



§4. Rektifikation (Aufgaben 86 bis 100)



- 86) a) Zeige, dass die LISSAJOUS-Kurve k_1 [$k_1: 81y^2 = 2x^2 \cdot (135 - x^2)$] und die NEIL-Kurve k_2 [$k_2: 27y^2 = 4x^3$] einander nebst dem Doppelpunkt von k_1 (identisch mit der Schnabelspitze von k_2) in zwei weiteren Punkten P und Q rechtwinklig schneiden.
- b) Berechne die Länge des Bogens $\widehat{OP}$ oder $\widehat{OQ}$ von k_2 , wobei O den Doppelpunkt von k_1 resp. die Schnabelspitze von k_2 bezeichnet.
- 87) a) Abgesehen vom Koordinatenursprung O schneiden einander der NEWTON-Knoten k_1 [$k_1: 9y^2 = x^2 \cdot (2x+3)$] und die NEIL-Kurve k_2 [$k_2: 27y^2 = 8x^3$] in zwei weiteren Punkten P und Q. Berechne deren Koordinaten!
- b) Berechne sowohl von k_1 als auch von k_2 die Länge des Bogens $\widehat{OP}$ oder $\widehat{OQ}$!

- 88) Durch den Punkt $P(a|\frac{a}{4})$, $a > 0$ verläuft genau eine NEILsche Kurve v mit der Gleichung $v: y^2 = b^2 \cdot x^3$.

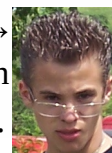
- a) Berechne b in Abhängigkeit von a , stelle eine Gleichung von v auf und berechne die Länge des entsprechenden Kurvenbogens $\widehat{OP}$, wobei $O(0|0)$ sei (Wurzelausdrücke verwenden, keine Dezimalzahlen!).

- Welcher der folgenden beiden Brüche approximiert das Ergebnis besser?
- b) Berechne zum Vergleich die Länge der Strecke OP und kontrolliere, dass die in a) berechnete Bogenlänge um nur ca. $3\frac{1}{2}$ Promille länger ist! Beurteile Tommys $\rightarrow$ Approximation $\frac{67553a}{65536}$ für $\widehat{OP}$ (welche er durch kubische Approximation erhalten hat, wofür er – wie man sieht! ☺ – ganz schön scharf nachdenken musste!).



Binos (durch Hinsehen ermittelter!) Bruch $\frac{30a}{29}$

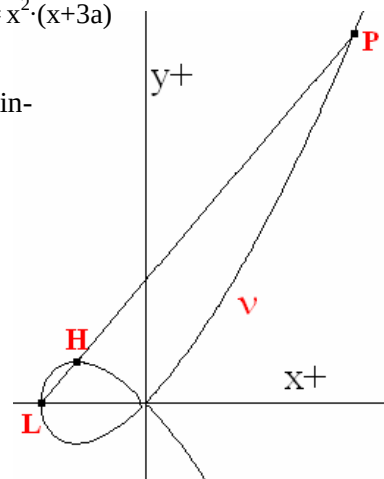
Emmys (via linearer Approximation berechneter Bruch $\frac{7597a}{7344}$)



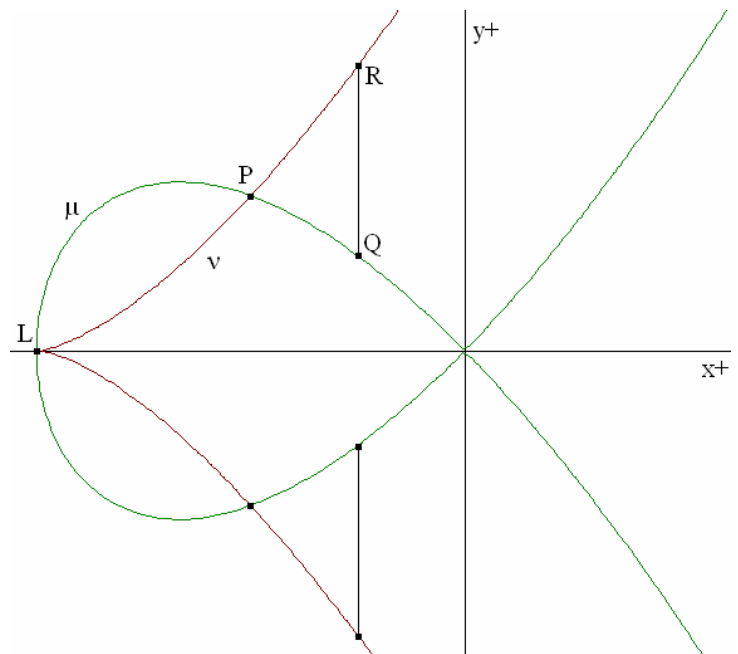
Bemerkung: Die angedeuteten Approximationen [linear bei Emmy, kubisch bei Tommy, auch (bi-)quadratisch wird uns noch begegnen!] führen direkt in das Themengebiet der TAYLOR-Reihen, was für die 2. Schularbeit **im Rg** relevant sein wird!

- 89) Nebenstehend abgebildeter NEWTONScher Knoten v mit der Gleichung $v: 9ay^2 = x^2 \cdot (x+3a)$ wird von der Gerade g_{LH} in einem dritten Punkt P geschnitten.

Um wie viel Prozent ist der Bogen auf v von L nach P länger als die direkte Verbindungsstrecke LP (Ergebnis auf zwei Dezimalstellen nach den Prozenten genau!)?



- 90) Gemäß der angegebenen Abbildung sind die Kurven μ und v mit den Gleichungen $\mu: 1296y^2 = x^2 \cdot (x+432)$ und $v: 1296y^2 = (x+432)^3$ sowie deren Schnittpunkte L und P und ferner die Punkte Q und R mit der Eigenschaft $x_Q = x_R = \frac{1}{2} \cdot x_P$ zu betrachten und die Gesamtlänge des Kurvenzugs LPRQPL (via v von L über P bis R, dann geradlinig von R bis Q und schließlich via μ von Q über P bis L) zu berechnen.



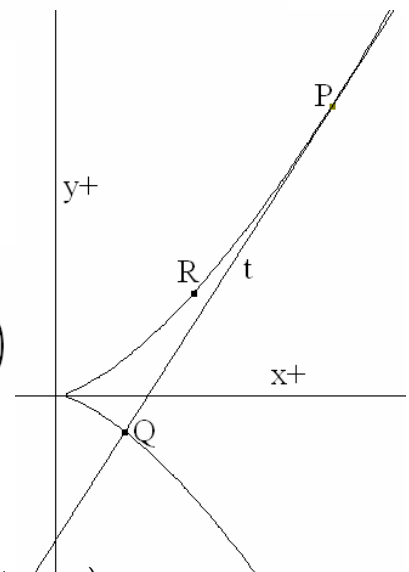
- 91) Berechne die Länge des Graphen der Funktion ψ mit $\psi(x) = \frac{4}{15} \cdot \left(3\sqrt{(\sqrt{x}-1)^5} + 5\sqrt{(\sqrt{x}-1)^3} \right)$ über dem Intervall $[1; 1296]$.

- 92) Berechne die Länge der NEILschen Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^3$ von $P(0|0)$ bis $R(44|y_Q)$!

- 93) Berechne die Länge der NEILschen Kurve mit der Gleichung $y^2 = x^3$ von $P(0|0)$ bis $S(93|y_Q)$!

- 94) Von einer reellen Funktion f kennt man mit $f''(x) = \frac{x^4+1}{3}$ die zweite Ableitungsfunktion. An der Stelle $x = 3$ besitzt der Graph von f die Tangente t mit der Gleichung $t: 40x - 9y = 78$.

- Ermittle die Funktionsgleichung von f !
- Berechne den Umfang des Normalbereichs unter Γ_f im Intervall $[m; 3]$, wobei m die lokale Minimumstelle von f bezeichnet.



- 95) Berechne die Länge des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2}{35} \cdot \left(15\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^7} + 42\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^5} + 35\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3} \right)$$

über dem Intervall $[1; 64]$ und zeige, dass der entsprechende Bogen ziemlich genau um $\frac{1}{150}$ länger ist als die direkte Verbindungsstrecke

- 96) a) Zeige: Die Tangente t an die NEILsche Kurve $v[v: 81y^2 = x^3]$ im Punkt $P(72|y_P > 0)$ schneidet v im zweiten gemeinsamen Punkt Q rechtwinklig (siehe Abbildung rechts oben!)
 b) Verifiziere: Ist R einer der beiden Kurvenpunkte mit $x_R = \frac{1}{2} \cdot x_P (= 2 \cdot x_Q!)$, dann gilt: $\overline{OP} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \overline{OQ} + \overline{OR}$
 $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
 Probe!

- 97) Von einer Funktion f kennt man mit $f''(x) = \frac{5}{4} \cdot \frac{x^5+1}{x^3 \cdot \sqrt{x}}$ die zweite Ableitungsfunktion. Ferner ist bekannt, dass $T\left(\frac{10}{21}\right)$ der Tiefpunkt von Γ_f ist.

- Ermittle die Funktionsgleichung von f
 [Überprüfe, dass $f(x) = \frac{1}{7} \cdot x^3 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{3x \cdot \sqrt{x}}$ gilt.]!
- Betrachte den Kurvenpunkt $P(4|y_P)$ und zeige, dass die Länge des Kurvenbogens $\overline{TP}$ auf Γ_f um ziemlich genau $\frac{1}{54}$ länger ist als die kürzeste Verbindung von T nach P !

- 98) Von einer Funktion f kennt man mit $f''(x) = \frac{7}{4} \cdot \frac{x^7+1}{x^4 \cdot \sqrt{x}}$ die zweite Ableitungsfunktion. Ferner ist bekannt, dass $T(1|\frac{14}{45})$ der Tiefpunkt von Γ_f ist.
- Ermittle die Funktionsgleichung von f
[Überprüfe, dass $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^4 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{5x^2 \cdot \sqrt{x}}$ gilt.]!
 - Betrachte den Kurvenpunkt $P(4|y_P)$ und zeige, dass die Länge des Kurvenbogens $\overbrace{TP}$ auf Γ_f um ziemlich genau $\frac{1}{150}$ länger ist als die kürzeste Verbindung von T nach P
- 99) Von einer Funktion f kennt man mit $f''(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{x^8+1}{x^5}$ die zweite Ableitungsfunktion. Ferner ist bekannt, dass $T(1|\frac{4}{15})$ der Tiefpunkt von Γ_f ist.
- Ermittle die Funktionsgleichung von f
[Überprüfe, dass $f(x) = \frac{1}{10} \cdot x^5 + \frac{1}{6x^3}$ gilt.]!
 - Betrachte den Kurvenpunkt $P(4|y_P)$ und zeige, dass die Länge des Kurvenbogens $\overbrace{TP}$ auf Γ_f um ziemlich genau $\frac{2}{49}$ länger ist als die kürzeste Verbindung von T nach P !
- 100) Von einer Funktion f kennt man mit $f''(x) = \frac{9}{4} \cdot \frac{x^9+1}{x^5 \cdot \sqrt{x}}$ die zweite Ableitungsfunktion. Ferner ist bekannt, dass $T(1|\frac{18}{77})$ der Tiefpunkt von Γ_f ist.
- Ermittle die Funktionsgleichung von f
[Überprüfe, dass $f(x) = \frac{1}{11} \cdot x^5 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{7x^3 \cdot \sqrt{x}}$ gilt.]!
 - Betrachte den Kurvenpunkt $P(4|y_P)$ und zeige, dass die Länge des Kurvenbogens $\overbrace{TP}$ auf Γ_f um ziemlich genau $\frac{1}{662}$ länger ist als die kürzeste Verbindung von T nach P

Lösungen der Aufgaben zu §4 (Rektifikation)

- 86) a) $P(9|6\sqrt{3}), Q(9|-6\sqrt{3})$, b) $L = 14$
- 87) a) $P(\frac{9}{2}|3\sqrt{3}), Q(\frac{9}{2}|-3\sqrt{3})$, b) $L_{NEIL} = 7, L_{NEWTON} = 4\sqrt{3}$
- 88) a) $y^2 = \frac{1}{16a} \cdot x^3$, exakte Bogenlänge: $\frac{73\sqrt{73}-512}{108} \cdot a$
- 89) um ca. 10,94%; Bogenlänge beträgt $12a$, direkte Verbindung $3a\sqrt{13}$
- 90) $Q(-108|54), R(-108|162)$, Gesamtlänge 906
- 91) 6220
- 92) 92
- 93) 903
- 94) a) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, b) $u=12$
- 95) $L = \frac{762}{7}$