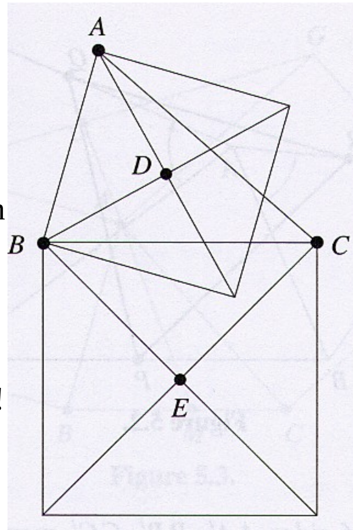
Übungsbeispiele für die 2. Schularbeit (einstündig)

5B(Rg), 2011/12

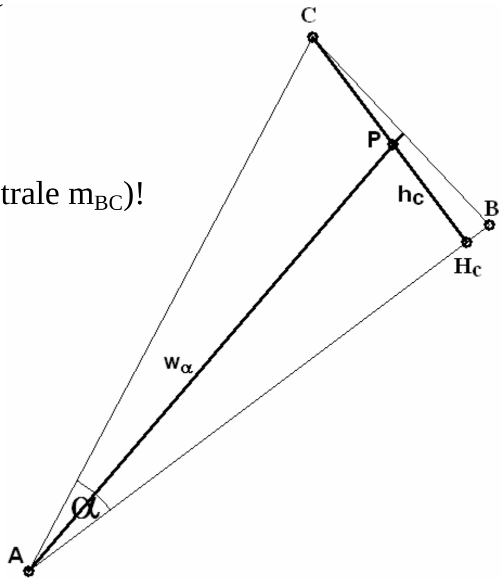


1) **<u>Schularbeitsbeispiel der 5E vom 14. 3. 2008:</u>**
Werden den Seiten AB und BC eines beliebigen Dreiecks ΔABC wie aus nebenstehender Figur deutlich ersichtlich Quadrate mit den Mittelpunkten D und E aufgesetzt, so gilt stets folgender

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Geraden g_{AC} und g_{DE} bleibt unabhängig von der Form des Dreiecks ΔABC immer gleich groß, sodass stets $\boxed{\overline{DE} = \overline{AC} \cdot \cos\varphi}$ gilt.

Bestätige diesen Lehrsatz für das Dreieck $\Delta ABC[A(2|8), B(0|0), C(8|0)]$ und berechne auch das Maß von φ!

2) **<u>Schularbeitsbeispiel der 5E vom 30. 5. 2008:</u>**
Ein Satz der Elementargeometrie besagt:
In jedem Dreieck schneiden einander die Winkelsymmetrale eines Winkels und die Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Dreieckseite in einem Punkt des Umkreises k_U.
Überprüfe diesen Satz für das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(112|0)$ und $C(40|96)$ anhand der Winkelsymmetrale w_α (und damit automatisch der Streckensymmetrale m_{BC})!
Verwende dazu die Parameterdarstellung und fertige eine ordentliche Skizze an! Schreibe in Symbolform an, wie du nachweist, dass der Schnittpunkt auf k_U liegt!

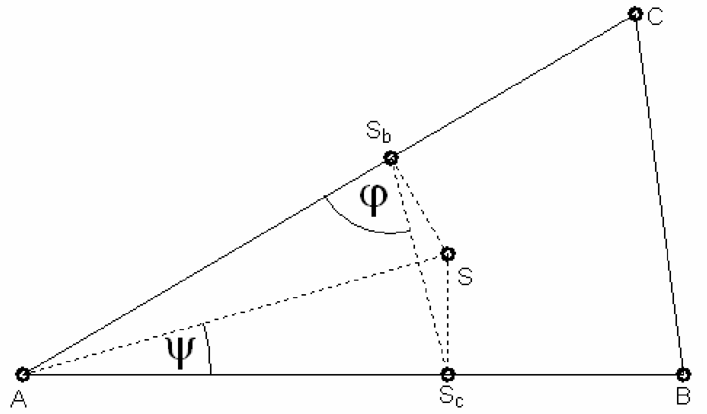


3) Berechne für das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(2916|2187)$ und $C(1800|3375)$ die Koordinaten des gemäß der angegebenen Skizze definierten Schnittpunkts P und kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $\boxed{\cos\alpha = \overline{H_cP} : \overline{PC}}$!

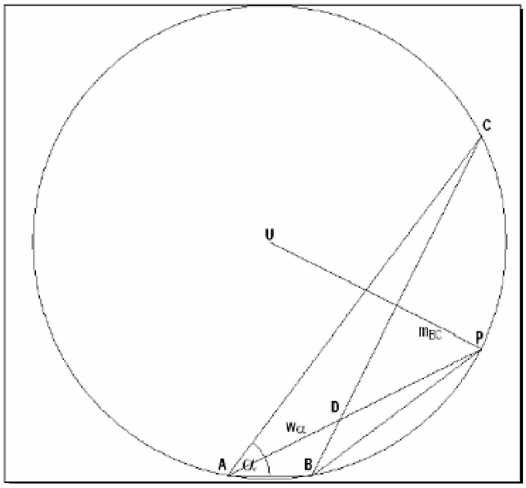
4) In jedem Dreieck gilt folgender
$\boxed{\text{SATZ.}}$ Der Normalabstand d des Höhenfußpunkts H_c von der Trägergerade g_{AC} der Seite AC läßt sich (wobei – wie üblich! – $\overline{AC} = b$ sowie $\sphericalangle CAB = \alpha$ gilt!) durch die Formel $\boxed{d = \frac{b \cdot \sin(2\alpha)}{2}}$ berechnen.
Kontrolliere diesen Satz durch Anwendung der HESSEschen Abstandsformel für das Dreieck $\Delta ABC[A(-10|-9), B(6|-1), C(-1|3)]$!

Hinweis: Die Formeln $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ sowie $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ könnten neben der "VW-Formel" durchaus hilfreich sein ... ☺

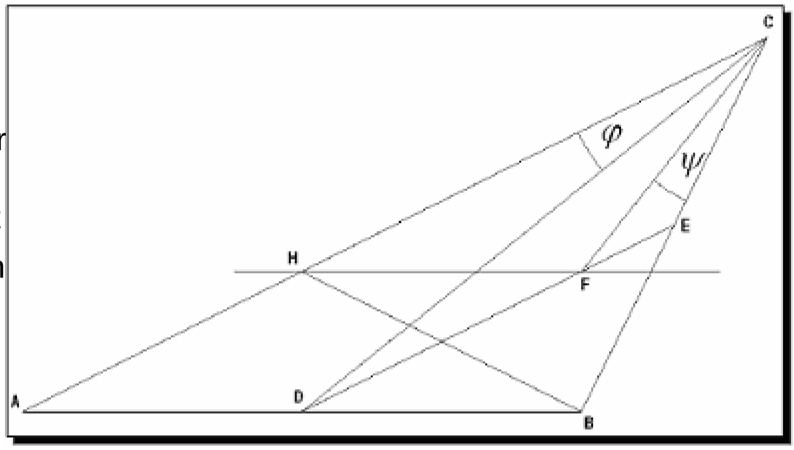
5) In der Abbildung links unten sind S_b und S_c die Lotfußpunkte des Dreiecksschwerpunkts S auf die Dreieckseiten AC und AB. Für die eingezeichneten Winkel φ und ψ gilt Dann stets die Beziehung $\varphi+\psi=90°$. Verifiziere dies anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0/0), B(45/45), C(30/60)]$!



6) Bezogen auf die nebenstehende Abbildung besagt ein Lehrsatz der ebenen Geometrie, dass die Winkel $\sphericalangle ABP$ und $\sphericalangle ADC$ kongruent sind [und ferner – vgl. Aufgabe 2)! –, dass w_α und m_{BC} einander in einem Punkt des Umkreises schneiden!]. Rechne dies am Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(4|0), C(12|16)]$ nach! Begründe, warum die Berechnung der Lage von D dazu nicht notwendig ist!



7) Die rechte untere Abbildung illustriert schließlich den folgenden Lehrsatz der Elementargeometrie:
Ist D bzw. E der Mittelpunkt der Seite AB bzw. BC eines Dreiecks ΔABC sowie H jener Punkt auf der Seite AC, welcher von A und B gleich weit entfernt ist und ist $\sphericalangle HBC$ ein rechter Winkel, dann ist auch $\sphericalangle ABF$ ein rechter Winkel. Ferner sind die Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle FCB$ kongruent (wobei – siehe Abbildung! – F der Schnittpunkt der Parallele zu AB durch H mit g_{DE} ist!). Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(12|0), C(16|8)]$!



8) In jedem Dreieck ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c sind die Winkel $\angle AH_bH_c$, $\angle CH_bH_a$ und $\angle ABC$ kongruent.
Bestätige diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-22|-17), B(23|-2), C(13|18)]$!

9) **<u>Schularbeitsbeispiel A1 der 5D(Rg) vom Fr, den 09. März 2007:</u>**

In jedem spitzwinkligen Dreieck ΔABC mit dem Innenwinkel $\gamma = \angle BCA$, dem Höhenfußpunkt H_c sowie den Seitenhalbierungspunkten M_{AB}, M_{BC} und M_{AC} gilt stets $\boxed{\angle M_{AC}H_cM_{BC} = \angle M_{AC}M_{AB}M_{BC} = \gamma}$.
Bestätige diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(38|0), C(6|16)]$. Berechne dazu auch **<u>das Maß dieses</u>** dreifach auftretenden **<u>Winkels</u>**! ***Fertige eine saubere Skizze an, deren ordentliche Beschriftung (inkl. Koordinatensystem!) den Zusammenhang zur Rechnung deutlich herstellen soll!***

10) In jedem Dreieck ΔABC mit den Innenwinkeln $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ und $\gamma = \angle BCA$, dem Umkreisradius r, dem Höhenschnittpunkt H und den Höhenfußpunkten H_a, H_b und H_c gilt $\overline{H_aH}\cdot\overline{HA} = \boxed{\overline{H_bH}\cdot\overline{HB} = \overline{H_cH}\cdot\overline{HC} = 4r^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$. Verifiziere diesen Satz für die Höhen h_b und h_c anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-4|-4), B(16|6), C(3|17)]$!

11) Es sei M_{BC} der Mittelpunkt der Seite BC eines spitzwinkligen Dreiecks ΔABC mit den Höhenfußpunkten H_b und H_c. Dann gilt stets $\angle H_cM_{BC}H_b = 180° - 2\cdot\angle CAB$.
Verifiziere diesen Satz anhand des Dreiecks $\Delta ABC[A(-12|-11), B(28|9), C(2|31)]$!

12) Einfach zu beweisen (Alles, was du dazu wissen musst, ist, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck ……° beträgt!), aber hier ebenso nur anhand des Dreiecks aus Aufgabe 8) zu bestätigen:

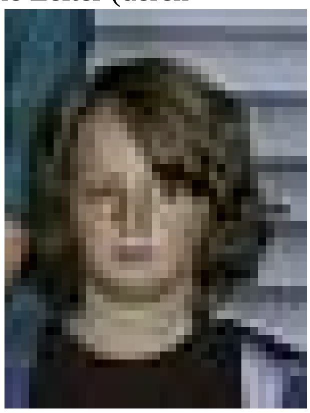
Im spitzwinkligen Dreieck ABC sei H der Höhenschnittpunkt und U der Umkreismittelpunkt. Zeige: Die Winkel HAB und ∠ UAC sind gleich groß.

13) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(-20|-100), B(69|-11), C(-59|69)]$ die Maße der Innenwinkel!

14) Berechne im Dreieck $\Delta ABC[A(250|-200), B(341|-18), C(-362|191)]$ die Maße der Innenwinkel!

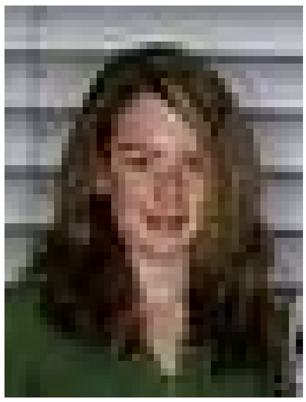
15) Melanie (Abbildung links) geht einen Weg mit einer Steigung von 13° genau 39m bergauf, während Franziska (Abbildung rechts) – um ihre Kamera keinerlei Gefahr auszusetzen – horizontal im Gelände unter Melanie weiterspaziert. Wie weit hat sie sich nach der Trennung von Melanie weiterbewegt, wenn sie nach Melanies zurückgelegten 39m direkt unter ihr stehen bleibt?


16) Mike (Abbildung rechts) lehnt zum Fensterln (bei einem "Dirndl vom Land") eine Leiter (deren Länge gerade noch ausreicht, um ans richtige Fenster zu kommen) an die Hauswand, wobei er die Leiter so anlehnt, dass sie mit der Hausmauer einen Winkel von 17° einschließt. Wie lange ist die Leiter, wenn sich das Fenster 4,16m über dem Boden befindet?



17) Titus (Abbildung rechts rechts) fährt mit dem Rad eine (mehr oder minder steile) 111m lange Rampe hinauf. Nachdem er oben angekommen ist, hat sich der direkt unter ihm stehende Sammy (Abbildung rechts links) vom Fußpunkt der Rampe aus genau 106,7m weiterbewegt. Unter welchem Winkel ist die Rampe gegen die Horizontale geneigt?

18) Melanie (Abbildung rechts) ist stolze Besitzerin eines Türstoppers von der Form eines rechtwinkligen Dreiecks, welcher 888mm breit und an seiner längsten Seite 945mm lang ist. Welche Neigung weist Melanies Türstopper gegenüber der Horizontalen auf?



19) Mike (Abbildung ganz rechts) radelt mit Steve (Abbildung links) durch den Wienerwald, als die beiden vor der Qual der Wahl stehen, ob sie bergauf oder horizontal im Gelände weiter fahren sollen. Um den steilen Weg auf seine Befahrbarkeit hin zu prüfen, fährt Mike ein Stück bergauf, während Steve unter ihm im Gelände weiterfährt. Wie hoch befindet sich Mike nach 53m steiler Fahrt über Steve, wenn der Neigungswinkel des Wegs gegenüber der Horizontalen 21° beträgt?

20) Nach Mike in Aufgabe 16 geht nun auch Steve (Abbildung rechts) unter die "Fenstler" und "besucht" auf diese Weise seine Holde mittels einer Leiter, die mit der Hausmauer einen Winkel von 22° einschließt. Mike unterstützt Steve mit einer XXL-Version von Melanies Türstoppers (Breite 236cm!). Wie lange ist die verwendete Leiter, wenn es sich gerade noch bis zum Fenster ausgeht?

21) Saras Straßenschuhe stehen in ihrem Spind auf zwei je 82mm hohen Sockeln, welche im Längsschnitt die Form eines rechtwinkligen Dreiecks aufweisen und ihren 194mm langen Schuhen in der Schräge exakt den Platz bieten, den sie benötigen. Wie stark ist dieser Sockel demnach gegen die Horizontale geneigt?

22) Titus (siehe Abbildung rechts) rutscht in den sehnsüchtig erwarteten Sommerferien 2012 eine 99m lange Wasserrutsche von konstanter Steigung hinab, deren Startpunkt sich 43,4m über dem Schwimmbekkenrand befindet. Unter welchem Winkel ist diese Rutsche gegen die Horizontale geneigt?

23) Lange ist´s her: Sammy (Abbildung links von und unter Titus) und Titus (nochmals Abbildung ganz rechts) standen einander in einer Entfernung von 40cm gegenüber, als der kleinere Titus aufgrund eines ernsten Gesprächs mit seinen Augen durch Anheben seines gesamten Kopfs um 32° gegen die Horizontale Sammys Augen fixiert. Um wie viel cm war Sammy größer als Titus, wenn wir annehmen, dass Titus Stirn genau so hoch ist als jene von Sammy?

24) Mit [r|φ]=[326|9°] sind die Polarkoordinaten eines Punkts P[r|φ] gegeben.
Berechne die cartesischen Koordinaten (x|y) von P!

25) Mit [r|φ]=[11939|97°] sind die Polarkoordinaten eines Punkts P[r|φ] gegeben.
Berechne die cartesischen Koordinaten (x|y) von P!

26) Mit (x|y)=(38|361) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

27) Mit (x|y)=(–182|70) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

28) Mit (x|y)=(–1974|–564) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

29) Mit (x|y)=(424|–265) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

30) Mit (x|y)=(1275|595) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

31) Mit (x|y)=(–483|2093) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

32) Mit (x|y)=(–57|–323) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!

33) Mit (x|y)=(176|–484) sind die cartesischen Koordinaten x und y eines Punkts P(x|y) gegeben.
Berechne die Polarkoordinaten [r|φ] von P!