Weitere Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit (einstündig)

5B(Rg), 2011/12

Nächste Aufgabe aus:

Klasse: 5E(Rg) **2. Schularbeit (zweistündig)** **24. 01. 2008**

Nachtragstermin für [redacted]

↑↑↑

D A T E N S C H U T Z !

34) Gegeben ist das Dreieck $\Delta ABC[A(-84|-252), B(12|-124), C(76|132)]$.

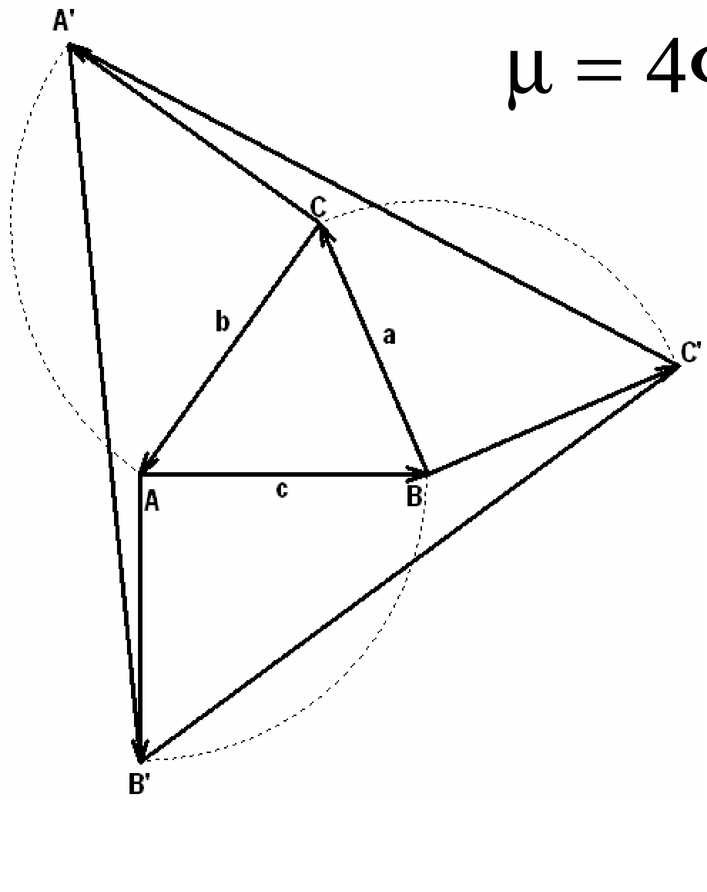
a) Berechne die Koordinaten jenes Punkts P, den man durch Schneiden der Streckensymmetrale m_{AB} mit der Höhe h_b erhält!

b) Berechne die Koordinaten jenes Punkts Q, den man durch Schneiden der Streckensymmetrale m_{AC} mit der Höhe h_c erhält!

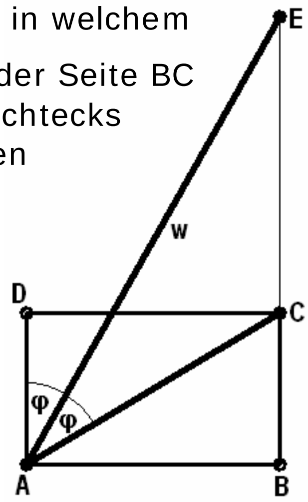
c) Zeige an diesem Beispiel die Gültigkeit des folgenden *Satzes* der Elementargeometrie: *Ist P der Schnittpunkt der Streckensymmetrale m_{AB} mit der Höhe h_b sowie Q der Schnittpunkt der Streckensymmetrale m_{AC} mit der Höhe h_c, dann gilt* $\boxed{\overline{AB} \cdot \overline{AQ} = \overline{AC} \cdot \overline{AP}}$.

35) Werden die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks ΔABC wie in der **unteren Figur** (**samt Beschriftung!**) durch eine 90°-Drehung um einen benachbarten Eckpunkt auf die Punkte A´, B´ und C´ abgebildet, so gilt für den Flächeninhalt μ des Dreiecks $\Delta A'B'C'$ untenstehende Formel, wobei Φ den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC bezeichnet. Bestätige diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(8|0), C(5|7)]$.

$$\mu = 4\Phi + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$



36) In nebenstehender Abbildung ist ein Rechteck ABCD illustriert, in welchem die Winkelsymmetrale w des Winkels ∢DAC die Trägergerade der Seite BC im Punkt E schneidet. Verifiziere am konkreten Beispiel des Rechtecks ABCD[A(–45|–30), B(3|–50), C(18|y), D] den allgemeingültigen Satz, demzufolge das Dreieck ΔACE gleichschenklig ist.



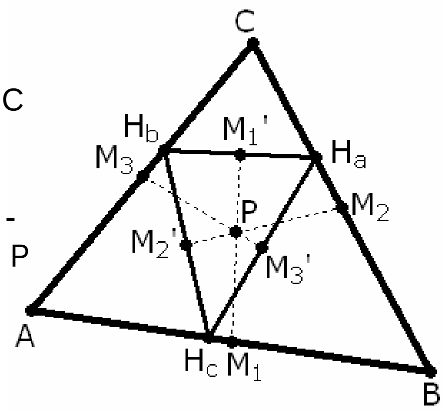
37) In jedem Dreieck ΔABC mit dem Flächeninhalt F, den Seitenmittelpunkten M_{BC}, M_{AC} und M_{AB} sowie der Schwerlinie s durch A und M_{BC} gilt die folgende Satzgruppe:

Satz 1. Die Normalabstände $d(M_{AC},s)$ und $d(M_{AB},s)$ sind gleich groß ("d").

Satz 2. Für den in Satz 1 definierten gemeinsamen Normalabstand d gilt die Formel $\boxed{d=\frac{F}{2\cdot\overline{AM_{BC}}}}$.

Überprüfe diese Satzgruppe für das konkrete Dreieck BC[A(0|0), B(70|10), C(50|80)]!

38) Verbindet man die Höhenfußpunkte eines Dreiecks ΔABC miteinander, so erhält man das sogenannte Höhenfußpunktdreieck $\Delta H_aH_bH_c$ des Dreiecks ΔABC. Zeige, dass die Verbindungsstrecken gegenüberliegender Seitenmittelpunkte der beiden Dreiecke einander in einem Punkt P schneiden (siehe Abbildung rechts!), und zwar anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(140|0) und C(120|60)]!



39) Gilt für die Seitenlängen $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ eines Dreiecks ΔABC die Gleichung $a^2+2c^2=2b^2$, dann schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $∢M_{BC}AB$ die Dreieckseite BC orthogonal. Verifiziere dies für das konkrete Dreieck ΔABC[A(0|0), B(169|0), C(–407|240)]!

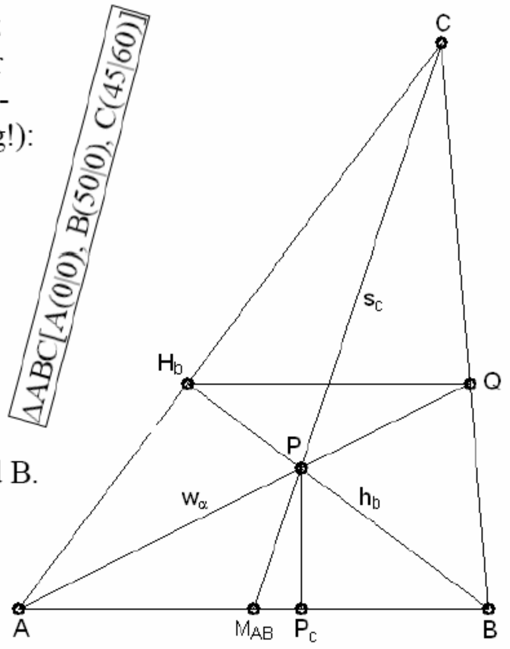
40) Ein ganz besonders schöner Satz der Dreiecksgeometrie lautet wie folgt: *Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Streckensymmetrale m_{AB} und die Schwerlinie s_b eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, dann besteht zwischen den Seitenlängen* $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ und $c=\overline{AB}$ die Beziehung $\boxed{(a^2-b^2+c^2)^2=b^2c^2}$.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(138|0), C(60|144)]!

41) Ein nicht geringeres Juwel der Dreiecksgeometrie ist das folgende Theorem: *Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Streckensymmetrale m_{AB} und die Höhe h_b eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, dann gilt $\alpha=60°$.*
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(6|0), C(2|2√3)]!

42) Ein besonders schöner Lehrsatz aus der Elementargeometrie der Ebene lautet wie folgt (siehe nebenstehende mittlere Abbildung!):

SATZ. Schneiden einander die Winkelsymmetrale w_α, die Höhe h_b sowie die Schwerlinie s_c eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt P, so verläuft die Gerade durch H_b und Q parallel zur Gerade durch A und B.

Überprüfe die Gültigkeit dieses Satzes an obigem Beispiel.



Zeige ferner, dass $\overline{AP_c} = \overline{H_bQ}$ gilt (Dabei ist P_c die Normalprojektion von P auf g_{AB}.)!

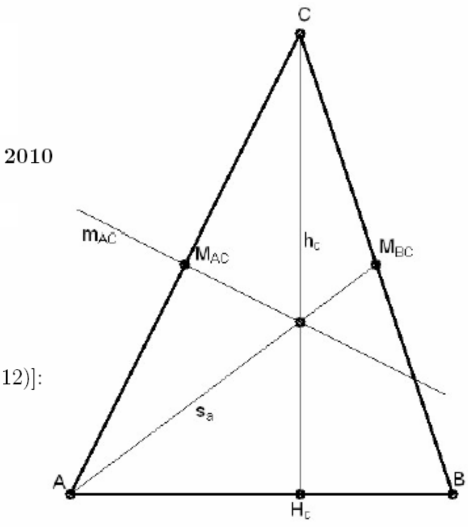
Nächste Aufgabe aus:

Klausurarbeit aus Mathematik

Klasse 8D (Realgymnasium), Haupttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

43) *Schneiden einander die Schwerlinie s_a, die Höhe h_c und die Streckensymmetrale m_{AC} eines Dreiecks ΔABC in einem Punkt (siehe untere Abbildung), dann erfüllen die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Gleichung $(a^2 - c^2)^2 = b^2(3a^2 - 2b^2 - c^2)$.*
Überprüfe die Gültigkeit dieses Lehrsatzes der ebenen Geometrie am Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(10|0),\ C(6|12)]$!



Folgende Aufgabe aus:

Klasse: 5A(G)

3. Schularbeit (zweistündig, A)

20. 05. 2010

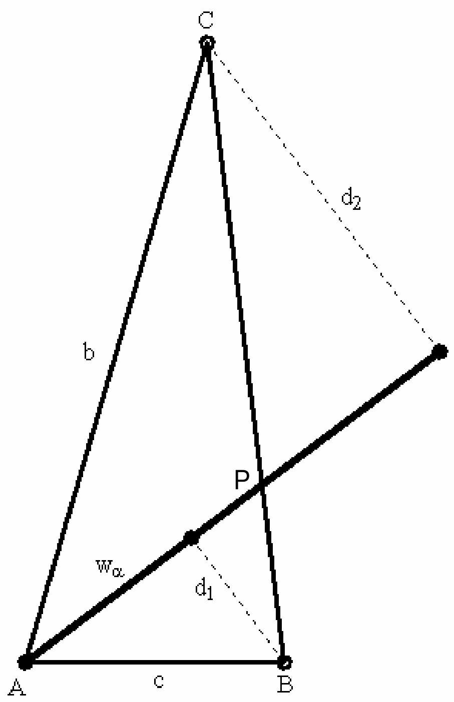
44) *"Bezeichnen (wie üblich!) $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Seitenlängen eines Dreiecks ΔABC mit der Winkelsymmetrale w_α des Winkels $\angle CAB = \alpha$ sowie p_α das Produkt der Normalabstände von B und C zu w_α, so gilt die Formel $p_\alpha = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4}$."*
Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(21|0),\ C(5|12)]$:

- Berechne die Seitenlängen a, b und c!
- Stelle eine Gleichung von w_α auf!
- Berechne die beiden genannten Normalabstände!
- Bilde das Produkt dieser Normalabstände (Kürzen!) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel.

45) *Im Dreieck ΔABC bezeichne p_α das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte B und C zur Winkelsymmetrale w_α, entsprechend p_β das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte A und C zur Winkelsymmetrale w_β und schließlich p_γ das Produkt der Normalabstände der Eckpunkte A und B zur Winkelsymmetrale w_γ. Ist ferner u bzw. F der Umfang bzw. der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt* $\frac{u}{2} \cdot \sqrt{p_\alpha \cdot p_\beta \cdot p_\gamma} = F^2$. Verifiziere *diesen Lehrsatz* anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(21|0),\ C(6|8)]$!

46) Legt man in den Eckpunkten B und C eines Dreiecks ΔABC die Tangenten an den Umkreis, so begrenzen diese zusammen mit der Seite BC ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt μ dann die Formel $\mu = \frac{1}{4} \cdot \tan\alpha \cdot a^2$ gilt, wobei wie üblich $a = \overline{BC}$ und $\alpha = \sphericalangle CAB$ gilt. Verifiziere diesen Lehrsatz der Elementargeometrie anhand des Dreiecks ΔABC mit den Eckpunkten $A(-16|-18)$, $B(17|15)$ und $C(-7|27)$!

47) In nebenstehender Abbildung siehst du ein Dreieck, in welchem die Seitenlängen b und c, sowie zwei Normalabstände d_1 und d_2 eingezeichnet sind. Ist F der Flächeninhalt des Dreiecks, so gilt stets die Formel $\boxed{F = \sqrt{d_1 d_2 \left(bc - d_1 d_2\right)}}$
Kontrolliere dies für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(70|0), C(49|168)]$! Verifiziere überdies dies die allgemeingültige Proportion $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{BA} : \overline{AC}$!



48) Im Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(40|0), C(5|12)]$ – Skizze! – gelten die folgenden Bezeichnungen:

- Ø d_1 bezeichnet den Normalabstand von H_c zu w_α.
- Ø d_2 bezeichnet den Normalabstand von M_{AB} zu w_α.

Sonst gelten die üblichen Beschriftungen für Seitenlängen und Innenwinkel!
Bestätige am vorliegenden Dreieck die Formel $d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha$ (Wurzelausdrücke und Brüche verwenden, Vereinfachen, Kürzen!).

49) Im Dreieck ΔABC bezeichne d_a bzw. d_b bzw. d_c den Normalabstand des Seitenmittelpunkts M_{BC} bzw. M_{BC} bzw. M_{AB} von der Winkelsymmetrale w_α. Verifiziere die Formel $d_a = |d_b - d_c|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(42|40)]$!

50) Im Dreieck ΔABC bezeichne d_a bzw. d_b bzw. d_c den Normalabstand des Seitenmittelpunkts M_{BC} bzw. M_{BC} bzw. M_{AB} von der Winkelsymmetrale w_γ. Verifiziere die Formel $d_c = |d_a - d_b|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(42|40)]$!

51) Im Dreieck ΔABC bezeichne d_b bzw. d_c den Normalabstand des Höhenfußpunkts H_b bzw. H_c von der Winkelsymmetrale w_α. Verifiziere anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(21|0), C(6|8)]$, dass die Produkte bd_b und cd_c (wobei – wie üblich! – $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$) gleich sind, und zwar gleich dem entsprechenden Wert des Terms $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ (wobei – ebenso wie üblich! – $\alpha = \sphericalangle CAB$!). Achtung! Verifikation mit Bruchtermen und Wurzelausdrücken, keine Dezimalzahlen!!

52) Im Dreieck ΔABC bezeichne d_α bzw. d_β bzw. d_γ den Normalabstand des Schwerpunkts S von der Winkelsymmetrale w_α bzw. w_β bzw. w_γ. Verifiziere die Formeln $d_\alpha = \frac{1}{3} \cdot |b - c| \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$, $d_\beta = \frac{1}{3} \cdot |a - c| \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ und $d_\gamma = \frac{1}{3} \cdot |a - b| \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(63|0), C(15|36)]$!

53) *Im Dreieck ΔABC bezeichne d_α bzw. d_β bzw. d_γ den Normalabstand des Höhenschnittpunkts H von der Winkelsymmetrale w_α bzw. w_β bzw. w_γ.* Verifiziere die Formeln $d_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot |b-c|$, $d_\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\frac{\beta}{2}} \cdot |a-c|$ und $d_\gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot |a-b|$ anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(84|0),\ C(24|45)]$!

54) Digitaler Ausschnitt aus einer Nachtrags-Schularbeit (Schülerin hat bei der eigentlichen Schularbeit gefehlt, nicht zu verwechseln mit einer Wiederholungs-Schularbeit, welche durchzuführen ist, wenn mehr als die Hälfte der teilnehmenden Schüler eine negative Leistung aufweist!) der 5A(G) vom 28.5.2010:

> *“Bezeichnen (wie üblich!) $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Seitenlängen eines Dreiecks ΔABC mit der Winkelsymmetrale w_γ des Winkels $\measuredangle ACB = \gamma$ sowie p_γ das Produkt der Normalabstände von A und B zu w_γ, so gilt die Formel $p_\gamma = \frac{ab(1-\cos\gamma)}{2}$.“*
> Verifiziere diesen Lehrsatz am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0),\ B(21|0),\ C(6|8)]$:
>
> - Berechne die Seitenlängen a und b!
> - Berechne den Cosinus von γ!
> - Stelle eine Gleichung von w_γ auf!
> - Berechne die beiden genannten Normalabstände!
> - Bilde das Produkt dieser Normalabstände (Kürzen!) und vergleiche das Ergebnis mit der Formel.

55) 2022: Sammys Haus (mit einer großen Garage, welche für mehrere Ferraris u.ä. Platz bietet ☺) liegt an einem Hang des Bisambergs, und zwar 15m über dem Ort. Der Hang weist eine Neigung von 14° auf. Wie lange ist der Weg vom Fuße des Hangs bis zu Sammys VILLA(!)?

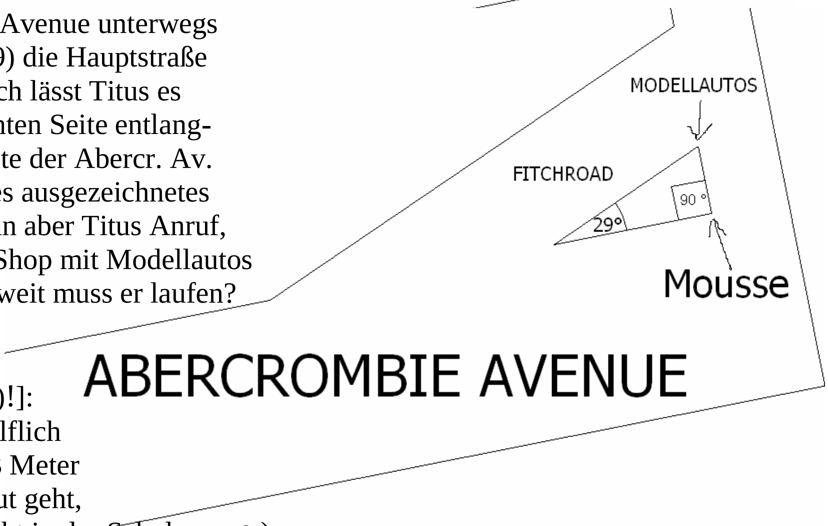
56) Titus hat sich von seinem 31 Meter hoch gelegenen Penthouse zum nahe gelegenen Parkplatz eine Rutsche(!) bauen lassen, die ihn schneller zu seinem Auto befördert (Außerdem macht es ihm Spaß!). Mit dem Aufzug (oder via Treppe) müsste er vom Ausgang des Wohnhauses noch 90 Meter bis zum Parkplatz zurücklegen. Welche Neigung weist die TR (Titus-Rutsche) auf?

57) Franziska und Melanie gönnen sich ein Ski-Wochenende (Na warum denn nicht?). Als sie mit dem Sessellift fahren, findet Franziska durch Kenntnis der Geschwindigkeit des Lifts und durch Verwendung der Stoppuhr ihres Smartphones heraus, dass eine Strecke von 93 Metern Länge gefahren sind, wobei der Hang eine Neigung von 34° aufweist. Wie viele Höhenmeter haben die beiden Rg-Damen der 5B denn nun überwunden?

58) Mike hat bei AEKI ein schönes Pult gesehen, das er gerne für ein Referat verwenden würde. Da Steve schon sehr hektisch war und Mike deshalb nur wenig Zeit hatte, um Maß zu nehmen, schaffte er es nur, mit 187mm die Höhe und mit 24° die Neigung des Pults zu messen. Wichtig wäre aber noch die Breite gewesen, damit Mike durch Vergleich mit der Breite eines Schultisches entscheiden kann, ob das Pult überhaupt auf den Tisch passt. Gottlob beherrscht Mike schon Trigonometrie (Na hoffentlich!).
Also: Wie breit ist das Pult, Mike (und Steve und Titus und und und … ☺)?

59) Sara geht in Mödling (nahe ihrer neuen Schule) spazieren, Melanie M. begleitet sie. Als sie die Hauptstraße entlanggehen, erblickt Sara plötzlich zu ihrem Erstaunen ein kurzes Gässchen mit der Bezeichung Heindlweg (siehe Abbildung!). An der Gabelung trennen sich die beiden Damen kurzzeitig und vereinbaren, sich an der Ecke (wo die Hauptstraße ihre Richtung um 90° ändert) beim Eisgeschäft wieder zu treffen. Sara geht (natürlich!) den Heindlweg entlang, und zwar auf der rechten Seite. Es sind gerade einmal 88 Meter, die sie zurücklegt, da „ihr“ Weg ziemlich kurz ist und nur das Eck der Hauptstraße abschneidet. Wie weit ist Frl. M. dann alleine bis zum Eisgeschäft weitergegangen?

60) Sammy und Titus sind auf der Abercrombie Avenue unterwegs (siehe Abbildung!), welche ähnlich wie in 59) die Hauptstraße einmal ihre Richtung um 90° ändert. Natürlich lässt Titus es sich nicht nehmen, die Fitchroad auf der rechten Seite entlangzugehen, während Sammy auf der linken Seite der Abercr. Av. 92 Meter bis zu einem Cafe weitergeht, wo es ausgezeichnetes Mousse au chocolat geben soll. Dort ereilt ihn aber Titus Anruf, dass es an der nächsten „Ecke“ einen tollen Shop mit Modellautos gibt, woraufhin Sammy sofort losläuft. Wie weit muss er laufen?



61) Jetzt kommt auch Titus auf den Geschmack des „Fensterlns“ [vgl. Aufgaben 16) und 20)!]: Sammy ist ihm selbstverständlich dabei behilflich und positioniert die 49 Meter lange Leiter 23 Meter von der Hausmauer entfernt (Na wenn das gut geht, Titus war ja eh´ schon eine ganze Woche nicht in der Schule … ☺). Wie groß ist dann der Winkel, den die Leiter mit der Hausmauer bildet? (Vergleich mit Mike und Steve, wobei es bei Steve schon ziemlich gefährlich war, bei Mike ging es noch. Was wird nun aus dem Titus?)

62) Nachdem das Fensterln bei Aufgabe 61) mit einem Gips für Titus endete (zu großer Winkel zwischen Leiter und Mauer!!), haben die beiden Herren für das nächste Fensterln dazugelernt. Jetzt ist Sammy an der Reihe (Seine Angebetete fährt Ferrari und wohnt 40 Meter über der Straße!! ☺). Titus verringert die von Sammy gewählten 23 Meter Abstand um 10 Meter, um Sammy den Gips zu ersparen. Was er aber nicht beachtet hat, ist, dass sie jetzt eine andere Leiter verwenden … Wie groß ist dieses Mal der Winkel zwischen Leiter (Länge unbekannt!) und Hausmauer? Wird Sammy verletzungsfrei aus der Sache herauskommen [Vgl. mit Aufgabe 61)!]:

63) Die 4,4 Meter tiefe Lehrergarage eurer Schule verfügt über eine Ein- bzw. Ausfahrtsrampe, die einen Steigungswinkel von 15° aufweist. Wie lange ist daher die Rampe?

64) Titus Liegegips wurde unter 27° gegen das Krankenhausbett geneigt und warf (lotrechter Sonnenstrahleinfall der Einfachheit wegen vorausgesetzt!) einen 69,5cm langen Schatten. Wie lang war daher der Gips?

65) Jede der vier nebenstehend abgebildeten Rampen hat einen Neigungswinkel von 31° und überwindet dabei eine Höhe von 274 cm. Wie weit muss man horizontal nach hinten gehen, bis das neue Höhenniveau erreicht wurde?

66) Burli hat beim Herumtollen und Winkelmessen üben rund um diese vier Rampen herausgefunden, dass einer der vier Rampen aber einen Neigungswinkel von 32° aufweist und bis zur Erreichung des erhöhten Niveaus 204 cm lang ist. Beantworte die gleiche Frage wie in der letzten Aufgabe und erkläre die unterschiedlichen Resultate [I.C.E.: GAB (Go ask Burli! ☺)]!