§2. Kubatur (Aufgaben 56 bis 110)

56) a) Wie viele Punkte haben die Ellipse ell [ell.: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$] und die Parabel par $\left[\text{par.: } y = b - \frac{b}{2a^2} \cdot x^2\right]$ gemeinsam? Ermittle die entsprechenden Koordinaten und gib ggf. die **Art der Berührung** an!

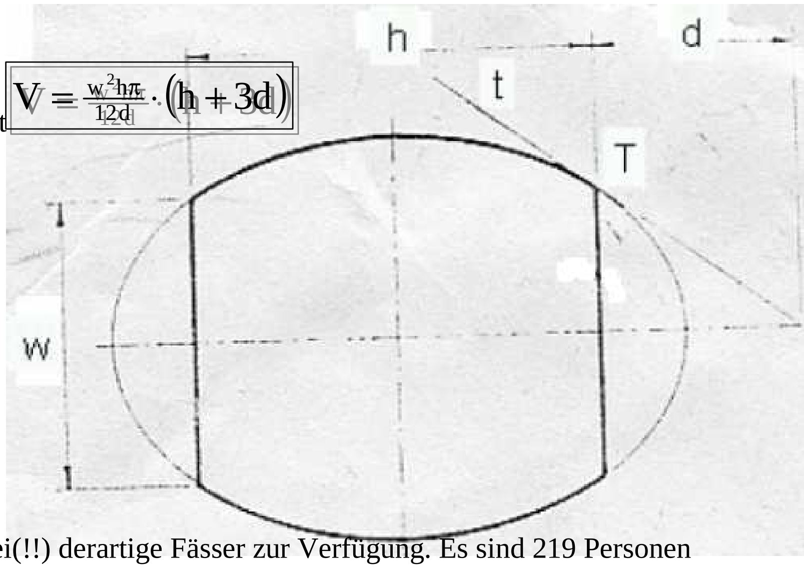
b) Rotiert das von ell und der x-Achse bzw. das von par und der x-Achse begrenzte Segment um die y-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. In welchem Verhältnis stehen derer Volumina?

57) Eine Ellipse ell in erster Hauptlage (halbe Hauptachsenlänge a, halbe Nebenachsenlänge b, Brennweite e) wird um 90° um den Ursprung gedreht, wodurch eine zu ell kongruente Ellipse ell´ entsteht, die mit ell ein Flächenstück begrenzt, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt, für dessen Volumen V die Formel $V = \frac{4ab\pi}{3} \cdot \left(a - \frac{e^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ hergeleitet werden kann.

Wähle nun a) oder b)!

a) Beweise diese exotische Volumsformel!
b) Verifiziere sie für die konkrete Ellipse ell [ell.: $9x^2 + 16y^2 = 3600$]!
c) Obligatorisch [egal, ob zuvor a) oder b) gewählt]: Was passiert mit der Formel für e=0? Interpretiere geometrisch!

58) Durch einen im ersten Quadranten liegenden Punkt P(a|b) wird der Graph Γ_f einer Polynomfunktionen zweiten Grades gelegt, welcher sowohl die x-Achse als auch die durch P gehende Parabel par in erster Hauptlage in P berührt. Beweise [oder verifiziere für P(10|10)], dass der Drehkörper, der bei Rotation des von der x-Achse, par und Γ_f begrenzten Flächenstück um die x-Achse entsteht, exakt $\frac{3\pi ab^2}{10}$ beträgt.



59) Nebenstehende Skizze zeigt den Längsschnitt eines Fasses mit elliptischen Dauben.
Wähle a) oder b), wobei bei der Wahl von b) zusätzlich c) und d) zu bearbeiten sind:

a) Beweise $\boxed{\text{nebenstehende Formel}}$ für das Volumen von diesem Fass!

b) Verifiziere die Formel für die speziellen Werte h=160cm, w=72cm und d=45cm.

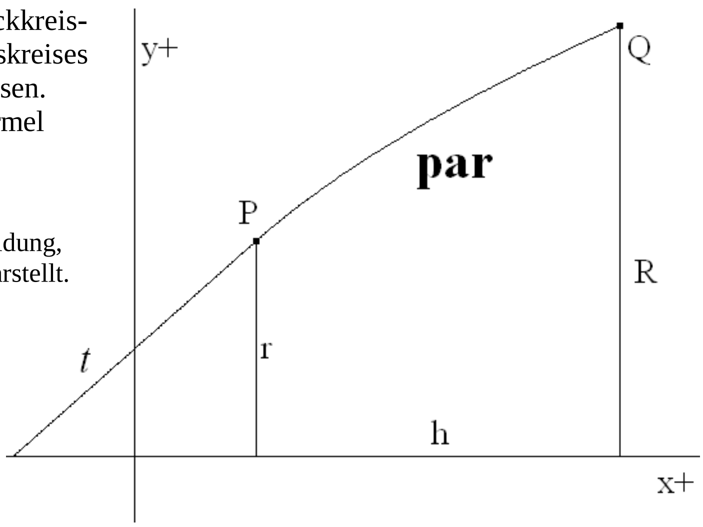
c) Gib den Durchmesser des Fasses (klarerweise an der breitesten Stelle!) an!

d) Utopie(!): Bei der Maturafeier stehen zwei(!!) derartige Fässer zur Verfügung. Es sind 219 Personen anwesend. Wie viel Liter könnte(!!!) theoretisch jeder trinken, wenn man gerecht aufteilt?

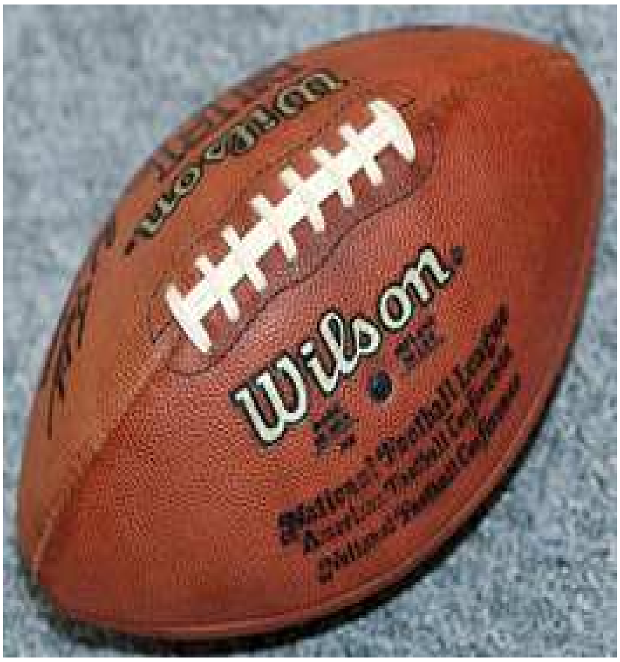
60) Eine Drehparaboloidscheibe (Höhe h, Basis- bzw. Deckkreisradius r bzw. R, wobei R>r) wird unterhalb ihres Basiskreises von einem koaxialen Drehkegel berührend abgeschlossen. Dann gilt für das Volumen des Gesamtkörpers die Formel $\boxed{V = \frac{\pi h}{6} \cdot \frac{3R^4+r^4}{R^2-r^2}}$.

Wähle a) oder b). Be(tr)achte in jedem Fall die rechte Abbildung, welche einen Achsenschnitt des oben genannten Körpers darstellt.

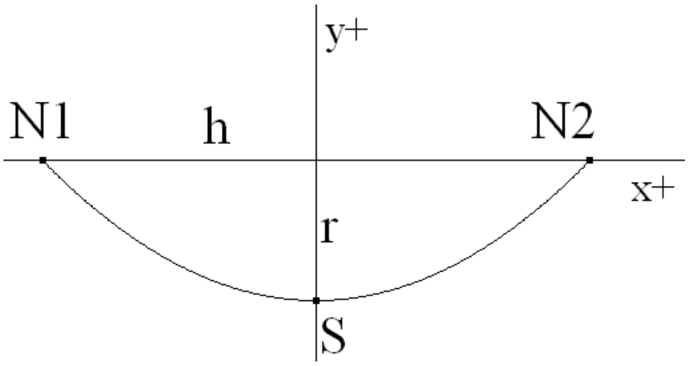
a) Beweise diese Formel!
b) Verifiziere sie für P(3|24) und Q(x_Q|48)!



61) Ein ***American Football*** entstehe, indem man den von der Parabel par $\left[\text{par.: } y = \frac{r}{h^2} \cdot \left(4x^2 - h^2\right)\right]$ und der x-Achse begrenzten Bereich um die x-Achse rotieren läßt.



a) Zeige zunächst, dass obige Parabel tatsächlich die in der unteren Skizze illustrierten **Voraussetzungen** erfüllt. Verbalisiere **selbige**, bevor du sie nachweist!



b) Leite auf Grundlage des obigen mathematischen Modells die Formel für das Volumen von einem derartigen ***Football*** her!

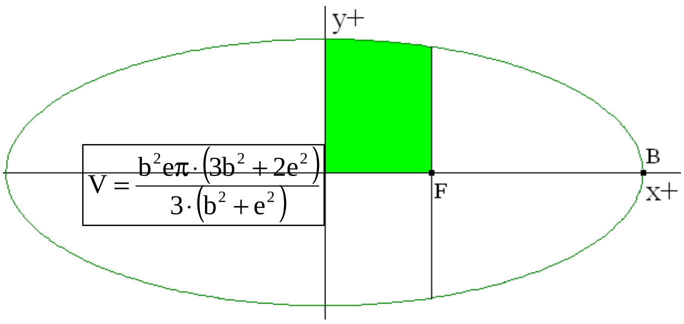
62) Kevin berichtet beim 40jährigen Maturatreffen stolz, das ganz große Geld gemacht zu haben (Immerhin lädt er die ganze Klasse samt aller zur Verfügung stehenden Lehrer zu einer geschlossenen Gesellschaft in die *Creperie* ein! ☺), und zwar (indirekt!) mit Mathematik. Unser werter "Kubatur-Kev" hat sich nämlich auf die Produktion von Footballs spezialisiert, welche nicht wie jene in Aufgabe 61) als Meridianschnitte doppelte Parabelsegmente aufweisen, sondern (translatierte) Potenzkurven höherer Ordnung als Profile aufweisen, die technischen Details folgen nun anbei: Der "**KLF**" (steht nicht für die **K**leine **L**ösungs-**F**ormel, sondern für **K**evs **L**ässigen **F**ootball) entsteht, indem die Quartik mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{8d}{h^4} \cdot \left(\frac{h^4}{16} - x^4\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse rotiert.

a) Beweise zunächst, dass diese Quartik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!

b) Beweise, dass der KLF ein um ein Drittel größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{2d}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse entsteht.

Aus der dreistündigen Schularbeit der 8D (2009/10):

63) Von einer Ellipse ell in erster Hauptlage kennt man den rechtsseitigen Brennpunkt F(3|0) sowie den rechtsseitigen Hauptscheitel B(9|0). Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Zone eines eiförmigen Drehellipsoids. Verifiziere für deren Volumen V die nebenstehende Formel!

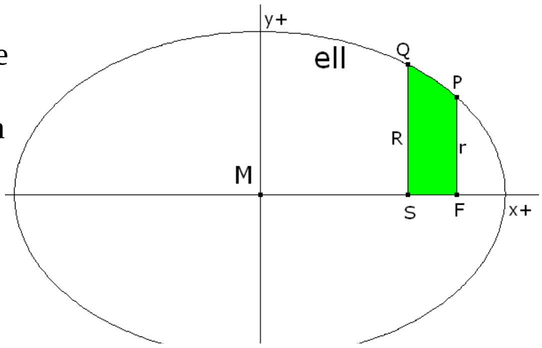


64) (Inhaltliche) Fortsetzung von Aufgabe 62):
Zu Beginn von Daves "Footballkarriere" war Romal seine rechte Hand, ergo: stellvertretender Generaldirektor! Dann begann er, durch Fälschen von Kevs Büchern auf eigene Faust (vermeintlich!) noch bessere Footballtypen zu produzieren, und zwar unter Verwendung einer Sixtix anstelle von Kevs Quartik, Details folgen nun anbei: Der "ROMAL" (Romals ovales männliches AusnahmeLuftgeschoss) entsteht, indem die Sixtik mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{32d}{h^6} \cdot \left(\frac{h^6}{64} - x^6\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse rotiert.

a) Beweise zunächst, dass diese Sixtik überhaupt einen Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d erzeugt!
b) Beweise, dass der ROMAL ein um fast die Hälfte größeres Volumen aufweist als das Standardmodell, welches durch Rotation der Parabel mit der Gleichung $\boxed{y = \frac{2d}{h^2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - x^2\right)}$ im Intervall $\left[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\right]$ um die x-Achse entsteht.
c) Quantifiziere "ein um fast die Hälfte größeres Volumen"!

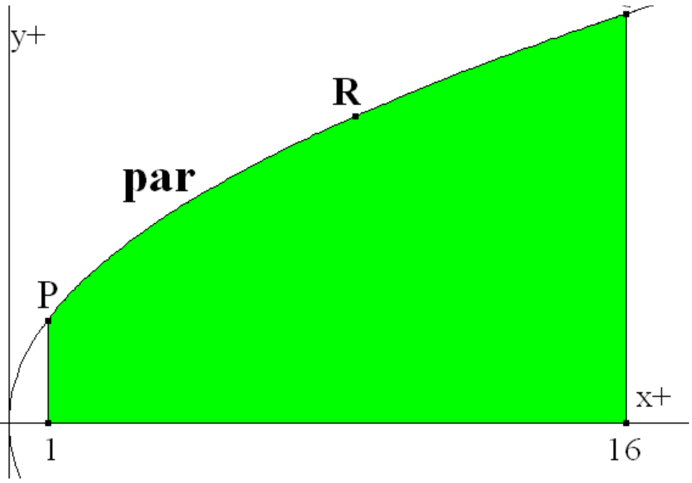
65) Beweise: Schreibt man einem Drehparaboloid Γ einen Drehkegel Φ um, der Γ längs seines Basiskreises berührt, dann verhalten sich die Volumina von Drehkegel und Drehparaboloid wie $4 : 3$.

66) In nebenstehender Abbildung gilt $\overline{MS} = b$, F ist der rechtsseitige Brennpunkt von ell. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehellipsoidzone der Höhe h mit dem Basiskreisradius r und dem Deckkreisradius R. Verifiziere anhand der konkreten Ellipse mit dem Hauptscheitel B(25|0) und dem rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) die allgemeingültige Volumsformel $V = \frac{h\pi}{3} \cdot \left(2b^2 - rR\right)$ für das Volumen dieser Zone!

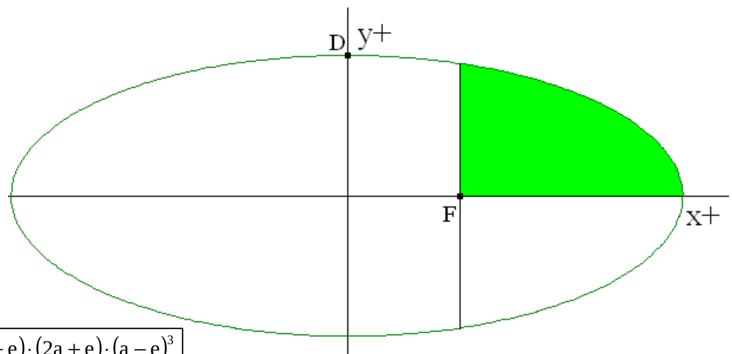


67) Rotiert ein Bogen PQ einer Parabel um ihre Achse, so entsteht eine Zone eines Drehparaboloids der Höhe h mit dem Basiskreisradius r_1 und dem Deckkreisradius r_2, für dessen Volumen V dann die Formel $\boxed{V = \frac{h \cdot \pi}{2} \cdot \left(r_1^2 + r_2^2\right)}$ gilt.

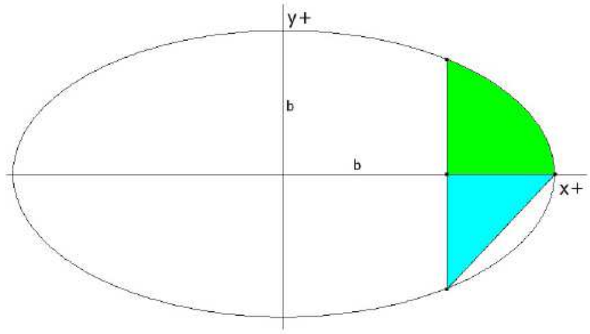
Verifiziere diese Volumsformel für die in Abbildung 2 skizzierte Parabel par, welche sich in erster Hauptlage befindet und durch R(9|18) geht, und zwar für den angegebenen Bogen PQ (Der halbe Längsschnitt ist der Raumvorstellung wegen auch schon gefärbt eingezeichnet!)!



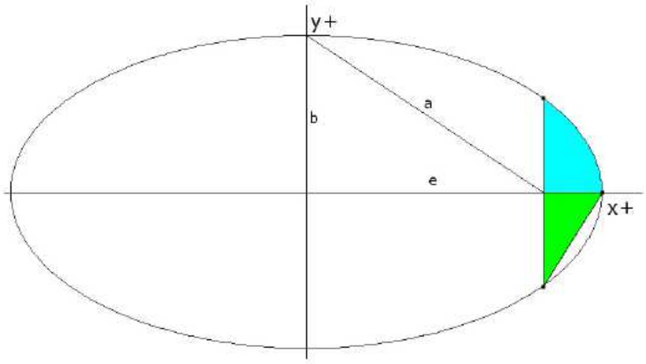
68) Von einer Ellipse ell in erster Hauptlage kennt man den rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) sowie den oberen Nebenscheitel D(0|15). Rotiert der markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine eiförmige Drehellipsoidkalotte. Verifiziere für deren Volumen V die nebenstehende Formel!



$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot (a+e) \cdot (2a+e) \cdot (a-e)^3}{3a^2}}$$



69) Rotieren die in obiger Abbildung markierten Gebiete um die $x-$Achse, so entsteht eine Ellipsoidkappe bzw. ein Drehkegel. Zeige, dass die Volumina sich wie $a+b$ zu $2a+b$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2+25y^2=5625$).

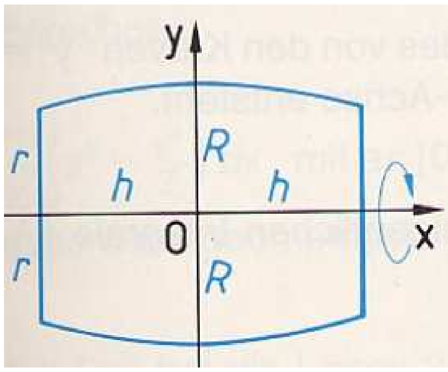


70) Rotieren die in obiger Abbildung markierten Gebiete um die $x-$Achse, so entsteht eine Ellipsoidkappe bzw. ein Drehkegel. Zeige, dass die Volumina sich wie $a+e$ zu $2a+e$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2+25y^2=5625$).

71) Über die Mathematik der (**Wein-**)Fässer … (**Die Maturafeier wartet!** ☺)

$$\boxed{V=\frac{2\pi h}{15}\cdot\left(3r^2+4Rr+8R^2\right)}$$

Für das Volumen V von einem Fass mit parabolischen Dauben (vgl. Abbildung rechts) gilt die nebenstehende Formel. Beweise diese Formel (Verwende dazu den Ansatz $y=px^2+q$!)



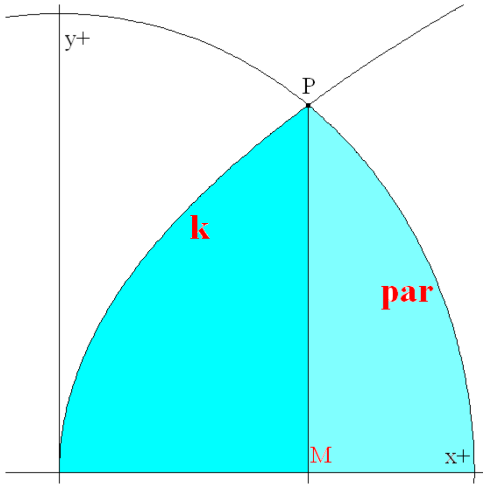
72) **Mehr** über die Mathematik der (**Wein-**)Fässer …

Analog zu Aufgabe 71), wobei die parabolischen Dauben nun durch elliptische Dauben zu ersetzen sind und insbesondere zu zeigen ist, dass …

a) für das entsprechende Fassvolumen V die Formel $V=\frac{2\pi h}{3}\cdot\left(2R^2+r^2\right)$ gilt,

b) das Fass mit elliptischen Dauben stets einen größeren Rauminhalt aufweist als jenes mit parabolischen Dauben (selbstverständlich bei jeweils gleichen Werten für h, r und R!).

73) Die Parabel par[par: $y^2 = 16x$] und der Kreis k[k: $x^2 + y^2 = 225$] begrenzen (vgl. Abbildung rechts!) ein Flächenstück, welches bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper erzeugt. In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Teilkörper, in welche der Drehkörper durch jenen Kreis geteilt wird, der entsteht, wenn die (halbe) Sehne MP mitrotiert?



74) Leite die Formel $V = \frac{h^2\pi}{3} \cdot (3r - h)$ für das Volumen einer Kugelkalotte der Höhe h (mit dem Kugelradius r) her!

75) Die algebraische Kurve mit der Gleichung $x^2y^3 = 1$ rotiert über einem Intervall $[a;b]$ (mit $0 < a < b < \infty$) um die $x-$Achse, wodurch ein Drehkörper mit dem Basiskreisradius r_1, der Höhe h und dem Deckkreisradius r_2 entsteht. Beweise für diesen Drehkörper die Volumsformel

$$\boxed{V = \frac{3 \cdot \pi \cdot h \cdot \sqrt{r_1^3} \cdot \sqrt{r_2^3}}{r_1 + r_2 + \sqrt{r_1 \cdot r_2}}}$$

oder prüfe die Formel für das Intervall [1;64]!

76) Rotiert ein Bogen der NEILschen Kurve k [$k : y^2 = x^3$] um die $x-$Achse, so entsteht ein Drehkörper mit dem Basiskreisradius r_1, der Höhe h und dem Deckkreisradius r_2. Beweise für diesen Drehkörper die Volumsformel

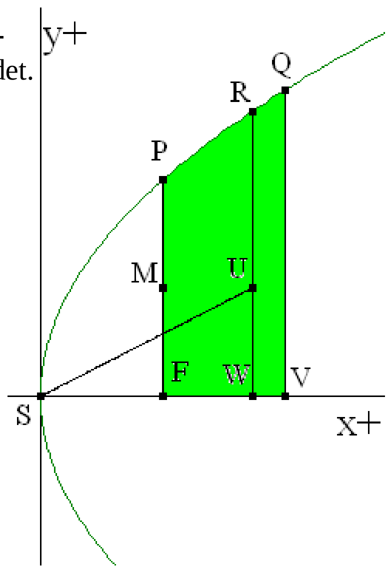
$$V = \frac{\pi}{4} \cdot h \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^2} + \sqrt[3]{r_2^2}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{r_1^4} + \sqrt[3]{r_2^4}\right) .$$

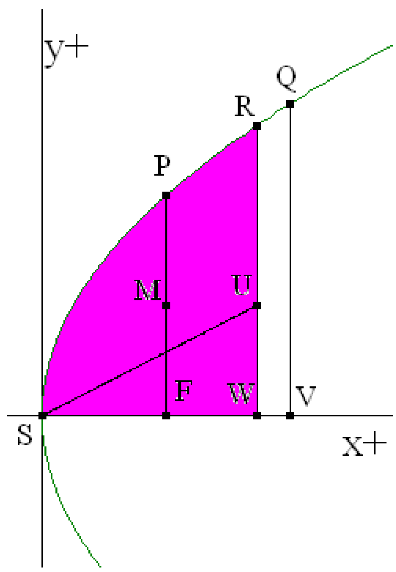
… oder/und(!) prüfe die Formel für das Intervall [4;16]!

77) In den nebenstehenden Abbildungen ist jeweils die gleiche Parabel in erster Hauptlage mit dem Focus F, dem Scheitel S sowie dem Spiegelpunkt V von S an F abgebildet.

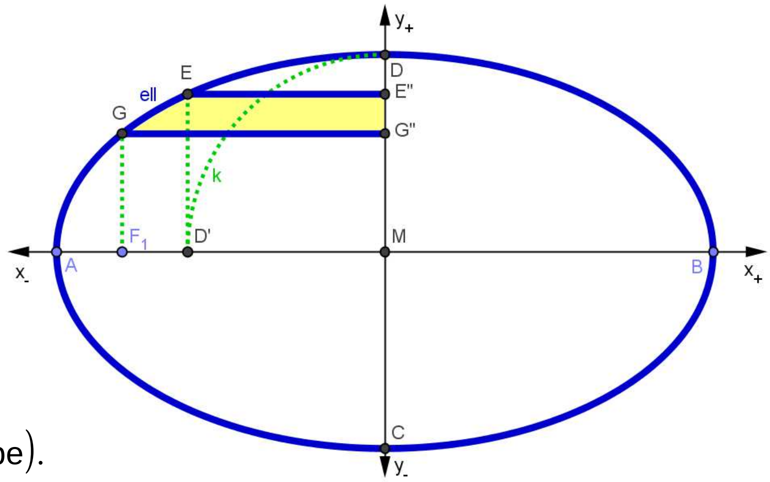
a) Rotiert der in der linken Abbildung grün gefärbte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehparaboloidzone. Berechne deren Volumen V in Abhängigkeit des Parabelparameters p!

b) In der rechten Abbildung bezeichnet M den Mittelpunkt der Strecke FP, ferner gilt $\overline{FM} = \overline{WU} \wedge \overline{SU} = \overline{FP}$. Rotiert der violett gefärbte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehparaboloidkalotte. Berechne deren Volumen V´ ebenso in Abhängigkeit des Parabelparameters p und zeige, dass $V = V´$ gilt!



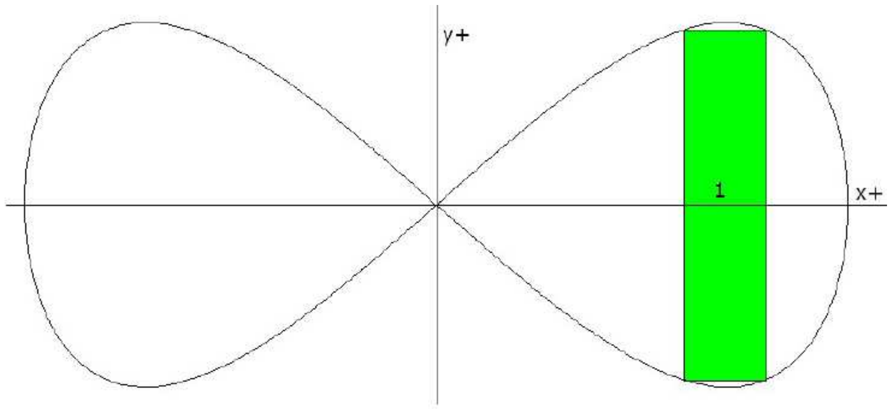


78) In nebenstehend abgebildeter Ellipse ell wurde der obere Nebenscheitel D um +90° um M in D´ gedreht. G liegt über dem linken Focus F_1 von ell, E direkt über D´. Durch Rotation des kürzeren Ellipsenbogens von E nach G (bzw. äquivalent: des gefärbten Gebiets) um die y-Achse entsteht eine Zone eines linsenförmigen Ellipsoids mit dem Volumen $V=\frac{b\pi}{3a}\cdot|b-e|\cdot\left(2a^2-be\right)$.



Beweise dies oder rechne es am konkreten Beispiel der Ellipse ell [ell: 9x²+25y²=5625] nach!

79)

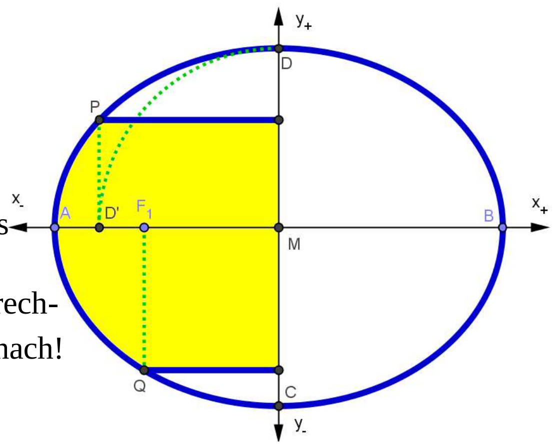


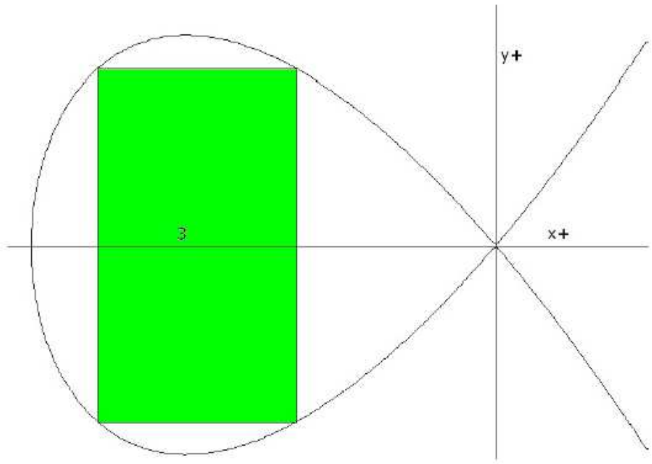
In obiger Figur ist die Lissajous-Kurve k mit der Gleichung $k:\ y^2=x^2(25-x^2)$ abgebildet.

(a) Rotiert die rechte Schleife von k um die x–Achse, so entsteht ein Drehkörper, dem sich wie in der Abbildung illustriert genau ein Zylinder der Höhe 1 einbeschreiben läßt. Berechne den zugehörigen Radius und begründe die Eindeutigkeit der Lösung!

(b) Zeige ohne Taschenrechner, dass der Zylinder mehr als $\frac{1}{3}$ des in (a) genannten Drehkörpers einnimmt!

80) Der obere Nebenscheitel D der rechts abgebildeten Ellipse wurde um +90° um M in D´ gedreht. Q liegt unter dem linken Brennpunkt F_1 von ell, P direkt über D´. Durch Rotation des kürzeren Ellipsenbogens von P nach Q (bzw. äquivalent: des gefärbten Gebiets) um die y-Achse entsteht eine Zone eines linsenförmigen Ellipsoids mit dem Volumen $V=\frac{b\pi}{3a}\cdot(b+e)\cdot\left(2b^2+be+2e^2\right)$. Beweise dies oder rechne es am Beispiel der Ellipse ell: 16x²+25y²=10000 nach!

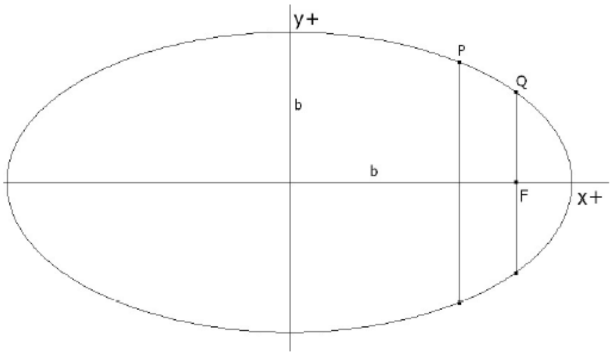




81) In obiger Figur ist der NEWTON-Knoten k mit der Gleichung $k:\ y^2 = x^2(x+7)$ abgebildet.

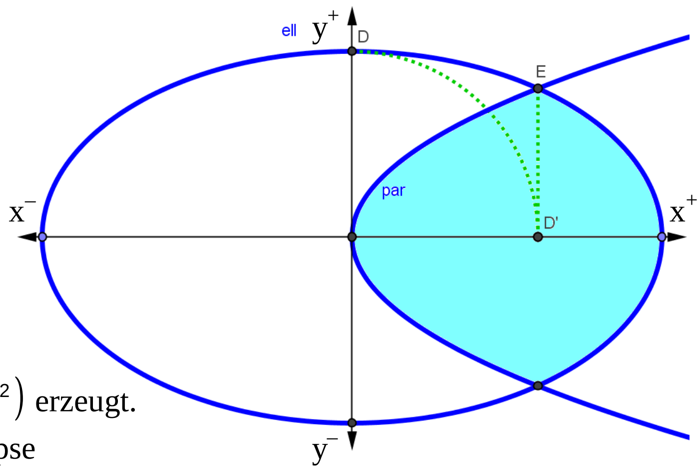
(a) Rotiert die Schleife von k um die $x-$Achse, so entsteht ein Drehkörper, dem sich wie in der Abbildung illustriert genau ein Zylinder der Höhe 3 einbeschreiben läßt. Berechne den zugehörigen Radius und begründe die Eindeutigkeit der Lösung!

(b) Zeige ohne Taschenrechner, dass der Zylinder mehr als 50% des in (a) genannten Drehkörpers einnimmt!

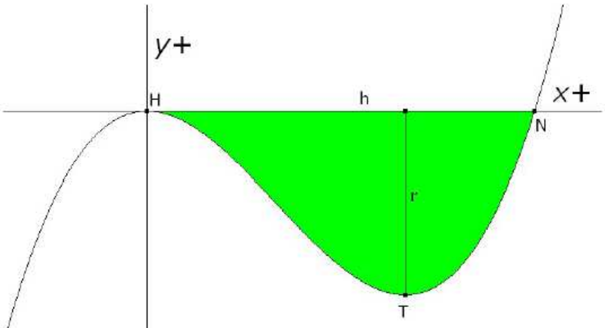


82) Rotiert in obiger Abbildung der Ellipsenbogen von P nach Q bzw. die Strecke PQ um die $x-$Achse, so entsteht eine Zone eines Rotationsellipsoids bzw. ein Drehkegelstumpf. Zeige, dass die Volumina sich wie $a^2 + be$ zu $2a^2 - be$ verhalten (optional: Beweis oder Verifikation für die konkrete Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 5625$). Zeige allgemein, dass der Quotient $\frac{a^2+be}{2a^2-be}$ stets ≤ 1 ist!

83) In der rechts abgebildeten Ellipse wurde der obere Nebenscheitel D um –90° um den Koordinatenursprung gedreht, woraus der Punkt D´ hervorgeht, über dem unmittelbar der Ellipsenpunkt E liegt. Durch E geht auch eine Parabel in erster Hauptlage par, welche mit der Ellipse im ersten (und vierten) Quadranten ein Gebiet begrenzt, das bei Rotation um die x-Achse einen Drehkörper mit dem Volumen $V = \frac{b^2\pi}{6a^2}\cdot(a-b)\cdot\left(4a^2+ab+b^2\right)$ erzeugt. Beweise dies oder rechne es anhand der Ellipse ell mit der Gleichung ell:$9x^2+25y^2=140625$ nach!

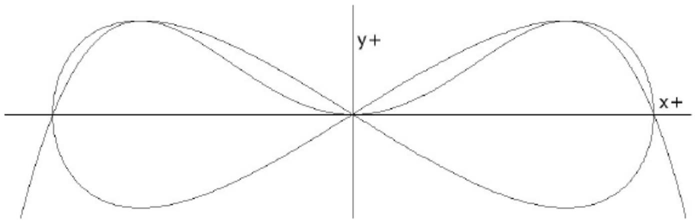


84) Der rechts gefärbte Bereich wird von der x-Achse und vom Graphen der Funktion f [$y=f(x)=x^3-6x^2$] begrenzt und generiert bei Drehung um die x-Achse einen Drehkörper vom Volumen $V=\frac{243\pi}{560}\cdot r^2 h$. Weise die Richtigkeit dieser Volumsformel nach!



85) Ersetzt man den Punkt E in Aufgabe 83) durch jenen Punkt auf ell, welcher sich direkt über dem rechten Brennpunkt von ell befindet, so entsteht auch ein Drehkörper, und zwar mit dem Volumen $V=\frac{b^2\pi}{6a^2}\cdot(a-e)\cdot\left(4a^2+ae+e^2\right)$. Rechne dies für die Ellipse ell:$9x^2+25y^2=2250000$ nach oder führe einen allgemeinen Beweis!

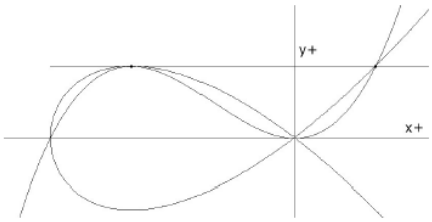
86) Gegeben sind die Kurven k_1 [$k_1:\ y^2=x^2(2-x^2)$] und k_2 [$k_2:\ y=x^2(2-x^2)$].



(a) Ordne den Kurven in obiger Abbildung entsprechend die richtige Beschriftung zu (Begründung!) und zeige, dass sie idente Hochpunkte haben. Wie läßt sich die Existenz gemeinsamer Extremstellen (was noch nicht zwingenderweise zusammenfallende Extrempunkte impliziert! Begründe!) anhand eines Vergleichs der beiden Kurvengleichungen unmittelbar ohne Rechnung einsehen?

(b) k_1 und k_2 begrenzen mit den positiven Koordinatenachsen jeweils ein Flächenstück, welches bei Rotation um die $x-$Achse jeweils einen Drehkörper erzeugt. Zeige, dass sich die Volumina der beiden Drehkörper wie $16:21$ verhalten.

87) Gegeben sind die Kurven k_1 [$k_1:\ y^2=x^2(x+3)$] und k_2 [$k_2:\ y=\frac{1}{2}\cdot x^2(x+3)$].

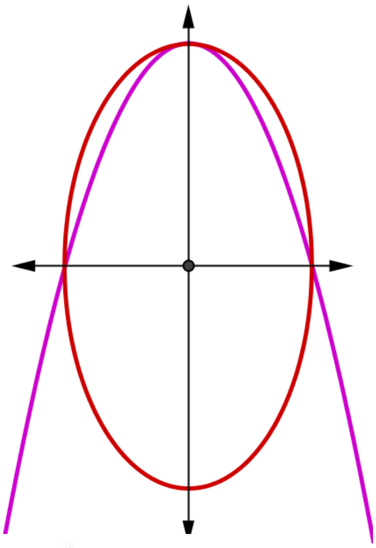


(a) Ordne den Kurven in obiger Abbildung enstprechend die richtige Beschriftung zu (Begründung!) und zeige, dass sie idente Hochpunkte haben. Wie läßt sich die Existenz gemeinsamer Extremstellen (was noch nicht zwingenderweise zusammenfallende Extrempunkte impliziert! Begründe!) anhand eines Vergleichs der beiden Kurvengleichungen unmittelbar ohne Rechnung einsehen?

(b) Zeige, dass die beiden Kurven und ihre gemeinsame Hochpunkttangente noch einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen!

(c) Rotieren die beiden Gebiete, welche die beiden Kurven im zweiten Quadranten jeweils mit der x-Achse begrenzen um ebenjene, so entstehen zwei Drehkörper, von denen zu zeigen ist, dass sich ihre Volumina wie 27:35 verhalten.

88) Zeige, dass die Ellipse ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ von der Parabel par: $y = b - \frac{b}{a^2} \cdot x^2$ zweimal auf der x- und einmal auf der y-Achse geschnitten wird, womit (siehe Abbildung rechts!) die beiden Kurven oberhalb der x-Achse mit selbiger zwei in etwa gleich große Gebiete begrenzen. Beweise oder zeige am Beispiel der Parabel par: $y = 27 - 3x^2$, dass sich die Volumina jener beiden Drehkörper, die durch Rotation dieser Gebiete um die y-Achse entstehen, wie 3:4 verhalten!



89) Wie 88) mit der Rotation um die x-Achse, wobei das entsprechende Verhältnis nun 4:5 beträgt!

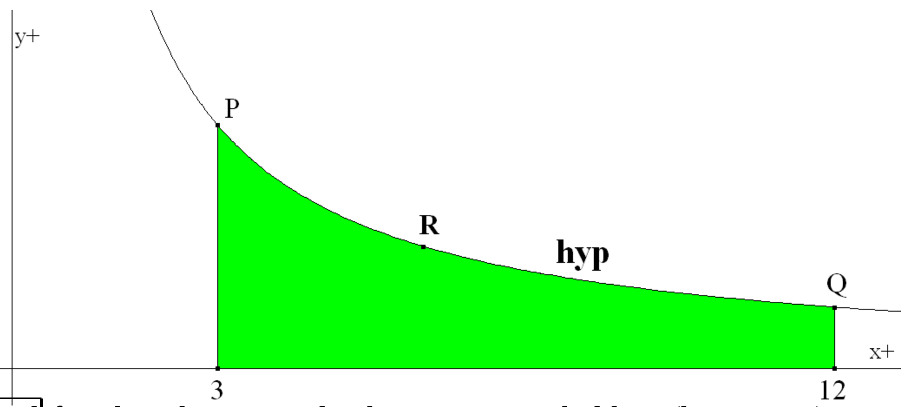
90) Eine Viertelellipse [ell: $6561x^2 + 256y^2 = 1679616$ für $x \leq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] sowie ein Kurvenbogen k [$k: \ y = 81 - x^4$ für $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] rotieren um die $x-$Achse und erzeugen dadurch einen aus zwei "Körperteilen" bestehenden Drehkörper. Zeige, dass die beiden Kurven einander in den Übergangspunkten berühren und die Volumina der beiden Körperteile sich wie 5 : 1 verhalten!

91) Eine Viertelellipse [ell: $4096x^2 + 729y^2 = 2985984$ für $x \leq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] sowie ein Kurvenbogen k [$k: \ y = 64 - x^3$ für $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] rotieren um die $x-$Achse und erzeugen dadurch einen aus zwei "Körperteilen" bestehenden Drehkörper. Zeige, dass die beiden Kurven einander in den Übergangspunkten berühren und die Volumina der beiden Körperteile sich wie 7 : 1 verhalten!

92) Eine Viertelellipse [ell: $1024x^2 + 625y^2 = 640000$ für $x \leq 0 \wedge y \geq 0$] sowie ein Kurvenbogen k [$k: \ y = 32 - x^5$ für $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] rotieren um die $x-$Achse und erzeugen dadurch einen aus zwei "Körperteilen" bestehenden Drehkörper. Zeige, dass die beiden Kurven einander in den Übergangspunkten berühren und die Volumina der beiden Körperteile sich wie 11 : 1 verhalten!

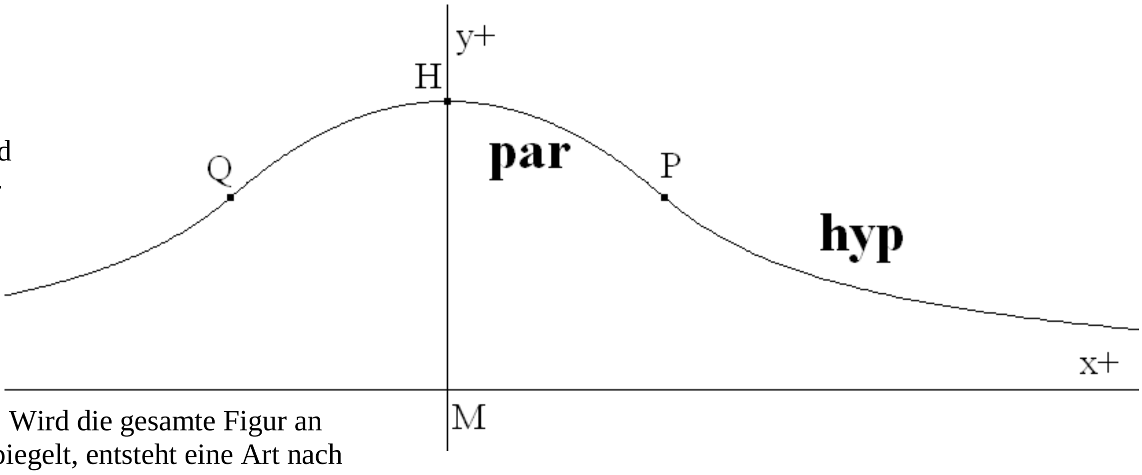
93) Eine Viertelellipse [ell: $625x^2 + 324y^2 = 3240000$ für $x \leq 0 \wedge y \geq 0$] sowie ein Parabelbogen k [$k: \ y = 100 - x^2$ für $x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$] rotieren um die $x-$Achse und erzeugen dadurch einen aus zwei "Körperteilen" bestehenden Drehkörper. Zeige, dass die beiden Kurven einander in den Übergangspunkten berühren und die Volumina der beiden Körperteile sich wie 9 : 1 verhalten!

94) Rotiert ein Bogen PQ einer gleichseitigen Hyperbel hyp um eine ihrer Asymptoten, so entsteht ein hornförmiger Drehkörper der Höhe h mit dem Basiskreisradius r_1 und dem Deckkreisradius r_2, für dessen Volumen V dann die Formel $\boxed{V = r_1 \cdot r_2 \cdot h \cdot \pi}$ gilt.



Verifiziere diese Volumsformel für obig skizzierte gleichseitige Hyperbel hyp (hyp: xy=c)*, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, ↑
wobei hyp durch R(6|4) verläuft, und zwar für den ↑
angegebenen Bogen PQ, wenn dieser um die x-Achse gedreht wird. Zur Berechnung von c: Satz von Bamford! →↑
(Der halbe Längsschnitt ist der Raumvorstellung wegen auch schon gefärbt eingezeichnet!)

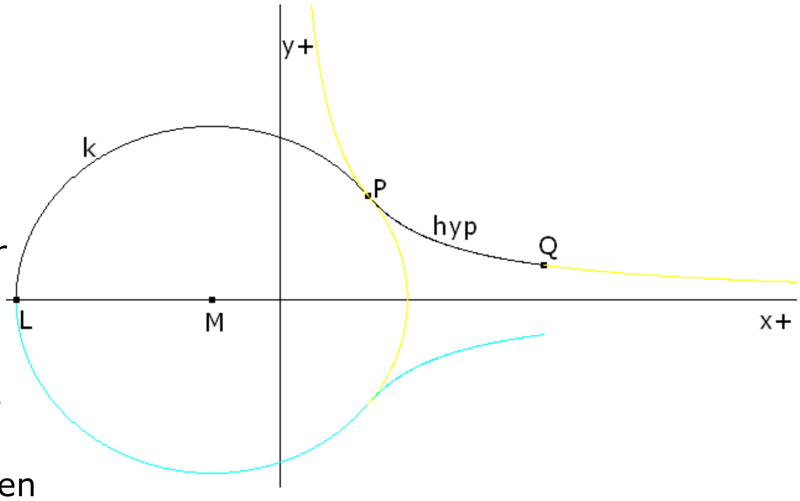
95) Die gleichseitige Hyperbel hyp (Asymptoten sind die Koordinatenachsen!) geht in ihrem Scheitelpunkt P(r|r) tangentiell in eine zur y-Achse symmetrische Parabel par über. Wird die gesamte Figur an der y-Achse gespiegelt, entsteht eine Art nach links und rechts unendliche) Glockenkurve, welche bei Rotation um die x-Achse einen nach beiden Seiten offenen Drehkörper erzeugt. Beweise:



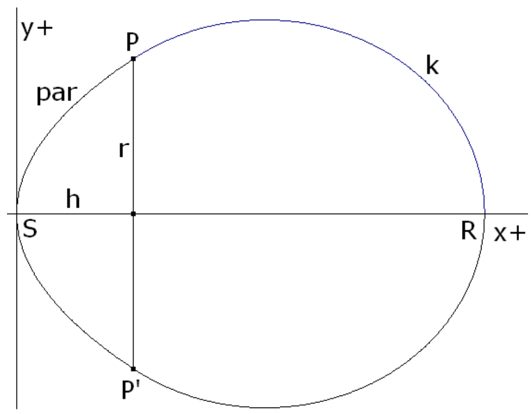
a) Der Kehlkreis dieses Drehkörpers weist einen Durchmesser von 3r auf!

b) Die Normalebenen auf die Drehachse durch P und seinen Spiegelpunkt Q an der y-Achse teilen das Gesamtvolumen des Körpers im fortlaufenden Verhältnis 5:18:5.

96) In nebenstehender Abbildung ist hyp jene gleichseitige Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten, welche durch den Punkt P(9/12) verläuft. k ist jener auf der x-Achse zentrierte Kreis, welcher hyp in P berührt. Rotiert der kürzere Kreisbogen LP sowie der Hyperbelbogen PQ [mit Q(27/y_Q)] um die x-Achse, so entsteht ein glühbirnenförmigen Drehkörper, der sich aus einer Kugelkalotte mit dem Volumen V_K und einer spindelförmigen Hyperboloidzone mit dem Volumen V_H zusammensetzt. Berechne das Volumen dieser Glühbirne und kontrolliere, dass V_K:V_H=12:1 gilt! (Arbeite notwendigenfalls mit dem Zwischenergebnis M(–7/0), wobei dann die Berührung zwischen k und hyp aber nachzuweisen ist!)

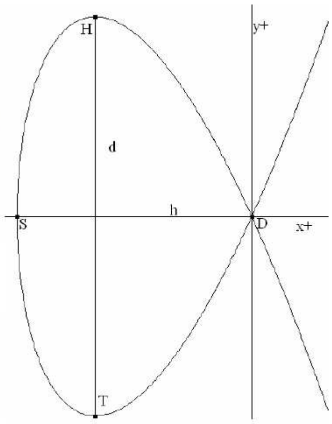


97) Nebenstehend ist der Meridianschnitt eines Drehkörpers zu sehen, welcher durch Rotation eines Parabelbogens SP und eines in P tangentiell anschließenden Kreisbogens PR um die x-Achse entsteht, wobei k auf der Drehachse zentriert ist. Gilt das Verhältnis r:h=3:2, so ergibt sich das Volumen V des gesamten Drehkörpers via V=4πr²h. Rechne dies für (h/r)=(8/12) nach!

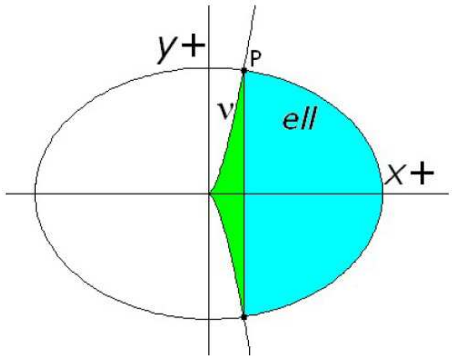


98) a) Drücke die Parameter a und b in der Gleichung ν: $ay^2 = x^2 \cdot (x+b)$ derart durch d und h aus, dass sich jener (rechts abgebildete!) NEWTONsche Knoten ergibt, welcher bei Rotation seiner Schleife um die x-Achse einen Drehkörper der Höhe h $\left(h = \overline{DS} \right)$ mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser $\left(d = \overline{HT} \right)$ erzeugt.

b) Leite die Volumsformel $\boxed{V = \frac{9\pi}{64} \cdot d^2 \cdot h}$ für den in a) genannten Drehkörper her!

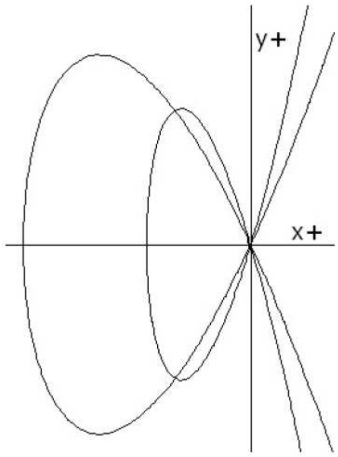


99)



ν: $y^2=cx^3$ (Zur Berechnung von c: Satz von Bamford!)
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

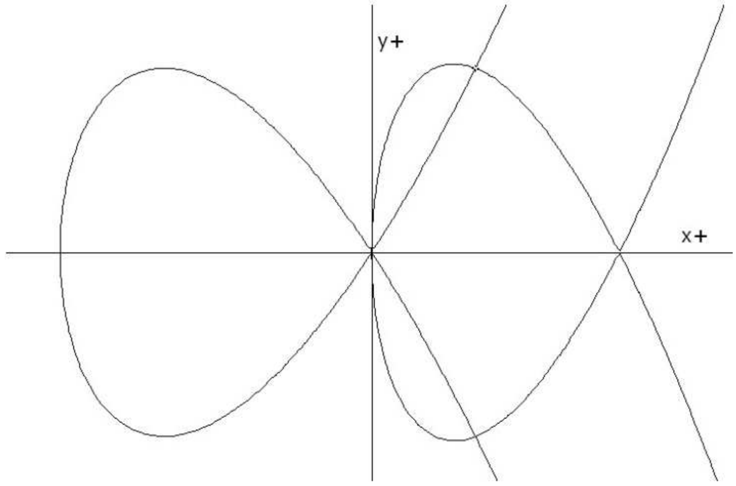
Durch $P(2|8)$ geht genau eine NEILsche Kurve ν sowie eine Ellipse ell in Hauptlage, welche ν ebenda rechtwinklig schneidet. Rotieren die beiden gefärbten Gebiete um die $x-$Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Zeige, dass sich deren Volumina wie 9 : 88 verhalten!



100) In obiger Figur sind die Kurven k_1 und k_2 mit den Gleichungen $k_1: \ 4y^2 = x^2(x+24)$ und $k_2: \ 3y^2 = 4x^2(x+11)$ abgebildet.

(a) Zeige, dass k_1 und k_2 einander in S rechtwinklig schneiden!

(b) Rotiert die Schleife von k_1 bzw. k_2 um die $x-$Achse, so entsteht jeweils ein Drehkörper. Zeige, dass sich die beiden Volumina ziemlich exakt wie 17 : 4 verhalten!



101) In obiger Figur sind die Kurven k_1 und k_2 mit den Gleichungen $k_1:\ 13y^2 = x^2(x+39)$ und $k_2:\ 81y^2 = 13x(x-31)^2$ abgebildet.

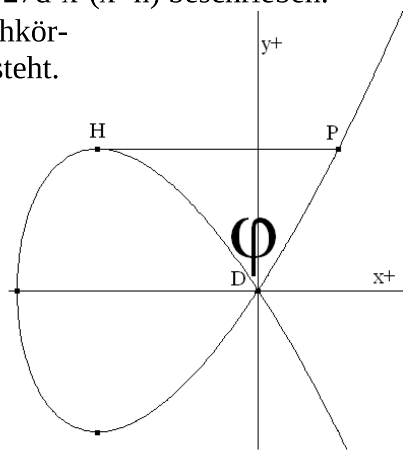
(a) Zeige, dass k_1 und k_2 einander in S rechtwinklig schneiden!

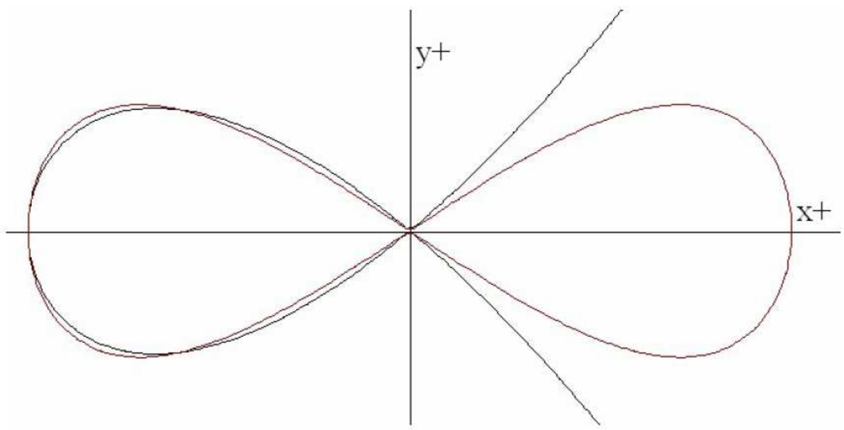
(b) Rotiert die Schleife von k_1 bzw. k_2 um die $x-$Achse, so entsteht jeweils ein Drehkörper. Zeige, dass sich die beiden Volumina ziemlich exakt wie 6 : 5 verhalten!

102) Die rechts abgebildete Kurve ν wird durch die Gleichung ν: $16h^3y^2 = 27d^2x^2(x+h)$ beschrieben.

a) Zeige, dass bei Rotation der Schleife von ν um die x-Achse ein Drehkörper der Höhe h mit dem maximalen Querschnittsdurchmesser d entsteht.

b) Durch separate Rotation der Kurvenbögen LT, TD und DP um die x-Achse entstehen drei Drehkörper, für deren Volumina die fortlaufende Proportion 11:16:15 nachzuweisen ist





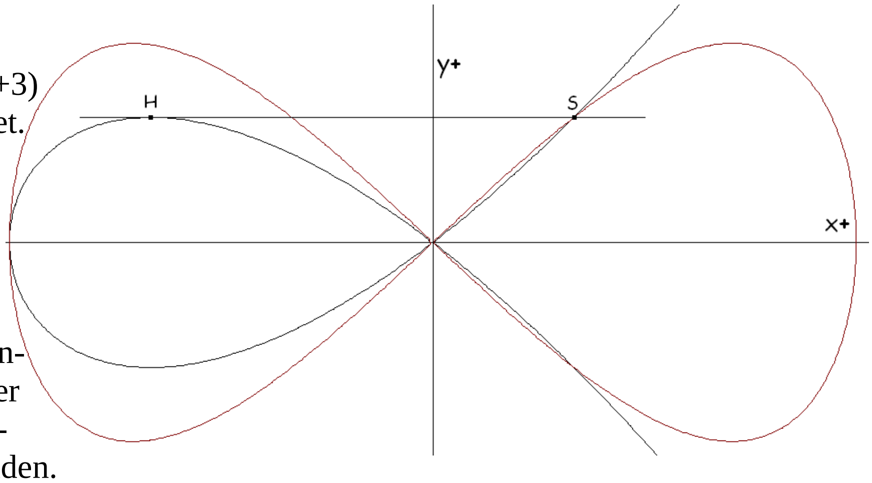
103) Gegeben sind die Kurven ν und τ mit den Gleichungen $\nu:\ 10000y^2 = 9x^2(100-x^2)$ und $\tau:\ 625y^2 = 9x^2(x+10)$, welche in der obigen Abbildung eingezeichnet sind.

(a) Beschrifte die jeweilige Kurve mit dem zugehörigen griechischen Kleinbuchstaben und begründe deine Wahl!

(b) Ermittle die Koordinaten aller Schnittpunkte der beiden Kurven!

(c) Rotieren die links von der $y-$Achse liegenden Schleifen der beiden Kurven um die $x-$Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Zeige, dass die beiden Volumina gleich groß sind!

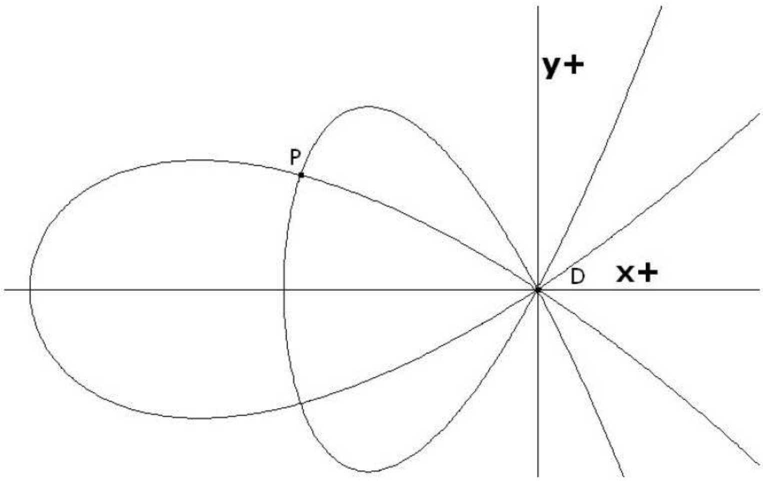
104) In nebenstehender Abbildung sind die Kurven k_1 und k_2 mit den Gleichungen k_1: $y^2=400x^2(x+3)$ und k_2: $y^2=200x^2(9–x^2)$ abgebildet.



a) Beschrifte die Kurven in der Abbildung entsprechend und begründe die jeweilige Zuordnung!

b) Zeige, dass die beiden Kurven einander im zweiten Schnittpunkt der Hochpunkttangente einer der beiden Kurven mit ebenjener schneiden.

c) Rotieren die links von der y-Achse liegenden Schleifen der beiden Kurven um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Berechne das Verhältnis der beiden Volumina!



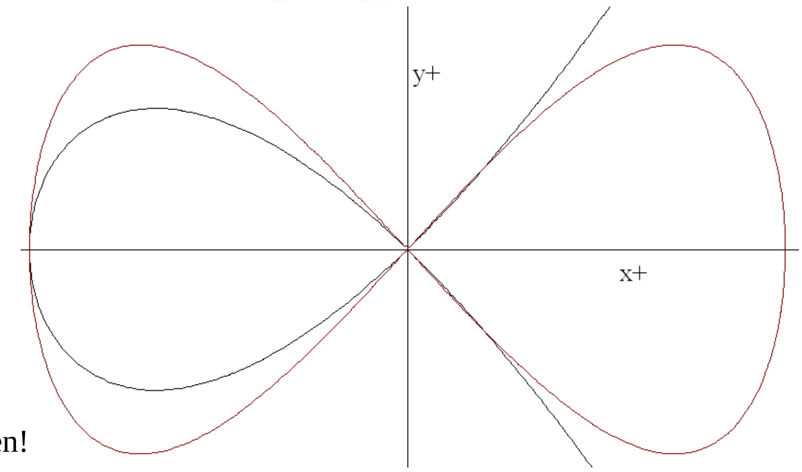
105) In obiger Figur sind die Kurven mit den Gleichungen $27y^2 = 8x^2(x + 15)$ und $54y^2 = x^2(x + 30)$ abgebildet.

(a) Ordne der jeweiligen Kurve die entsprechende Gleichung zu und begründe deine Wahl jeweils!

(b) Zeige, dass die beiden Kurven einander in vier Punkten rechtwinklig schneiden!

(c) Rotiert die Schleifen der beiden Kurven um die x−Achse, so entsteht jeweils ein Drehkörper. Zeige, dass die beiden Volumina gleich groß sind!

106) In nebenstehender Abbildung sind die Kurven k_1 und k_2 mit den Gleichungen k_1: $y^2=6x^2(x+5)$ und k_2: $2y^2=3x^2(25–x^2)$ abgebildet.



a) Beschrifte die Kurven in der Abbildung entsprechend und begründe die jeweilige Zuordnung!

b) Berechne die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte der beiden Kurven!

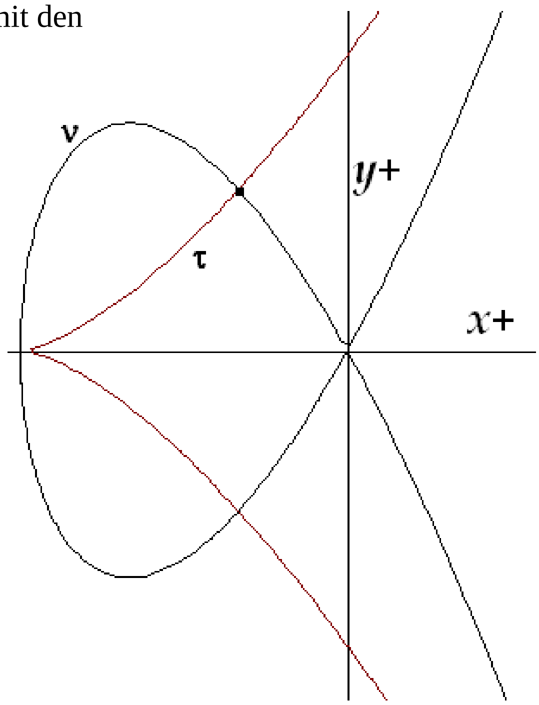
c) Rotieren die Schleifen der beiden Kurven um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Berechne das Verhältnis der beiden Volumina!

107) In nebenstehender Abbildung sind die Kurven ν und τ mit den Gleichungen $9y^2=4x^2(x+6)$ und $9y^2=(x+6)^3$ abgebildet.

a) Beschrifte die Gleichungen der Kurven in der Angabe entsprechend und begründe die jeweilige Zuordnung!

b) Berechne die Koordinaten aller gemeinsamen Punkte der beiden Kurven und zeige, dass ν und τ einander in zwei von diesen Schnittpunkten orthogonal schneiden!

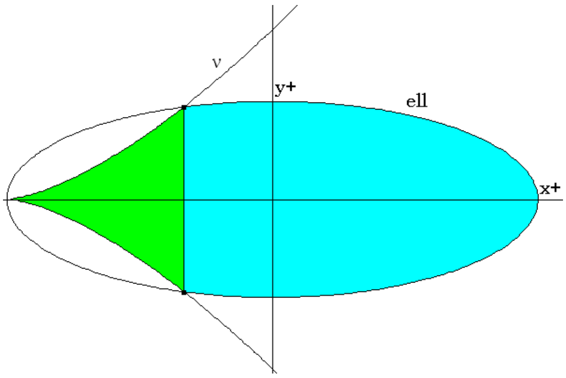
c) Rotieren die links von der y-Achse liegenden Bögen von ν und τ um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Berechne das Verhältnis der beiden Volumina!



108) Nebenstehend sind die Kurven mit den Gleichungen $27y^2 = (x+9)^3$ und $x^2 + 9y^2 = 81$ abgebildet.

a) Ordne den Gleichungen die entsprechenden Kurven zu (inkl. Begründung)!

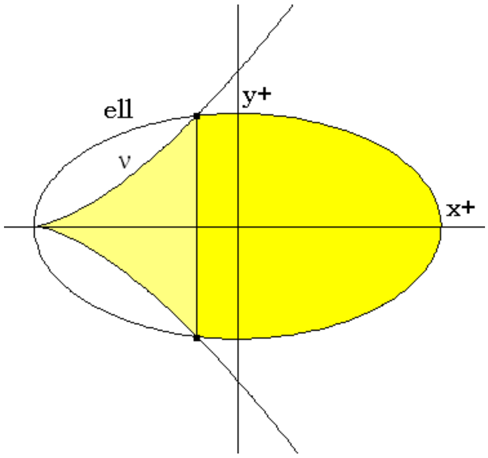
b) Rotieren die beiden eingezeichneten Gebiete um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. In welchem Verhältnis stehen deren Volumina?



109) Nebenstehend sind die Kurven mit den Gleichungen $32y^2 = 3\cdot(x+5)^3$ und $x^2 + 4y^2 = 25$ abgebildet.

a) Ordne den Gleichungen die entsprechenden Kurven zu (inkl. Begründung)!

b) Rotieren die beiden eingezeichneten Gebiete um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. In welchem Verhältnis stehen deren Volumina?

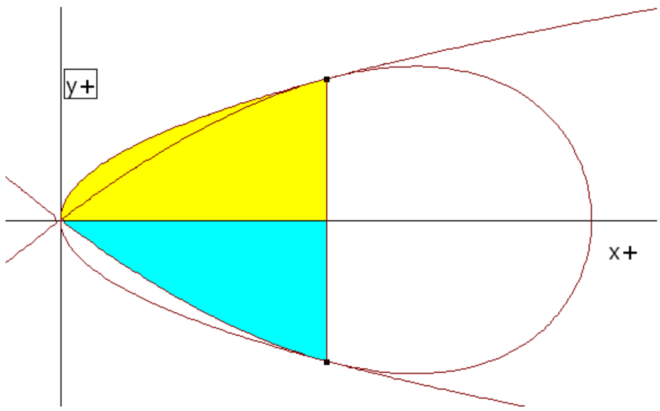


110) In der Figur rechts unten sind die Kurven mit den Gleichungen $y^2 = 27x$ und $y^2 = 3x^2\cdot(6–x)$ sowie zwei Gebiete abgebildet.

a) Zeige, dass die beiden Kurven einander berühren und ordne sie per Beschriftung ihren Gleichungen zu (Begründung!).

b) Rotieren die Gebiete um die x-Achse, so entstehen zwei Drehkörper. Ermittle das Verhältnis der Volumina der beiden Körper!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!



Wien, im Jänner 2013. Dr. Robert Resel, e. h.