§3. Kubatur (Aufgaben 56 bis 85)

56) Rotiert ein Bogen einer gleichseitigen Hyperbel (wobei der Anfangspunkt ein Scheitel ist) um die Hauptachse von hyp, so entsteht (analog zur Kugelkalotte) eine Hyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius r.

Wähle a) oder b)!

a) Leite die Volumsformel $V = \frac{\pi h}{6} \cdot \left(3r^2 - h^2\right)$ für die Hyperboloidkalotte her!

b) Verifiziere die Formel für jene konkrete gleichseitige Hyperbel hyp in erster Hauptlage, welche durch den Punkt P(39|36) verläuft, wobei P bei Rotation von hyp um die Hauptachse den Basiskreis der Kalotte erzeugt.

57) **Verallgemeinerung von Aufgabe 56):**
Rotiert ein Bogen einer gleichseitigen Hyperbel (welcher den Scheitel **nicht** enthält) um die Hauptachse von hyp, so entsteht eine Zone von einem Teil eines zweischaligen Drehhyperboloids der Höhe h mit dem Basiskreisradius r und dem Deckkreisradius R. Für das Volumen dieser Zone gilt dann (die nicht mehr so einfach wie jene in der letzten Aufgabe herzuleitende) Volumsformel $V = \frac{\pi h}{6} \cdot \left(3R^2 + 3r^2 - h^2\right)$.

a) Erkläre, wie die Volumsformel aus der letzten Aufgabe nun ganz einfach aus jener für die Zone folgt!

b) Verifiziere die Volumsformel für die Zone anhand jener gleichseitigen Hyperbel hyp in erster Hauptlage, welche durch den Punkt P(16|11) verläuft, wobei P bei Rotation von hyp um die Hauptachse im Intervall [12;24] entsteht.

58) Die Hyperbel hyp [hyp.: $xy = 32$] begrenzt mit der Ellipse ell [ell: $4x^2 + y^2 = 272$] im ersten Quadranten ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. Berechne das Volumen des Körpers!

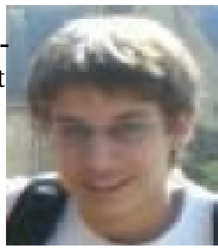
59) Die Hyperbel hyp [hyp.: $xy = 32$] begrenzt mit der Ellipse ell [ell: $x^2 + 16y^2 = 320$] im ersten Quadranten ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. Berechne das Volumen des Körpers!

60) a) Wie viele Punkte haben die Ellipse ell [ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$] und die Parabel par $\left[\text{par.: } y = b - \frac{b}{2a^2} \cdot x^2\right]$ gemeinsam? Ermittle die entsprechenden Koordinaten und gib ggf. die **Art der Berührung** an!

b) Rotiert das von ell und der x-Achse bzw. das von par und der x-Achse begrenzte Segment um die y-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. In welchem Verhältnis stehen derer Volumina? **Rechne auf *zwei* Arten!**

c) Analog zu b) mit der x-Achse als Drehachse! Für das entsprechende Verhältnis k lautet Mad Mikes (vgl. Abbildung rechts) Resultat k = 510:577. Nimm zu Mad Mikes Ergebnis Stellung!

Bedenke: Vielleicht hat er während der Hausübung ein wenig zu laut die CD "Rock the plank" gehört! ☺



61) Eine Ellipse ell in erster Hauptlage (halbe Hauptachsenlänge a, halbe Nebenachsenlänge b, Brennweite e) wird um 90° um den Ursprung gedreht, wodurch eine zu ell kongruente Ellipse ell´ entsteht, die mit ell ein Flächenstück begrenzt, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt, für dessen Volumen V die Formel $V = \frac{4ab\pi}{3} \cdot \left(a - \frac{e^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ hergeleitet werden kann.

Wähle nun a) oder b)!

a) Beweise diese exotische Volumsformel!

b) Verifiziere sie für die konkrete Ellipse ell [ell.: $9x^2 + 16y^2 = 3600$]!

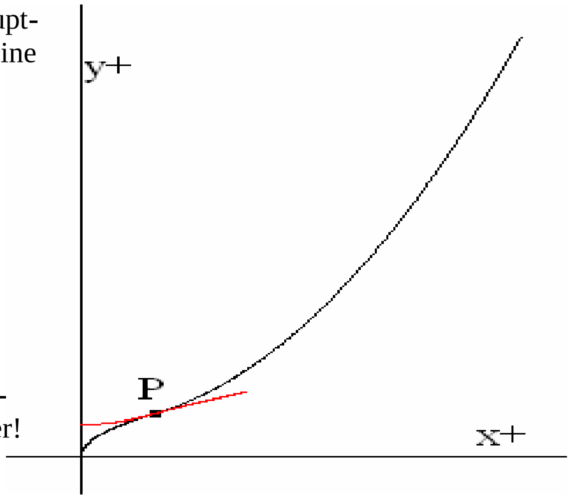
c) Obligatorisch [egal, ob zuvor a) oder b) gewählt]: Was passiert mit der Formel, wenn e=0? Interpretiere geometrisch!

62) Durch einen im ersten Quadranten liegenden Punkt P(a|b) wird der Graph Γ_f einer Polynomfunktionen zweiten Grades gelegt, welcher sowohl die x-Achse als auch die durch P gehende Parabel par in erster Hauptlage in P berührt. Beweise [oder verifiziere für P(10|10)], dass der Drehkörper, der bei Rotation des von der x-Achse, par und Γ_f begrenzten Flächenstück um die x-Achse entsteht, exakt $\frac{3\pi ab^2}{10}$ beträgt.

63) a) Durch den Punkt P(h|r) verläuft eine Parabel par in erster Hauptlage, welche bei Rotation um die x-Achse im Intervall [0;h] eine Drehparaboloidkalotte erzeugt, für welche die Volumsformel $V = \frac{r^2\pi h}{2}$ gilt. Beweise dies und gib vor der Rechnung je eine untere und eine obere Schranke für V an [Tipp: einfach(er!)e Vergleichskörper benutzen …..]!

b) par wird in P von einer zur y-Achse symmetrischen Parabel (Ansatz: $y = ax^2+b$, siehe auch Abbildung rechts) berührt, welche im Intervall [h;6h] um die x-Achse rotiert und damit zusammen mit der Kalotte aus (a) einen glockenförmigen Drehkörper erzeugt. Leite die Volumsformel für den Rauminhalt V´ des gesamten Körpers in Abhängigkeit von r und h her!

c) Berechne r (in cm!), wenn r = h sowie V´ = 3,2 Liter gilt!



64) Der von par $\left[\text{par.: } y^2 = \frac{h^2}{r} \cdot x\right]$, der Parallelen zur Parabelachse durch P(r|h) und der Scheiteltangente von par begrenzte Bereich rotiert um die Scheiteltangente von par, wodurch ein Drehkörper in Form einer Vase mit dem Radius r und der Höhe h entsteht.

a) Stelle in Abhängigkeit von r und h (Einheit: dm) eine Formel für die Masse dieses Drehkörpers auf, wenn er aus einem Material der Dichte $\rho = 1504 g/dm^3$ gefertigt wird.

b) Berechne (wieder in Abhängigkeit von r und h) den Rauminhalt des volumsgrößten koaxialen Zylinders, welcher in die Vase gelegt werden kann (Nachweis des Maximums!). Wie viel Prozent der Vase nimmt der Zylinder ein?

65) Zeige auf zwei Arten, dass der von den Kurven mit den Gleichungen $y = x^4 - x^2$ und $y = x^4 - 1$ begrenzte Bereich bei Rotation um die y-Achse einen Drehkörper mit dem Volumen $V = \frac{\pi}{2}$ erzeugt.

66) a) Beweise die Volumsformel $V = \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3r - h)$ für das Volumen einer Kugelkalotte!

b) Eine Halbkugel (Radius r) wird durch eine koaxiale Kugelkalotte (Höhe h, h<r) ausgehöhlt, wodurch eine Kuppel entsteht.

b1) Beweise die Formel $R = \frac{r^2+h^2}{2h}$ für den Radius R der aushöhlenden Kugel und beweise ferner, dass stets R>r gilt.

b2) Leite die Volumsformel $V = \frac{\pi}{6} \cdot (r-h) \cdot (4r^2 + rh + h^2)$ für das Volumen der Kuppel her!

67) a) Zeige, dass die Kurven k_1 [k_1: $y^2 = x^2 \cdot (8 - x^2)$] und k_2 [k_2: $y^2 = 4x^2 \cdot (x+3)$] idente Hoch- und Tiefpunkte haben!

b) Berechne unter Verwendung von Wurzelausdrücken (keine Dezimalzahlen!) das Volumen jenes Drehkörpers, welcher bei Rotation des von k_1 und k_2 begrenzten Flächenstücks um die x-Achse entsteht und nimm Stellung zu Mad Mikes Resultat $\frac{9}{4}$!

$$\boxed{V = \frac{w^2 h\pi}{12d} \cdot (h + 3d)}$$

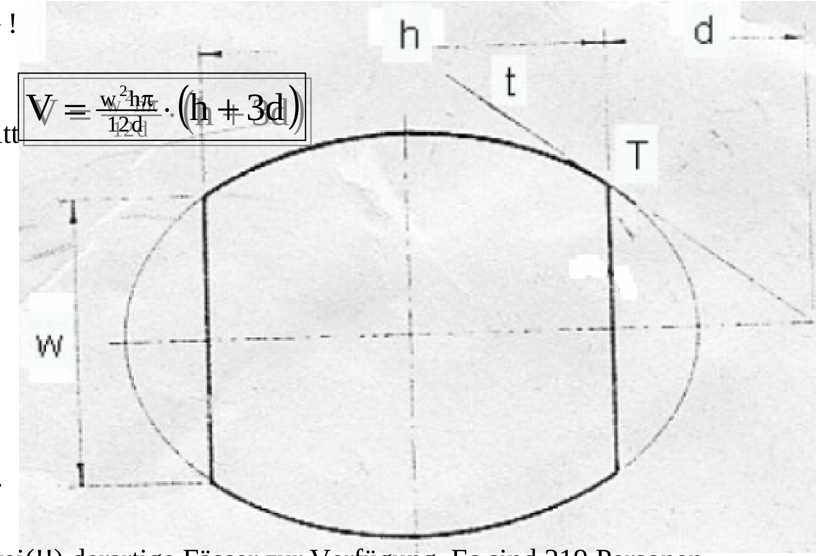
68) Nebenstehende Skizze zeigt den Längsschnitt eines Fasses mit elliptischen Dauben.
Wähle a) oder b), wobei bei der Wahl von b) zusätzlich c) und d) zu bearbeiten sind:

a) Beweise $\boxed{\text{nebenstehende Formel}}$ für das Volumen von diesem Fass!

b) Verifiziere die Formel für die speziellen Werte h=160cm, w=72cm und d=45cm.

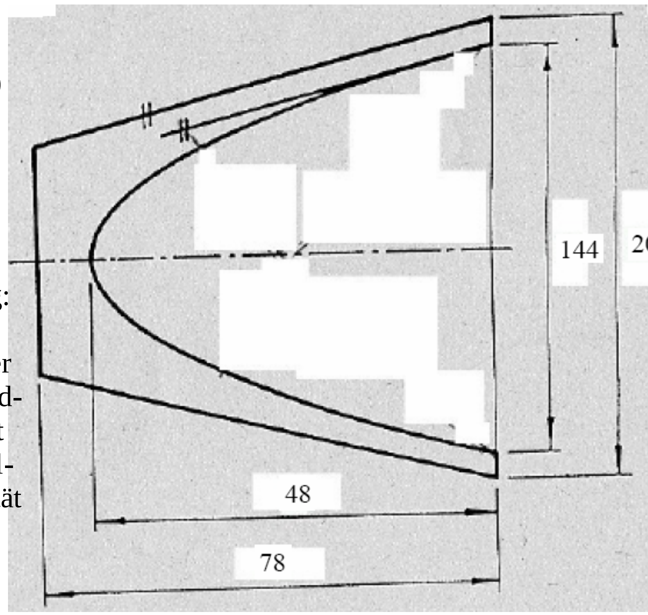
c) Gib den Durchmesser des Fasses (klarerweise an der breitesten Stelle!) an!

d) Utopie(!): Bei der Maturafeier stehen zwei(!!) derartige Fässer zur Verfügung. Es sind 219 Personen anwesend. Wie viel Liter könnte(!!!) theoretisch jeder trinken, wenn man gerecht aufteilt?



69) Einer gleichseitigen Hyperboloidkalotte (Radius r, Höhe h) wird ein koaxialer Drehkegel mit identischem Basiskreis und gleicher Höhe eingeschrieben. Beweise, dass dieser Kegel stets mehr als $\frac{2}{3}$ der Hyperboloidkalotte einnimmt.

70) Ein (in der angegebenen Skizze – Maße in mm, Achtung: Skizze nicht maßstabsgetreu! – auf die Seite gekipptes) Glasgefäß hat die Form eines Drehkegelstumpfs, welcher wie in der Skizze angegeben durch eine Drehhyperboloidkalotte ausgehöhlt wurde, wobei der Achsenschnittpunkt der erzeugenden Hyperbel mit dem Basiskreis des Kegelstumpfs zusammenfällt und die eingezeichnete Parallelität zu beachten ist. Wie viel cl fasst dieses Gefäß?

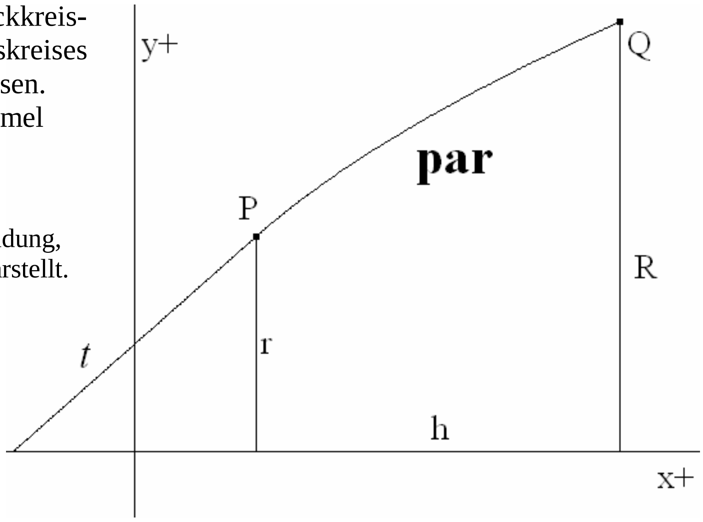


71) Eine Drehparaboloidscheibe (Höhe h, Basis- bzw. Deckkreisradius r bzw. R, wobei R>r) wird unterhalb ihres Basiskreises von einem koaxialen Drehkegel berührend abgeschlossen. Dann gilt für das Volumen des Gesamtkörpers die Formel $\boxed{V = \frac{\pi h}{6} \cdot \frac{3R^4 + r^4}{R^2 - r^2}}$.

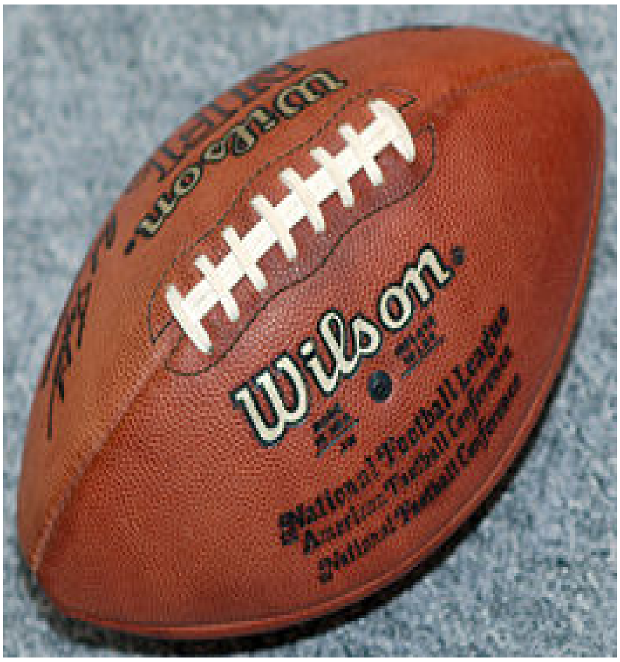
Wähle a) oder b). Be(tr)achte in jedem Fall die rechte Abbildung, welche einen Achsenschnitt des oben genannten Körpers darstellt.

a) Beweise diese Formel!

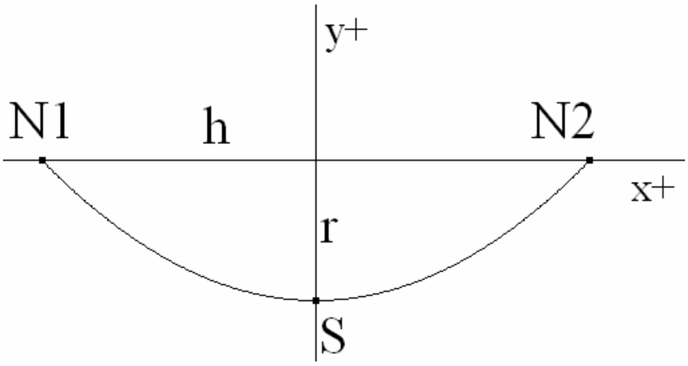
b) Verifiziere sie für P(3|24) und Q(x_Q|48)!



72) Ein ***American Football*** entstehe, indem man den von der Parabel par $\left[\text{par.: } y=\frac{r}{h^2}\cdot\left(4x^2-h^2\right)\right]$ und der x-Achse begrenzten Bereich um die x-Achse rotieren läßt.



a) Zeige zunächst, dass obige Parabel tatsächlich die in der unteren Skizze illustrierten **Voraussetzungen** erfüllt. Verbalisiere **selbige**, bevor du sie nachweist!



b) Leite auf Grundlage des obigen mathematischen Modells die Formel für das Volumen von einem derartigen ***Football*** her!

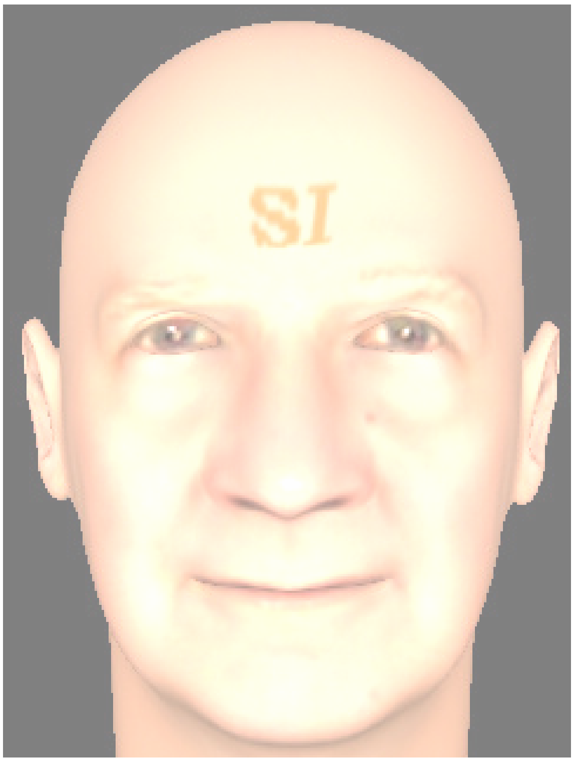
73) Eine Drehparaboloidkalotte und eine Drehhyperboloidkalotte (von einer gleichseitigen Hyperbel erzeugt) haben gleichen Radius r und gleiche Höhe h, mit V_P bzw. V_H seien deren Volumina bezeichnet.

a) Beweise, dass stets $V_P > V_H$ gilt!

b) Berechne das Verhältnis r:h, wenn $V_P : V_H = 16 : 13$ gilt!

74) **SATZ.** Schreibt man einer Hyperboloidkalotte (halbe Hauptachsenlänge a der erzeugenden Hyperbel, Höhe h) jenen koaxialen Kegel mit identischem Basiskreis und gleicher Höhe ein, so verhalten sich die beiden Volumina wie (3a+h):(2a+h).

Überprüfe diesen Satz für h=4 anhand der Hyperbel mit der Gleichung $9x^2 - 16y^2 = 324$.

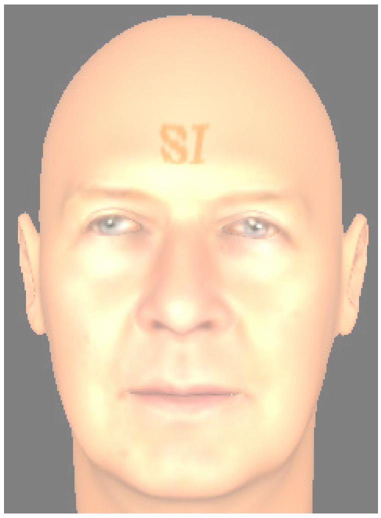


75) Basti berichtet beim 40jährigen Maturatreffen (vgl. Abbildung rechts!) stolz, das ganz große Geld gemacht zu haben (Immerhin lädt er die ganze Klasse samt aller zur Verfügung stehenden Lehrer zu einer geschlossenen Gesellschaft in die *Creperie* ein! ☺), und zwar (indirekt!) mit Mathematik. Unser werter "DI Dr. Reason" hat sich nämlich auf die Produktion von Footballs spezialisiert, welche nicht wie jene in Aufgabe 72) als Meridianschnitte doppelte Parabelsegmente aufweisen, sondern (translatierte) Potenzkurven höherer Ordnung als Profile aufweisen, die technischen Details folgen nun anbei:
Der "GTPF" (Grunds translatierter Potenzfootball, unter Neidern auch "Grunds teurer Protzer-Football" genannt) entsteht, indem die Quartik mit der Gleichung $\boxed{y=\frac{8d}{h^4}\cdot\left(\frac{h^4}{16}-x^4\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse rotiert.

a) Beweise zunächst, dass diese Quartik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!

b) Beweise, dass der GTPF ein um ein Drittel größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $\boxed{y=\frac{2d}{h^2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-x^2\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2};\frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse entsteht.

76) (Inhaltliche) Fortsetzung von Aufgabe 75):
Zu Beginn von Bastis "Footballkarriere" war "φιλ κ." seine rechte Hand, ergo: stellvertretender Generaldirektor! Dann begann er, durch Fälschen von Bastis Büchern auf eigene Faust (vermeintlich!) noch bessere Footballtypen zu produzieren, und zwar unter Verwendung einer Sixtix anstelle von Bastis Quartik, Details folgen nun anbei: Der "KUPFI" (Karajordanovs Ultra-Potenz-Football intelligent!) entsteht, indem die Sixtik mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{32d}{h^6} \cdot \left(\frac{h^6}{64} - x^6\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse rotiert.



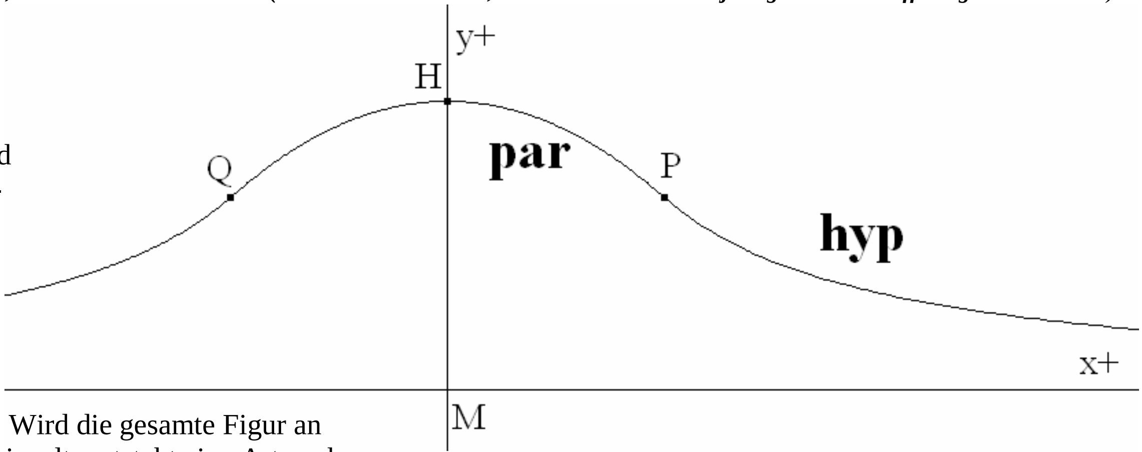
a) Beweise zunächst, dass diese Sixtik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!

b) Beweise, dass der KUPFI ein um fast die Hälfte größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{2d}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse entsteht.

c) Quantifiziere "ein um fast die Hälfte größeres Volumen"!

Anmerkung: ***Der "KUPFI" war einfach zu voluminös, um sich gegenüber dem GTPF durchzusetzen und trieb "φιλ κ." nicht nur in den Ruin, sondern auch ins Kittchen (siehe Foto rechts oben, ebenda kurz vor dem 40jährigen Maturatreffen "geschossen"! ☺)***

77) Die gleichseitige Hyperbel hyp (Asymptoten sind die Koordinatenachsen!) geht in ihrem Scheitelpunkt P(r|r) tangentiell in eine zur y-Achse symmetrische Parabel par über. Wird die gesamte Figur an der y-Achse gespiegelt, entsteht eine Art nach links und rechts unendliche) Glockenkurve, welche bei Rotation um die x-Achse einen nach beiden Seiten offenen Drehkörper erzeugt. Beweise:



a) Der Kehlkreis dieses Drehkörpers weist einen Durchmesser von 3r auf!

b) Die Normalebenen auf die Drehachse durch P und seinen Spiegelpunkt Q an der y-Achse teilen das Gesamtvolumen des Körpers im fortlaufenden Verhältnis 5:9:5.

78) Eine gleichseitige Hyperbel in erster Hauptlage (halbe Hauptachsenlänge a) rotiert im Intervall [a;a+h] um die x-Achse und erzeugt dabei eine Hyperboloidkalotte mit dem Deckkreisradius r und der Höhe h.

a) Drücke a durch r und h aus!

b) Leite die Volumsformel für die Hyperboloidkalotte her!

c) Beweise, dass die Steigung der Tangente an die Hyperbel im Punkt P(a+h|r) durch den Quotienten $\frac{H(h^2, r^2)}{G(h^2, r^2)}$ gegeben ist, wobei H bzw. G das harmonische bzw. geometrische Mittel bezeichnet.

79) Durch den Mittelpunkt des Scheitelkrümmungskreises einer Parabel (Anm.: Dieser stellt sich als der Spiegelpunkt des Parabelscheitels am Parabelbrennpunkt heraus!) wird eine Normale zur Parabelachse errichtet, welche die Parabel in zwei Punkten schneidet. Durch einen dieser beiden Punkte wird eine gleichseitige Hyperbel gelegt, welche die Parabelachse und die Parabelscheiteltangente als Asymptoten besitzt.

a) Beweise, dass die Hyperbel und die Parabel einander rechtwinklig schneiden!

b) Rotiert das von der Parabel, der Hyperbel und der Parabelachse nach einer Seite offene Flächenstück um die Parabelachse, so entsteht ein Drehkörper, welcher sich aus einem paraboloidkalottenförmigen Teil und einem unendlichen hornförmigen Teil zusammensetzt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Körper?

80) Die Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8x$ rotiert im Intervall $[0; 4]$ (Einheit cm) um die $x-$Achse, wodurch eine 4cm hohe Paraboloidkalotte entsteht, welche randvoll mit Wasser gefüllt wird. Wie hoch steht das Wasser, wenn es in jenen Teil eines zweischaligen Drehhyperboloids umgeschüttet wird, welcher durch Rotation des rechten Astes der Hyperbel mit der Gleichung $3x^2 - 4y^2 = 48$ um die $x-$Achse entsteht? Welches erstaunliche Ergebnis erhält man? Läßt es sich für beliebige Wassermengen (oder andere Flüssigkeiten) verallgemeinern? Beweis oder Gegenbeispiel!

81) Beweise: Schreibt man einem Drehparaboloid Γ einen Drehkegel Φ um, der Γ längs seines Basiskreises berührt, dann verhalten sich die Volumina von Drehkegel und Drehparaboloid wie $4 : 3$.

82) Betrachte die Graphen der Funktionen f $[y = f(x) = (x^2–1)^2]$ und g $[y = g(x) = x^4]$ und bearbeite:

a) Zeige, dass die spitzen Schnittwinkel zwischen Γ_f und Γ_g dem Schnittwinkel zweier Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders entspricht.

b) Das von Γ_f und Γ_g begrenzte Gebiet rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers auf zwei Arten (Schalen- bzw. Scheibenmethode). Welche Variante findest du bei dieser Aufgabenstellung vorteilhafter (argumentelle Untermauerung mit Fachbegriffen!)?

83) Durch einen im ersten Quadranten liegenden Punkt $P(x_P|y_P)$ einer gleichseitigen Hyperbel k_1 mit den Koordinatenachsen als Asymptoten wird eine gleichseitige Hyperbel k_2 in erster Hauptlage gelegt.

(a) Beweise oder begründe geometrisch, dass diese Aufgabe nur im Fall $x_P > y_P$ lösbar ist.

(b) Beweise: k_1 und k_2 schneiden einander in P rechtwinklig.

(c) Rotiert das von k_1 und k_2 begrenzte nach rechts offene Flächenstück um die $x-$Achse, so entstehen zwei Drehkörper, die gemeinsam eine Art "unendlichen Pilz" ergeben. Beweise, dass der von k_2 beigesteuerte "Pilzkopf" immer ein kleineres Volumen aufweist als der Rest des Gesamtkörpers.

Bearbeite diese Aufgabe wahlweise (zunächst) auch (nur) für den konkreten Punkt P(5|4)!

84) Gegeben sind die Parabel par (par:$y^2 = 32x$) und die Hyperbel hyp (hyp:$xy = 2$).

i. Rotiert das nach rechts offene von hyp und par begrenzte Flächenstück um die $x-$Achse, so entsteht ein Drehkörper $\mathcal{D}$. Beweise, dass sich die Teilvolumina der Paraboloidkalotte und der unendlichen Hyperboloidspindel wie $1 : 2$ verhalten.

ii. $\mathcal{D}$ ist der volumsgrößte koaxiale Drehzylinder einzubeschreiben. Beweise, dass sein Volumen $25\sqrt[3]{2}\%$ des Rauminhalts von $\mathcal{D}$ ausmacht!

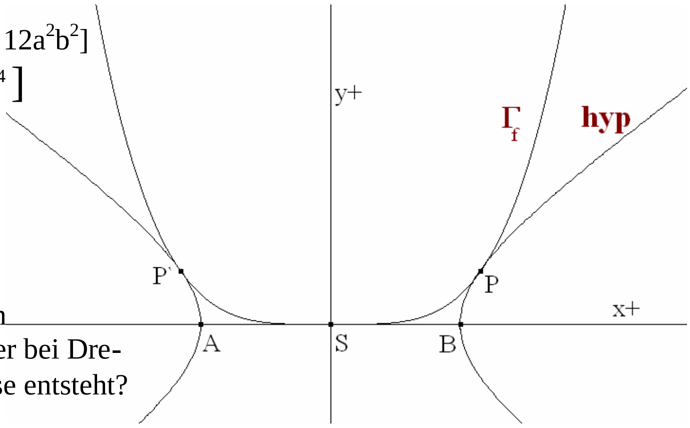
Zusatzpunkte:

i. Beweise die Aussage über das Teilungsverhältnis $1 : 2$ allgemein für $y^2 = ax$ und $xy = b$!

ii. Beweise auch die Aussage über den Volumenanteil des volumsgrößten Zylinders allgemein für $y^2 = ax$ und $xy = b$! Erkläre die Notwendigkeit dieser Einschränkung!

85) a) Beweise, dass die Hyperbel hyp [hyp: $4b^2x^2 - a^2y^2 = 12a^2b^2$] und der Graph Γ_f der Funktion f $\left[y = f(x) = \frac{b}{8a^4} \cdot x^4 \right]$ einander im [nebst S(0|0)] zweiten Schnittpunkt P von Γ_f mit der steigenden Asymptote der Hyperbel hyp [hyp: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$] berühren.

b) Rotiert der Hyperbelbogen BP bzw. AP` (siehe Abbildung rechts) um die y-Achse so entsteht eine Zone eines einschaligen Drehhyperboloids. Welchen Bruchteil davon nimmt jener Rotationskörper ein, der bei Drehung des Bogens SP bzw. SP` von Γ_f um die y-Achse entsteht?



Lösungen der Aufgaben zu §3 (Kubatur)

56) b) hyp.: $x^2 - y^2 = 225$, V = 13248π

57) b) hyp.: $x^2 - y^2 = 135$, V = 2412π

58) V=576π

59) V=576π

60) a) oberer (Neben-)Scheitel von ell, Hyperoskulation, b) $V_{ell} : V_{par} = 2:3$, c) $V_{ell} : V_{par} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$

61) b) V=5200π

63) b) $V' = \frac{1019r^2\pi h}{8}$, c) $r \approx 2$

64) a) $m \approx 945r^2h$, b) 40,96%

67) exaktes Volumen: $\frac{\pi}{60} \cdot \left(405 - 256\sqrt{2}\right)$

68) c) 120cm, d) 13(!) Liter (Bei Realisierung stellt sich 13 im nachhinein mit Sicherheit NICHT als Glückszahl heraus … ☺)

70) V= $\frac{401125\pi}{2}$ mm^3 =63cl

72) b) $V = \frac{8\pi}{15} \cdot r^2 \cdot h$

73) b) r : h = 4 : 3

74) a=6, r=6, $V_{HYPERBOLOID}$=66π, V_{KEGEL}=48π

79) b) $V_{\text{Paraboloidkalotte}} : V_{\text{unendliches Horn}} = 2:1$

80) gleiche Höhe und gleiches Volumen (64π) , nicht verallgemeinerungsfähig (für keine Flüssigkeit! ☺)

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

82) $V = \frac{\pi}{4}$

85) a) P(2a|2b)

b) $\frac{4}{5}$

Bio(eistee)-Maturant Roli