene ε_{PQR} mit der Seitenkante DS die Länge ebenjener?

b) Es sei V das Volumen der Pyramide ABCDS und V´das Volumen der Pyramide PQRTS.

Beweise, dass $\frac{V}{6} < V' < \frac{V}{5}$ gilt und gib den exakten Faktor k in V´=k·V sowohl in Prozent als auch als gekürzten Bruch an!

43) Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine gerade rechteckige Pyramide ABCDE (vgl. nebenstehende Abbildung!) errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt.
(Ansatz: **a, b** und **h** durch **40 teilbar**!)
Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S.
Zeige, dass das Volumen des Pyramidenstumpfs ABCDPQRS exakt $\frac{37}{40}$ des gesamten Pyramidenvolumen ausmacht!



44) M_{BC} sei der Mittelpunkt der Basiskante BC, D´ der Mittelpunkt der Seitenkante DS einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). Dann spannen die Punkte A, M_{BC} und D´ eine Ebene ε auf. Bearbeite nun folgende Punkte:
Ansatz: Siehe Tip bei Aufgabe 7) der Übungen zur 1. Schularbeit!

a) Berechne die Lage der Schnittpunkte B´ und C´ von ε mit g_{BS} und g_{CS} und beschreibe sie (ordentliche Skizze!)!

b) Zeige, dass M_{BC} auf der Strecke B´C´ liegt und drücke die genaue Lage durch ein Teilverhältnis aus!

c) In welchem Verhältnis stehen die Volumina der Pyramiden ABCDS und AB´C´D´S?

45) Ausgehend vom Würfel ABCDEGFH (Kantenlänge 2) werden die Kantenmittelpunkte M_{DH}, M_{CG}, M_{FG} sowie M_{EH} gebildet. Beweise, dass für jeden Punkt X auf der Gerade g_{AB} das Volumen der Pyramide $M_{DH}M_{CG}M_{FG}M_{EH}X$ exakt ¼ des Würfelvolumens ausmacht!

46) In der geraden quadratischen Pyramide ABCDT (T wie ″Top″ für die Spitze!) wird der Schwerpunkt S des Dreiecks ΔBCT mit dem Eckpunkt A des Basisquadrats verbunden. Zeige, dass keiner der Winkel zwischen ε_{BCT} und g_{AS} 90° messen kann und berechne ferner den Anteil des Rauminhalts der Pyramide ASDT am Pyramidenvolumen ABCDT!
Tip: Wähle für die Basiskantenlänge ein Vielfaches von 6 und für die Höhe ein Vielfaches von 3!

ANWENDUNG DER VEKTORRECHNUNG AUF LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

47) Beweise: a) $\boxed{\left[\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}a\\d\\g\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b\\e\\h\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}c\\f\\i\end{pmatrix}}$, b) $\boxed{(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}$

48) Vom Dreieck ΔABC [A(12|–8|21), B(0|–26|–15), C(–7|37|13)] sind die Koordinaten des Umkreismittelpunkts sowie der Umkreisradius zu berechnen!

49) Vom Dreieck ΔABC [A(16|41|65), B(–24|–29|105), C(27|22|–99)] sind die Koordinaten des Umkreismittelpunkts sowie der Umkreisradius zu berechnen!

50) Vom Dreieck ΔABC [A(19|24|32), B(–17|–18|68), C(11|–11|–37)] sind die Koordinaten des Umkreismittelpunkts sowie der Umkreisradius zu berechnen!

51) Vom Dreieck ΔABC [A(76|–39|33), B(56|–99|–57), C(–63|105|62)] sind die Koordinaten des Umkreismittelpunkts sowie der Umkreisradius zu berechnen!

52) Von der Pyramide ABCD [A(0|12|–12), B(5|23|0), C(14|0|–16), D(5|12|–13)] sind die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts sowie der Umkugelradius zu berechnen!

53) Von der Pyramide ABCD [A(14|–3|–7), B(4|15|–13), C(–12|–17|11), D(–6|3|15)] sind die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts sowie der Umkugelradius zu berechnen!

54) Von der Pyramide ABCD [A(17|–12|21), B(0|13|31), C(26|–9|9), D(–11|–33|14)] sind die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts sowie der Umkugelradius zu berechnen!

55) Von der Pyramide ABCD [A(–36|–25|0), B(8|–17|48), C(–7|31|–35), D(34|–30|35)] sind die Koordinaten des Umkugelmittelpunkts sowie der Umkugelradius zu berechnen!

56) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (1) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (1)!

$$\left.\begin{cases} x+3y+4z=12\\ 3x+9y+12z=36\\ 7x+21y+28z=48\end{cases}\right\}(1)$$

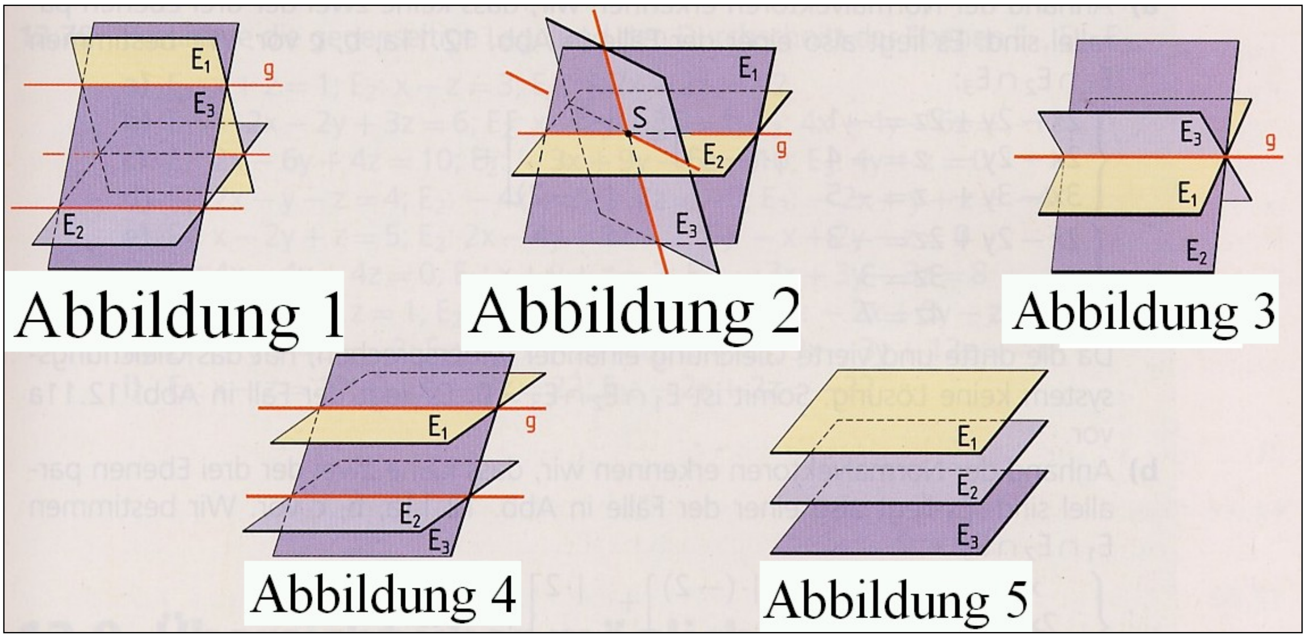


Abbildung 1 Abbildung 2 Abbildung 3 Abbildung 4 Abbildung 5

57) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (2) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (2)!

$$\left.\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ 3x-4y+z=18 \\ x+17y-18z=-49 \end{cases}\right\}(2)$$

58) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (3) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (3)!

$$\left.\begin{cases} 5x-y+7z=16 \\ 3x+2y-6z=-3 \\ 8x+y+z=29 \end{cases}\right\}(3)$$

59) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (4) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (4)!

$$\left.\begin{cases} 4x-y+2z=31 \\ 7x+3y-z=-1 \\ x+14y-13z=-158 \end{cases}\right\}(4)$$

60) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (5) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (5)!

$$\left.\begin{cases} 7x-2y+3z=24 \\ 5x+4y-z=10 \\ x+16y-9z=13 \end{cases}\right\}(5)$$

61) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (6) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (6)!

$$\left.\begin{cases} 3x-4y+2z=2 \\ 2x+y+3z=47 \\ x-7y-2z=-71 \end{cases}\right\}(6)$$

62) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (7) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (7)!

$$\left.\begin{cases} 2x-5y+6z=23 \\ 4x+y+7z=13 \\ 6x-15y+18z=50 \end{cases}\right\}(7)$$

63) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts*), ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (8) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (8)!

$$\left.\begin{cases} x-2y+5z=1 \\ 3x+7y-4z=54 \\ 5x+9y-3z=80 \end{cases}\right\}(8)$$

64) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (9) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (9)!

$$\left.\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 65 \\ x + 6y + z = -5 \\ 4x - 3y + 2z = 66 \end{cases}\right\}(9)$$

65) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (10) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (10)!

$$\left.\begin{cases} 7x - y + 3z = 6 \\ 4x + 2y - 5z = 23 \\ x + 5y - 13z = 30 \end{cases}\right\}(10)$$

66) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (11) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (11)!

$$\left.\begin{cases} 9x - 4y + 2z = 73 \\ x - 5y + 2z = 19 \\ 2x + 8y - 3z = -5 \end{cases}\right\}(11)$$

67) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (12) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (12)!

$$\left.\begin{cases} 2x - 7y + 3z = 84 \\ 5x + 2y - z = -3 \\ x + 16y - 7z = 13 \end{cases}\right\}(12)$$

68) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (13) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (13)!

$$\left.\begin{cases} x + 4y + 2z = -5 \\ 5x + 7y + 6z = 10 \\ 2x - 8y - z = 33 \end{cases}\right\}(13)$$

69) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (14) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (14)!

$$\left.\begin{cases} 5x - 4y + 2z = 47 \\ 3x + y - 7z = -12 \\ x - 11y + 25z = 130 \end{cases}\right\}(14)$$

70) a) Untersuche (wenn notwendig mithilfe des *Spatprodukts)*, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem (15) keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle so vorhanden die Lösungsmenge L von (15)!

$$\left.\begin{cases} 3x - 5y + 2z = 23 \\ x - 8y - 4z = -41 \\ 12x - 20y + 8z = 92 \end{cases}\right\}(15)$$

71) **Schularbeitsbeispiel der 6A(G) vom Fr, den 20. Dezember 2002:**

4) a) Untersuche mit Hilfe des Spatprodukts, ob das nebenstehende lineare Gleichungssystem keines, genau eines oder unendlich viele Lösungstripel (x|y|z) besitzt.

b) Ermittle die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems!

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 5x + 4y + 3z = 25 \\ -3x + 8y + 2z = 92 \end{cases}$$

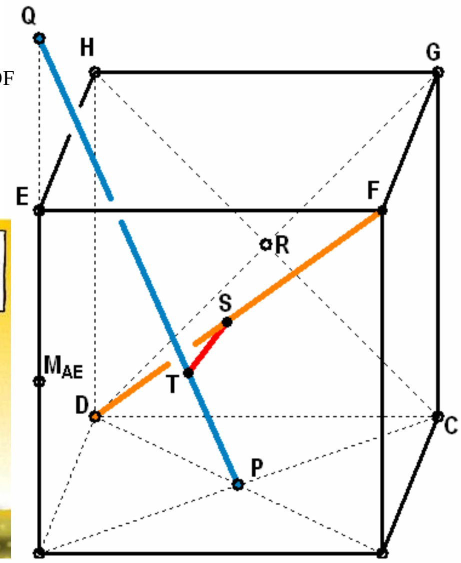
72) **Schularbeitsbeispiel einer Nachtragsschularbeit vom 23. Jänner 2007:**

Im Oktaeder ABCDEF sei P der Mittelpunkt der Oktaederkante BC. Q liegt auf der Symmetrieachse EF derart, dass $\overline{QF} = 17 \cdot \overline{EQ}$ gilt. Leite das Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge 36 ab und bearbeite folgende Aufgaben:

a) Berechne das Maß des Winkels $\angle AQP$!

b) Kontrolliere, dass das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen den Ebenen ε_{AQP} und $\varepsilon_{ABC(D)}$ ziemlich genau 70°25′ beträgt.

73) Im nebenstehenden Würfel (Kantenlänge 24) ist Q der Spiegelpunkt von M_{AE} an E sowie S bzw. T der Endpunkt der Treffnormale von g_{DF} und g_{PQ} auf g_{DF} bzw. g_{PQ}.

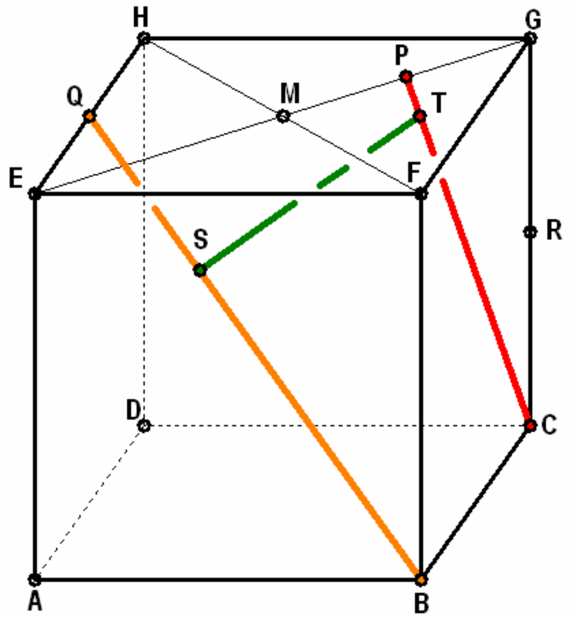


a) In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Länge der Strecke DF bzw. PQ (ikonische oder verbale Antwort!)?

b) Zeige, dass g_{ST} parallel zu g_{AR} verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{ST} : \overline{AR}$!

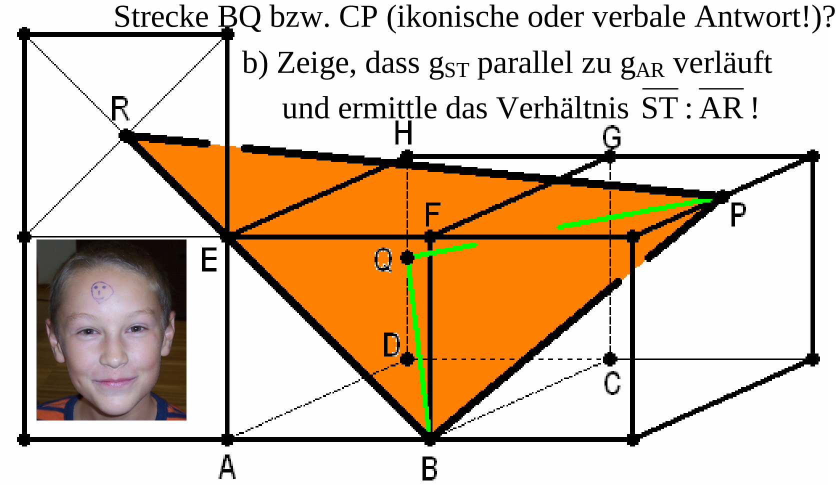
74) ZUM NACHDENKEN …
… und freilich zu bearbeiten:
Warum verdeckt die Gerade g_{PQ} die Gerade g_{DF}, wenn man die Konfiguration aus Aufgabe 73 in Richtung AD (von A nach D) betrachtet?

75) Im nebenstehenden Würfel (Kantenlänge 36) ist P der Mittelpunkt der Strecke GM sowie S bzw. T der Endpunkt der Treffnormale von g_{BQ} und g_{CP} auf g_{BQ} bzw. g_{CP}.

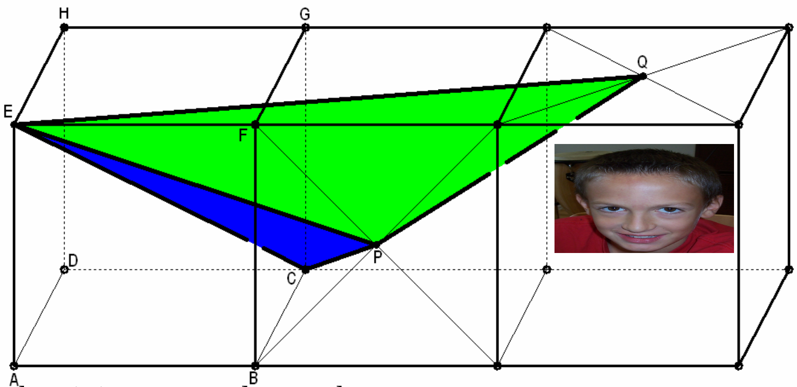


a) In welchem Verhältnis teilt S bzw. T die Länge der Strecke BQ bzw. CP (ikonische oder verbale Antwort!)?

b) Zeige, dass g_{ST} parallel zu g_{AR} verläuft und ermittle das Verhältnis $\overline{ST} : \overline{AR}$!



76) In obig abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 2) sind die Punkte P, Q und R durch Hinzufügen und Halbieren von (weiteren) Würfelkanten und Flächendiagonalen entstanden. Norbert (siehe an die Seite AE angefügtes Quadrat!) hat behauptet, dass der spitze Winkel zwischen den Ebenen ε_{BPR} und ε_{BPQ} 30° misst und bekam für diese falsche Behauptung doch glatt ein "zweites Gesicht" verpasst. ☺ Wie groß ist denn nun tatsächlich das Maß dieses spitzen Schnittwinkels?



77) In nebenstehender Abbildung sind die Punkte P und Q Diagonalenschnittpunkte von Würfeln, welche an den Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 2) angehängt wurden. Mr. Foley versucht uns mit seinem Blick einzureden, dass der Winkel zwischen den Dreiecken(!) ΔCPE und ΔEPQ exakt 120° misst. Beweise oder korrigiere Mr. Foleys Behauptung!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Hinweise zum (lohnenden!) Üben:

- **<u>Folgende 25 Aufgaben</u>** werden sicher in Schulübungen bearbeitet werden: 1, 2, 4, 6, 8, 11, 14, 17, 26, 25, 21e, 29, 30, 33, 37, 47b, 41a, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 48, 52

- **<u>Folgende 20 Aufgaben</u>** werden im Laufe des Novembers und Dezembers als Hausübung aufgegeben: 3, 5, 12, 15, 18, 19, 21abcd, 32, 34, 36, 47a, 59, 60, 71, 49, 53, 73, 75, 76, 77

- **<u>Folgende 35 Aufgaben</u>** sind einzig und allein zum Zweck des eigenständigen Anwendens der bislang gelernten Methoden der Analytischen Raumgeometrie auf diverse geometrische Problemstellungen gedacht und werden (bis auf Einzelfälle in den Übungsstunden vor der Schularbeit) im Unterricht nicht behandelt: 7, 9, 10, 13, 16, 20, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 35, 38, 39, 40, 41bc, 42, 43, 44, 45, 46, 50, 51, 54, 55, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 74

  <u>Fragen dazu in Pausen (die wir ja wohl nicht gemeinsam verbringen werden müssen …..) sind natürlich möglich und (im Rahmen) auch durchaus erwünscht!</u>

Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 2. Schularbeit (zweistündig),

Teil 1 (6X, Realgymnasium, 2008/09)

7) $\overline{JP}:\overline{PG}=3:8$, $\overline{AQ}:\overline{QK}=8:3$

9) a) V(21|21|–4), W(0|49|–18), b) α≈112°

10) a) $\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$, $\overline{JQ}:\overline{QG}=1:1$, b) α≈46°

11) b) α≈76°

(63|–88|0)
oder
↑↑↑↑↑↑
13) z.B.: s: X = (0|11|9) + t·(–7|11|1)
↓↓↓↓↓↓
oder (7|0|8)

16) U(–36|–26|–16), d: X = U + t·(3|–6|2) r = 91

20) d steht normal auf ε_{ABC}, der Drehwinkel beträgt 120°.

23) Resultat von der Wahl des Koordinatensystems abhängig, daher keine Angabe von Koordinaten möglich! Für den Drehwinkel φ gilt $\cos\varphi=-\frac{13}{15}$.

24) Resultat von der Wahl des Koordinatensystems abhängig, daher keine Angabe von Koordinaten möglich! Für den Drehwinkel φ gilt $\cos\varphi=\frac{1}{7}$.

Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 2. Schularbeit (zweistündig),
Teil 2 (6X, Realgymnasium, 2008/09)

35) Keiner der beiden Herren hat Recht. Der gesuchte spitze Schnittwinkel beträgt 60°.

38) a) $\varphi=60°$, ΔASB ist gleichseitig, b) $\alpha \approx 70{,}53°$ (exakt: $\cos^{-1}\frac{1}{3}$) , c) ---

39) a) $\angle ASC = \angle DSB \approx 125{,}26°$ (exakt: $\cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$), b) $\varphi = 60°$, c) ---

40) a) $\angle DS_1B = \angle DS_2B = \angle DS_3B = \angle DS_4B \approx 125{,}26°$ (exakt: $\cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}}$), b) $\varphi = 90°$

41) b) $A_{\text{Quadrat über der Strecke } RQ}=44$, $A_{\text{Quadrat über der Strecke } QP}=56$, $A_{\text{Quadrat über der Strecke } PR}=68$

42) a) Siehe Aufgabe 18a) der Übungen für die 1. Schularbeit! b) 108/625=17,28%

43) Siehe Aufgaben 16 und 17 der Übungen für die 1. Schularbeit!

44) a) Siehe Aufgabe 7a) der Übungen für die 1. Schularbeit!
b) Siehe Aufgabe 7b) der Übungen für die 1. Schularbeit!
c) $V_{PYR\ ABCDS} : V_{PYR\ AB'C'D'S} = 6 : 5$

46) $V_{PYR\ ASDT} : V_{PYR\ ABCDT} = 1 : 3$

50) $U(-7|-21|14)$, $r = 55$

51) $U(-42|3|-36)$, $r = 143$

54) $U(-9|1|-5)$, $r = 39$,

55) $U(10|-3|-1)$, $r = 51$

64) $L=\{(8|-4|11)\}$

65) $L=\{\}$

66) $L=\{(7|-2|1)\}$

67) $L=\{\}$

68) $L=\{(5|-3|1)\}$

69) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 41 \\ 17 \end{pmatrix} \right\}$,

70) $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 14 \\ -19 \end{pmatrix} \right\}$

72) a) 79°

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.