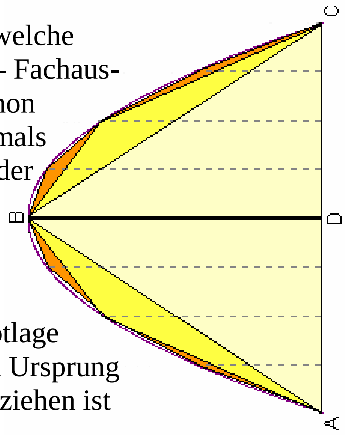
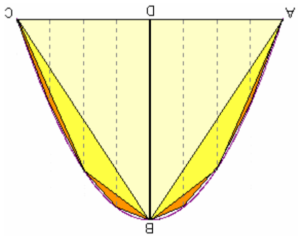
§2. Quadratur (Aufgaben 26 bis 55)


26) Berechne den Flächeninhalt eines Parabelsegments [vgl. die beiden Abbildungen, welche suggerieren, wie man den entsprechenden Flächeninhalt auch durch Ausschöpfen – Fachausdruck: ***Exhaustion*** – unter Verwendung von Dreiecken berechnen kann, wie es schon Archimedes von SYRAKUS (287-212 v.Chr.) getan hat, da die Integralrechnung damals freilich noch nicht zur Verfügung stand!] der Höhe h (Länge der Strecke BD) und der Breite 2c (doppelte Länge der kongruenten Strecken AD und DC) auf zwei Arten:



a) unter Verwendung einer Parabel in erster Hauptlage durch den Punkt C(…|…), wobei B im Ursprung liegt und die rechte Abbildung zu be(tr)achten ist,

b) 

unter Verwendung einer Parabel par in zweiter Hauptlage [par.: $y = ax^2$] durch den Punkt A(…|…), wobei B im Ursprung liegt und die linke Abbildung als Grundlage heranzuziehen ist

c) Zeige, dass [in (sic!) beiden Fällen] $A_{\text{Segment}} : A_{\text{Dreieck } \Delta ABC} = 4:3$ gilt. (w a s ü b r i g e n s s c h o n A r c h i m e d e s w u s s t e ...)

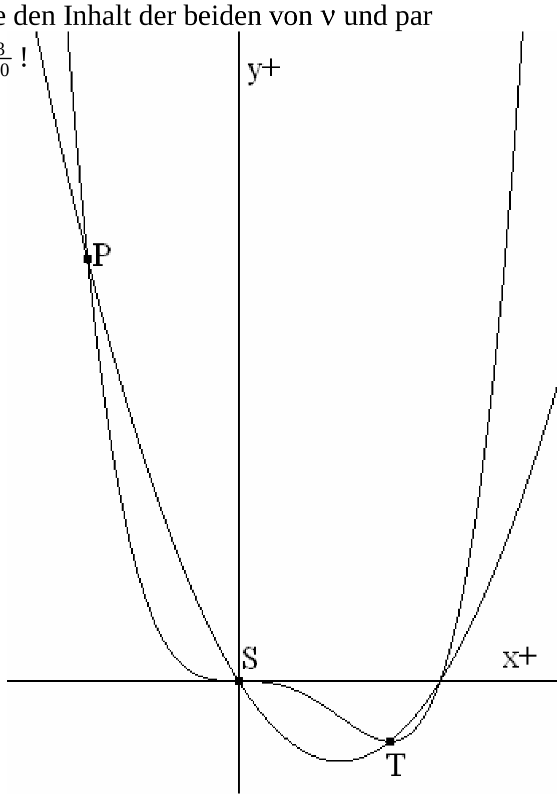
27) $W_1(2|11)$ und $W_2(6|27)$ sind die Wendepunkte des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f. Die Gerade durch W_1 und W_2 begrenzt zusammen mit Γ_f ein Flächenstück, welches einen Flächeninhalt von $\frac{66}{5}$ aufweist, wobei Γ_f die obere Begrenzungskurve dieses Bereiches ist.

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f!

b) Diskutiere die Funktion und skizziere den Funktionsgraphen (Beschriftung!).

c) Berechne die Inhalte jener Flächenstücke, welche Γ_f mit seinen Wendetangenten begrenzt!

28) Zeige, dass der "liegende Achter" (LISSAJOUS-Kurve) ν mit der Gleichung $\nu\colon y^2 = x^2 \cdot (3 - x^2)$ und die Parabel par mit der Gleichung $\text{par.: } y^2 = 2x$ einander berühren und berechne den Inhalt der beiden von ν und par begrenzten Flächenstücke. Kommentiere Mad Mikes Resultat $\frac{43}{280}$! Verwende den Hinweis, dass die Berührungspunkt ganzzahlige x-Koordinate hat (Dann ist es "ur easy" …) haben!

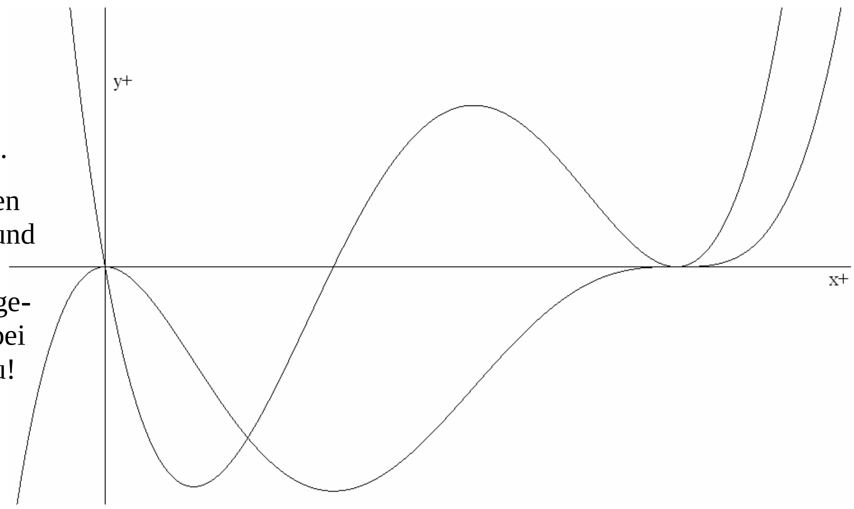


29) Durch den Sattelpunkt S(0|0), den Tiefpunkt T(3|–27) und die zweite Nullstelle des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f wird der Graph Γ_g einer Polynomfunktion zweiten Grades g gelegt, welcher mit Γ_f drei Flächenstücke begrenzt (vgl. Abbildung rechts!). Zeige, dass sich die Inhalte des linken und des mittleren der drei Flächenstücke wie 7:3 verhalten und kontrolliere auch, dass $x_P + x_T = 0$ gilt!

30) Vom Graphen Γ_f einer Polynomfunktion dritten Grades f kennt man den Tiefpunkt T(1|16), wobei die Tiefpunkttangente t_T mit Γ_f außerdem noch den Punkt P(–2|16) gemeinsam hat, wobei t_T mit Γ_f ein Flächenstück mit dem Maß $\frac{27}{4}$ begrenzt. Ermittle die Funktionsgleichung von f!

Hinweis: *Beginne mit einer Skizze der beiden möglichen Varianten von Γ_f (… kommt von …, geht nach …) und schließe wegen der (relativen) Lage von P (zu T) den nicht in Frage kommenden Fall aus!*

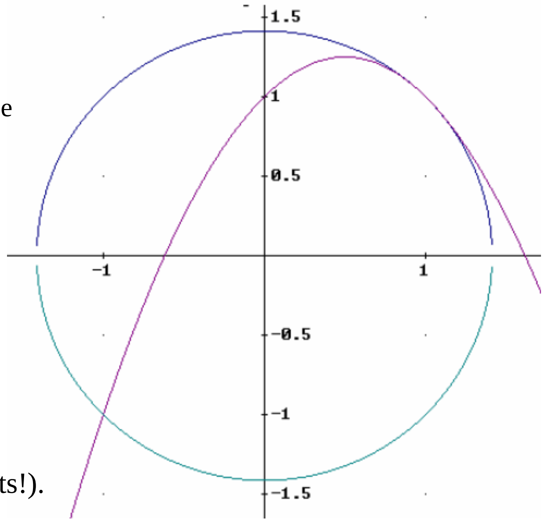
31) Nebenstehend sind sowohl der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2 \cdot (x-4)^3$ als auch jener ihrer Ableitungsfunktion f´ abgebildet.



a) Ermittle die Null- und Extremstellen von f sowie die Nullstellen von f´ und beschrifte die Punkte in der nebenstehenden Abbildung! Welcher allgemeine Zusammenhang besteht hiebei zwischen f und f´? Begründe genau!

b) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der Graphen von Γ_f und $\Gamma_{f'}$. Begründe ***vor der Rechnung***, warum neben den in der Skizze zu erkennenden Schnittpunkten noch ein weiterer existieren muss!

c) Bestimme die Maße der Inhalte aller drei Flächenstücke, welche Γ_f und $\Gamma_{f'}$ miteinander begrenzen. Worauf ist jeweils zu achten und wie kann man diese Berechnungen möglichst ökonomisch durchführen?



32) Durch zwei Punkte $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$ wird je eine nach oben und nach unten offene Normparabel p_1 und p_2 gelegt (ergo: Ansätze p_1: $y = x^2 + ax + b$ und p_2: $y = -x^2 + px + q$). Dann gilt der folgende

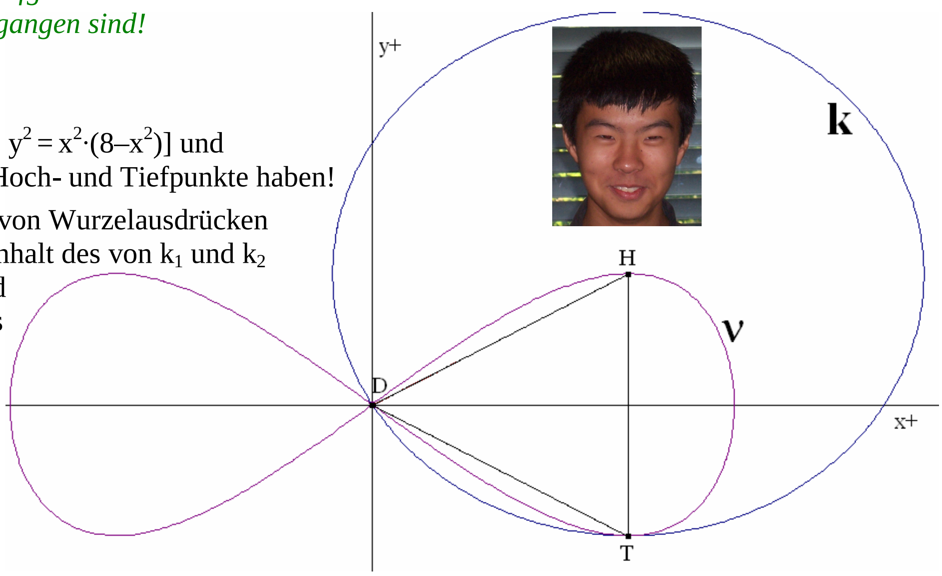
SATZ. Der Flächeninhalt $\boldsymbol{A}$ des von p_1 und p_2 begrenzten Flächenstücks beträgt $\boldsymbol{A} = \frac{1}{3} \cdot \left| x_P - x_Q \right|^3$.

Überprüfe diesen Satz für die Punkte P(–1|5) und Q(2|8)!

33) a) Zeige, dass die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + x + 1$ und der Kreis k: $x^2 + y^2 = 2$ einander im Punkt $P(1|y_P)$ oskulieren und berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts Q von k und der Parabel (siehe Abbildung rechts!).

b) In welchem Verhältnis teilt die Parabel den Inhalt der Kreisfläche? Nimm Stellung zu Mad Mikes Resultat 245:99 und nutze die Sehne PQ!

Hinweis: *Beachte, wie wir bei (der eindeutig anspruchsvolleren) Aufgabe 36 in der Schulübung vorgegangen sind!*



34) a) Zeige, dass die Kurven k_1 [k_1: $y^2 = x^2 \cdot (8-x^2)$] und k_2 [k_2: $y^2 = 4x^2 \cdot (x+3)$] idente Hoch- und Tiefpunkte haben!

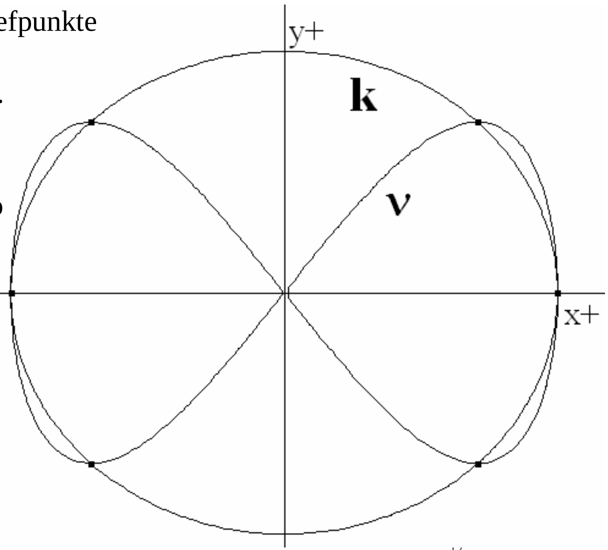
b) Berechne unter Verwendung von Wurzelausdrücken (keine Dezimalzahlen!) den Inhalt des von k_1 und k_2 begrenzten Flächenstücks und nimm Stellung zu Mad Mikes Resultat $\frac{54}{35}$!

35) Die durch die Gleichung ν: $27y^2 = x^2 \cdot (18-x^2)$ festgelegte Kurve ν hat die in nebenstehender Abbildung illustrierte Form.

a) Berechne die Koordinaten des abgebildeten Hoch- und Tiefpunkts H und T und zeige, dass das Dreieck ΔDTH gleichseitig ist.

b) Wegen dieser Eigenschaft gibt es einen Kreis k mit dem Mittelpunkt H, welcher ν sowohl in T berührt als auch in D schneidet (siehe Abbildung!). "Smiling φιλ" (Abbildung!!) behauptet, dass die rechte Schleife von ν exakt 13% der Kreisfläche einnimmt. Nimm zu seiner kühnen Behauptung Stellung (und grinse zurück! ☺)!

36) a) Zeige, dass der Ursprungskreis k durch die Hoch- und Tiefpunkte der LISSAJOUS-Kurve ν[ν: $9y^2 = x^2\cdot(18-x^2)$] auch durch die "äußersten" Punkte von ν verläuft (siehe Abbildung!).

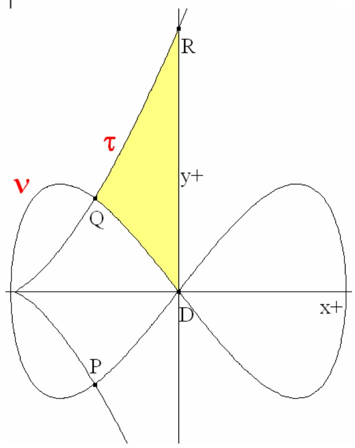


b) 

φιλ (Abbildung links) hat neben seinem nachmittäglichen Kaffeeplausch mit Bino (siehe Abbildung rechts) angeblich im Kopf (Bino würde meinen: wie man sieht!) berechnet, dass k $\frac{56}{59}$ der von ν umschlossenen Fläche einnimmt.

Nimm zu φιλs äußerst kühner Behauptung Stellung!

37) In nebenstehender Abbildung sind die Kurven mit den Gleichungen $9y^2 = (3x+2)^3$ und $3y^2 = x^2\cdot(4-9x^2)$ sowie ein Gebiet zu sehen.

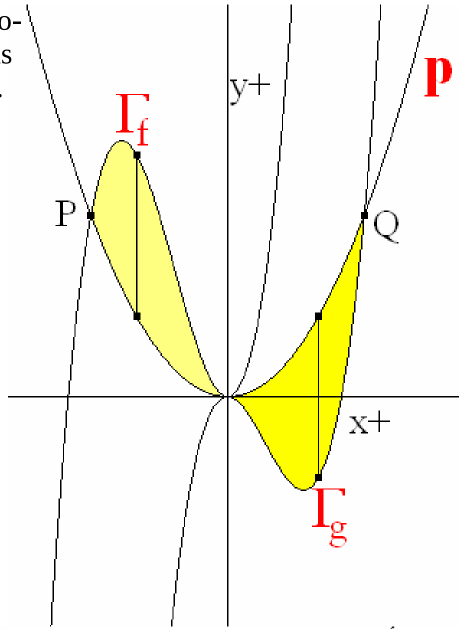


a) Welche der beiden Gleichungen beschreibt die Kurve ν, welche die Kurve τ? Begründe deine Wahl!

b) Zeige, dass ν und τ einander nebst dem gemeinsamen Punkt mit der x-Achse noch in zwei weiteren Punkten P und Q orthogonal schneiden.

c) Gib für den Flächeninhalt $\boldsymbol{A}$ des gefärbten Gebiets eine obere Schranke an und nimm Stellung zu Mad Mikes Resultat $\frac{5}{34}$!

38) In nebenstehender Abbildung sind Γ_f und Γ_g die Graphen normierter Polynomfunktionen dritten Grades und berühren die Parabel p[p: $y = x^2$] im Koordinatenursprung. Ferner schließen beide Funktionsgraphen mit p jeweils ein Gebiet (gefärbte Flächenstücke) mit einem Flächeninhalt von 108 ein.



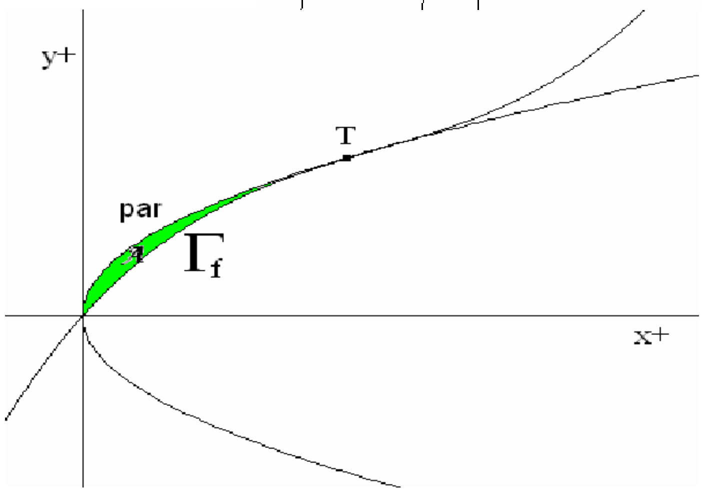
a) Ermittle Funktionsgleichungen von f und g. Verwende und begründe dazu den Ansatz $y = x^3+ax^2$!

b) Gib die Koordinaten der Punkte P und Q sowie der Endpunkte der maximalen vertikalen Durchmesser der beiden Flächen an!

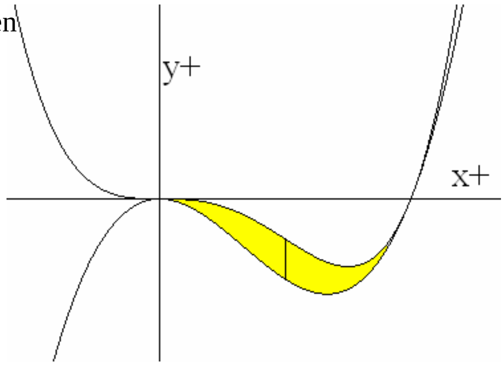
39) In untenstehender Abbildung ist sowohl eine Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p als auch der Graph Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $\boxed{y = f(x) = \frac{\sqrt{2\cdot p}}{8\cdot z^2\cdot\sqrt{z}}\cdot\left(3\cdot x^3 - 10z\cdot x^2 + 15z^2\cdot x\right)}$ zu sehen. Beweise entweder allgemein oder verifiziere für p=2 und z=12 die folgenden Sätze und begründe ferner, warum Γ_f und par nebst T und dem Ursprung keine weiteren gemeinsamen Punkte aufweisen.

a) Γ_f und par oskulieren einander in jenem Parabelpunkt T, für welchen $x_T = z$ gilt.

b) Für den Inhalt $\boldsymbol{A}$ der gefärbten Fläche gilt die Formel $\boldsymbol{A} = \frac{5z^2}{96}\sqrt{2p}$.



40) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = \frac{5}{3} \cdot x^4 - 20x^3$ und $y = g(x) = 20x^3 - 240x^2$ sowie das von Γ_f und Γ_g begrenzte Gebiet inkl. seinem maximalen vertikalen Durchmesser eingezeichnet.



a) Beschrifte die Graphen in der Abbildung und begründe deine Entscheidung jeweils!

b) Untersuche die gegenseitige Lagebeziehung von Γ_f und Γ_g und zeige, dass das markierte Gebiet einen Flächeninhalt aufweist, welcher exakt dem bestimmten Integral $\int_0^{24} 2x^3 \cdot dx$ entspricht.

c) Ermittle den maximalen vertikalen Durchmesser und zeige, dass die Tangenten an Γ_f und Γ_g in den Endpunkten dieses Durchmessers zueinander parallel verlaufen! Begründe dies allgemein anhand der Genese dieser Extremwertaufgabe!

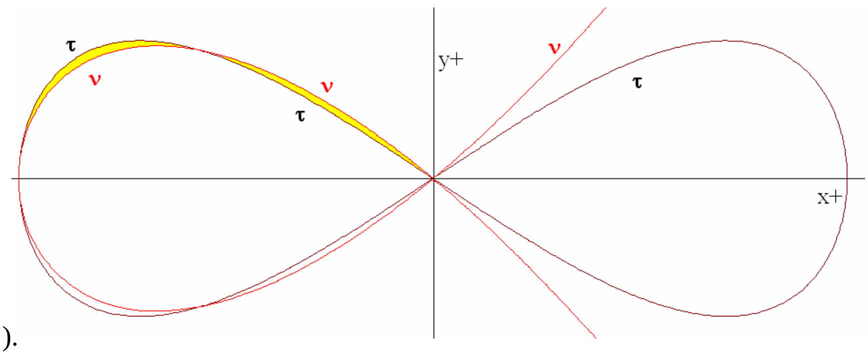
41) $W_1(2|y_1)$ ist ein Wendepunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktionen vierten Grades f, $t_1[I(-1|-3), II(5|6)]$ ist die zugehörige Wendetangente. Ferner ist mit $W_2(4|4)$ der zweite Wendepunkt von Γ_f bekannt.

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f!

b) Berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, welches die Wendetangente t_2 von W_2 mit Γ_f begrenzt. In welchem Verhältnis wird dieses Flächenstück von t_1 geteilt?

c) Analog zu b), wobei t_1 und t_2 jetzt die Rollen tauschen!

42) In nebenstehender Abbildung sind ein NEWTON-Knoten sowie eine LISSAJOUS-Kurve eingezeichnet, *deren Schleifen offensichtlich gleich breit sind*.



a) Begründe *dies* anhand der Kurvengleichungen $y^2 = x^2(2304-x^2)$ und $y^2 = 75x^2(x+48)$ und ordne die jeweilige Gleichung der entsprechenden Kurve (Beschriftung: siehe Abbildung!) zu (Begründungen angeben!).

b) Zeige, dass die gefärbten Gebiete den gleichen Flächeninhalt aufweisen!

Für die folgenden Aufgaben 43) und 44) gilt: Bei Aufgabenteil (a) sollst du – über das sonstige Procedere hinaus! – selbst[1] ein wenig (aber intensiver als der rechts abgebildete Primat! ☺ [2]) darüber nachdenken, wie du – unter Verwendung des Ansatzes[3] $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bei Aufgabe 43) bzw. einem selbst entsprechend zuwählenden Ansatz bei Aufgabe 44) – zur Funktion f kommst.

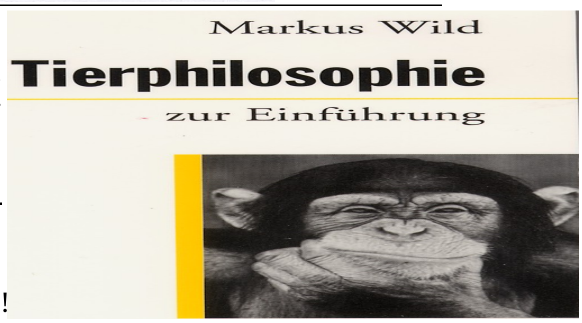
43) (a) Löse die EULERsche Differentialgleichung $x^2y'' - 3xy' + 3y + 6 = 0$ unter den Randbedingungen $y(-2) = -4$ und $y(3) = 16$, die Lösungsfunktion heiße f.

(b) Diskutiere f und zeichne Γ_f!

(c) Durch den Tiefpunkt T von Γ_f soll eine Gerade g gelegt werden, welche mit Γ_f *rechts von* T ein Segment mit einem Flächeninhalt von $33,75$FE begrenzt. Stelle eine Gleichung von g auf und berechne auch den Inhalt jenes Flächenstücks, welches g *links von* T mit Γ_f begrenzt.

[1]: In der Tat hat Mathematik eine stark (aufgrund der Prüfungskultur im entsprechenden Unterrichtsgegenstand am Vormittag ebenda – leider! – nicht allzu stark integrierte) k r e a t i v e   K o m p o n e n t e!!

[2]: Übrigens: Der Frage, inwieweit Tiere denken, ist auch schon so mancher Philosoph nachgegangen (siehe Abbildung rechts!)!



[3]: Wie man (derartige "EULERsche") Differentialgleichungen (und andere Typen) im Allgemeinen (also ohne Ansätze wie oben!) löst, ist eine hochinteressante Frage, deren Beantwortung jedoch leider für den (Regel-)Unterricht (nicht aber für das Wahlpflichtfach!) zu komplex ist!

44) Eine Polynomfunktion vierten Grades f, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft, erfüllt die Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$.

(a) Ermittle die Funktionsgleichung von f [Res.: $y = x^4/144 + x^3/6$].

(b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

(c) Zeige, dass die Wendetangentenabschnitte zwischen den Schnittpunkten mit dem Graphen von f einander in ihrem Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 teilen.

(d) In welchem Verhältnis stehen die Inhalte jener Flächenstücke, welche die Wendetangenten mit dem Graphen von f begrenzen?

Bem.: Auch $y = x^4/144 - x^3/6$ wäre eine Lösung, rechne aber mit dem obig angeführten Resultat!

Aufgabe 45: Separates File! ☺

46) Durch den Punkt $P(1|1)$ verläuft genau eine Parabel par in zweiter Hauptlage.

(a) Stelle eine Gleichung von par auf!

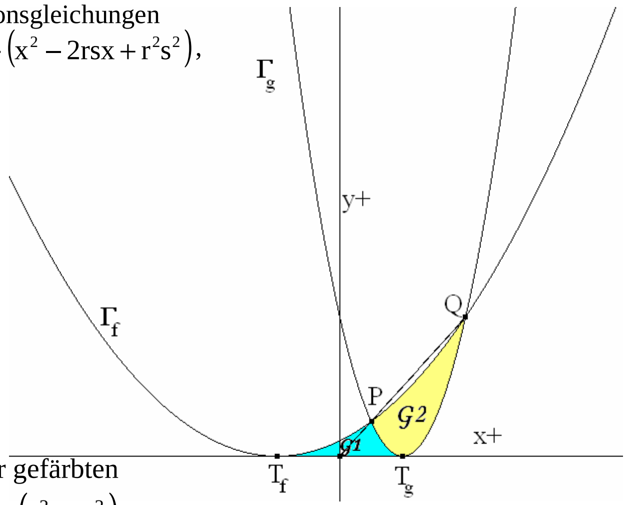
(b) Ermittle Gleichungen jener Geraden g und h durch P, welche mit par Segmente mit dem Flächeninhalt 36 begrenzen. Berechne auch die Koordinaten der zweiten Schnittpunkte!

(c) Gib (ohne das genaue Winkelmaß zu berechnen, d.h. nur durch Berechnung entsprechender trigonometrischer Werte) eine Anleitung zur Konstruktion des Schnittwinkels zwischen g und h!

47) Durch den Hoch- und den Tiefpunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion dritten Grades f wird der Graph Γ_g einer Polynomfunktion zweiten Grades g gelegt, welcher Γ_f in einem der beiden Extrempunkte berührt. In welchem Verhältnis teilt Γ_g das von Γ_f und der Tangente an Γ_f in ebenjenem Extrempunkt begrenzte Flächenstück?

Tipp: Ansatz $y = f(x) = x^3 - 3ax^2$, Γ_g durch den Hochpunkt von Γ_f legen, das macht es einfacher!
[P.S.: Zwecks Übung auch die andere Variante (Γ_g durch den Tiefpunkt von Γ_f legen!) durchrechnen!!]

48) Betrachte Polynomfunktionen zweiten Grades f und g mit Funktionsgleichungen der Form $y = f(x) = \frac{1}{(r+s)^2} \cdot (x^2 + 2rsx + r^2s^2)$ und $y = g(x) = \frac{1}{(r-s)^2} \cdot (x^2 - 2rsx + r^2s^2)$, wobei $0 < r < s$ (*) vorausgesetzt wird.



a) Begründe, warum die Tiefpunkte T_f und T_g von Γ_f und Γ_g auf der x-Achse liegen (siehe Abbildung!).

Rechne in weiterer Folge allgemein mit den Parametern [unter Beachtung von (*)!] oder mit den sich aus $r = 1$ und $s = 2$ ergebenden konkreten Parabeln:

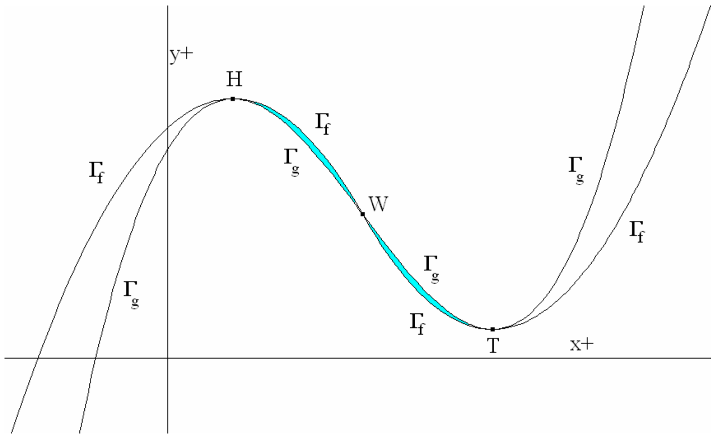
b) Beweise/verifiziere, dass die Schnittpunkte P und Q von Γ_f und Γ_g und der Koordinatenursprung kollineare Lage aufweisen.

c) Beweise/kontrolliere für die Flächeninhalte ***F1*** und ***F2*** der gefärbten Gebiete ***G1*** und ***G2*** die Formeln ***F1*** $= \frac{2r^3s}{3}$ und ***F2*** $= \frac{2rs}{3} \cdot (s^2 - r^2)$.

49) a) Warum ist die via

$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 & \text{für } x \in \,]-\infty;3] \\ x^2 - 10x + 26 & \text{für } x \in \,]3;\infty] \end{cases}$$

definierte Funktion auf ganz ℝ differenzierbar?

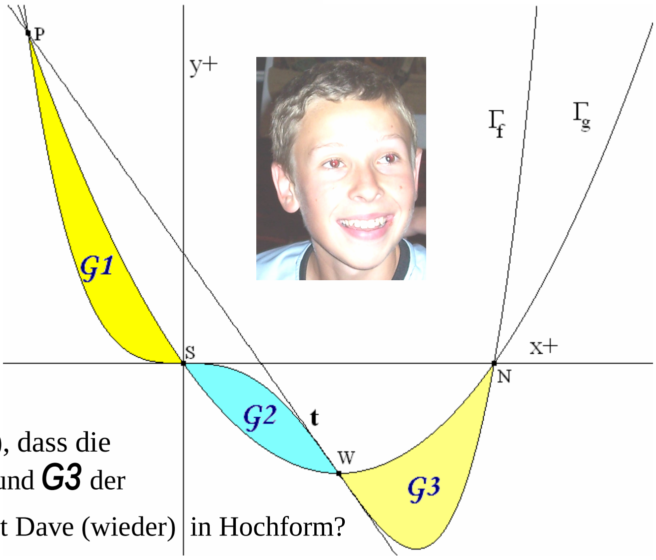


b) Γ_f ähnelt in auffälliger Weise dem Graphen Γ_g einer Polynomfunktion dritten Grades g (siehe Abbildung rechts!), welcher die gleichen Extrempunkte und den gleichen Wendepunkt wie Γ_f aufweist. Stelle die Funktionsgleichung von g auf und zeige, dass die Flächeninhalte jener Gebiete, welche Γ_f und Γ_g begrenzen, gleich sind.

50) Vorgegeben sind die NEILsche Kurve $\nu_1[\nu_1 : y^2 = 4x^3]$ und der NEWTONsche Knoten $\nu_2[\nu_2 : 3y^2 = x^2(148 - 25x)]$.

(a) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte von ν_1 und ν_2 und ermittle ebenda die Maße der entsprechenden Schnittwinkel!

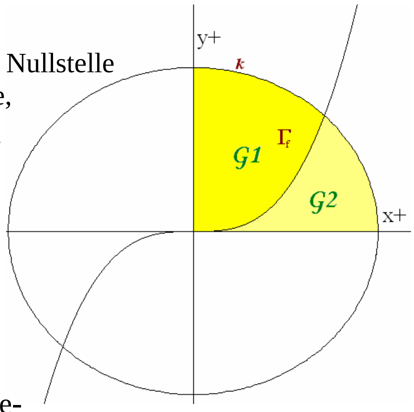
(b) Berechne den Inhalt $\mathcal{A}$ jenes von ν_1 und ν_2 eingeschlossenen Flächenstücks, welches die x–Achse als Symmetrieachse besitzt und auch enthält. Bestätige, dass $\mathcal{A} \in \mathbb{Q}$ gilt.



51) a) Ermittle die Funktionsgleichung jener Polynomfunktion zweiten Grades g, deren Graph Γ_g den Graphen Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 4x^3$ in seinen beiden Schnittpunkten mit der x-Achse sowie seinem gewöhnlichen Wendepunkt W schneidet (siehe Abbildung rechts!).

b) Zeige, dass W der Tiefpunkt von Γ_g ist und ferner der vierte gemeinsame Punkt von Γ_f und Γ_g auch der zweite gemeinsame Punkt von Γ_f und seiner schrägen Wendetangente t ist (vgl. Abbildung!).

c) Dave (siehe erster Quadrant!) behauptet ("sagt an" ☺), dass die Flächeninhalte ***F1***, ***F2*** und ***F3*** der Gebiete ***G1***, ***G2*** und ***G3*** der Proportion ***F1*** : ***F2*** = ***F3*** : ***F2*** = 19 : 11 genügen? Ist Dave (wieder) in Hochform?



52) Eine Polynomfunktion f vierten Grades mit einer dreifachen und einer einfachen Nullstelle begrenzt mit der x-Achse ein Flächenstück der Breite b und der Höhe h. Beweise, dass dann für den Flächeninhalt ***A*** dieses Flächenstücks die Formel $A = \frac{64bh}{135}$ gilt.

53) In nebenstehender Abbildung schneidet der Graph der Potenzfunktion f $[y=f(x)=ax^3]$ den Kreis k $[k: x^2+y^2 = 2]$ in jenen Punkten mit x=y. Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte ***F1*** und ***F2*** der Gebiete ***G1*** und ***G2*** und erkläre über die Näherungen $\pi \approx \frac{22}{7}$ (was schon die Griechen wussten) sowie $\pi \approx \frac{355}{113}$ (worauf sich φιλ etwas einbilden kann!) das Zustandekommen der Approximationsaussage ***F1*** : ***F2*** ≈ 29 : 15 bzw. ***F1*** : ***F2*** ≈ 234 : 121! Zeige ferner, dass für den spitzen Schnittwinkel φ zwischen Γ_f und k die Gleichung tan φ = 2 gilt!

54) Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f besitzt an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$ einen Rechts–Links–Wendepunkt, eine Gleichung der Wendetangente, welche zusammen mit den Koordinatenachsen und dem Graphen von f im dritten Quadranten ein Flächenstück mit der Maßzahl $\frac{389}{972}$ begrenzt, lautet $t_w : 36x + 27y + 28 = 0$.

(a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f.

(b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

(c) Berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, welches der Graph von f mit der x–Achse einschließt.

55) Die “äußeren“ der drei paarweise verschiedenen Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades f seien gleichzeitig auch die Nullstellen einer Polynomfunktion zweiten Grades g, wobei Γ_f und Γ_g einander einmal auf der x–Achse berühren. Beweise, dass der Inhalt jener Fläche, welche die beiden Funktionsgraphen miteinander begrenzen, nur von der Differenz der “äußeren“ Nullstellen, nicht aber von der Lage der mittleren Nullstelle abhängt.

Lösungen der Aufgaben zu §2 (Quadratur)

27) a) $y=f(x)=x^4-16x^3+72x^2$
b) Andeutungen: eine doppelte Nullstelle, einen Sattelpunkt ($\triangleq W_1$), bis auf die doppelte Nullstelle keine weiteren Extremstellen
c) Andeutungen: zweite gemeinsame Punkte der Wendetangenten mit Γ_f: $W_1'(10|75)$, $W_2'(-2|27)$

28) $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{3}$, Hinweis

29) $y=f(x)=x^4-4x^3$, $y=g(x)=9x^2-36x$, $P(-3|189)$

30) $y = f(x) = x^3 - 3x + 18$

31) a) Γ_f: $H(0|0)$, $T(\frac{8}{5}|y_T)$, b) $S_1=H$ aus a), $S_2(1|y_2)$, $S_3(4|0)$, $S_4(8|y_4)$, c) $F_1 = \frac{463}{30}$, $F_2 = \frac{837}{10}$, $F_3 = \frac{11264}{15}$

33) a) $Q(-1|-1)$, b) Exaktes "Verhältnis": $\frac{3\pi+4}{3\pi-4}$

34) exakter Flächeninhalt $\frac{16}{15}\cdot\left(9\sqrt{3}-10\sqrt{2}\right)$

35) a) $H\left(3\middle|\sqrt{3}\right)$, $T\left(3\middle|-\sqrt{3}\right)$, b) exakter relativer Anteil: $\frac{1}{\pi\cdot\sqrt{6}}$

36) exakter relativer Anteil: $\frac{3\pi+8\sqrt{2}-10}{8\sqrt{2}}$

37) b) $P\left(-\frac{1}{3}\middle|-\frac{1}{3}\right)$, $Q\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{1}{3}\right)$
c) $\mathcal{A} < F_{\Delta QDR}$, exakt: $\mathcal{A} = \frac{27+72\sqrt{2}-40\sqrt{3}}{405}$

38) a) $y = f(x) = x^3 + 5x^2$, $y = g(x) = x^3 - 7x^2$, b) $P(-6|36)$, $Q(6|36)$
c) Der längste vertikale Durchmesser des linken Gebiets reicht von $(-4|16)$ bis $(-4|48)$, jener des rechten reicht von $(4|-16)$ bis $(4|16)$.

40) c) $P_f(6|-2160)$, $P_g(6|-4320)$

41) a) $y=f(x)=\frac{1}{32}\cdot\left(x^4-12x^3+48x^2-32x\right)$, b) $\frac{8}{5}$, 1:31, c) Wie in c)!

42) b) beide $441\sqrt{7}$

43) a) $y = f(x) = x^3 - 3x - 2$, b) $N_1=N_2=H(-1|0)$, $N_3(2|0)$, $T(1|-4)$, $W(0|-2)$
c) g: $y = 18x - 22$, Tipp: Ansatz für den zweiten (rechts von T liegenden) Schnittpunkt $P(z|f(z))$, Richtungsvektor $\overrightarrow{TP}$ aufstellen, kollinearisieren, …; Lösung: z=4; Flächeninhalt des linken Gebiets: 216 [dritter Schnittpunkt: $Q(-z-1|f(-z-1))$, ergo: $Q(-5|f(-5))$]

44) b) $N_1(-24|0)$, $N_2=N_3=N_4=S(0|0)$, $T(-18|-243)$, $W(-12|-144)$
c) Schnittpunkt der Wendetangenten: $(-6|0)$, zweiter Schnittpunkt der schrägen Wendetangente mit dem Funktionsgraphen: $(12|432)$
d) 1:1 (beide $\frac{13824}{5}$)

45) a) $y=f(x)=\frac{1}{16}\cdot\left(x^4-12x^3+256x\right)$
f) Stimmt! Kein Alptraum! ☺
g) Stimmt! Kein Alptraum! ☺
h) Auch Manu "träumt richtig"! ☺
i) Stimmt nicht ganz! Statt dem Faktor $\frac{1}{11}\left(=\frac{14}{154}\right)$ in der "Rol(l)inger"schen Funktion gehört der Faktor $\frac{14}{155}$!
j) Gleichung der Parabel: $y=\frac{1}{2}\cdot\left(3x^2-13x+108\right)$, $\boldsymbol{F6 = F7=}\frac{729}{4}$, $\boldsymbol{F2=}\frac{243}{10}$ also stimmt es!
k) Roli behält in allen Punkten Recht!

46) a) $y=x^2$ ("ur easy"! ☺)
b) $Q_1(-5|5)$, $Q_2(7|49)$; Tipp: Unbestimmter Ansatz mit $Q_{1,2}(z|\ldots)$
c) Der Tangens dieses Winkels beträgt 2 (200%)!

47) 16:65

48) b) $P(r^2|r^2)$, $Q(s^2|s^2)$

49) b) $y=g(x)=\frac{1}{4}\cdot\left(x^3-9x^2+15x+29\right)$, beide Gebiete weisen einen Flächeninhalt von exakt einem Drittel auf!

50) a) $P(4|16)$, $Q(4|-16)$, 90°
b) $\mathcal{A} = \frac{312576}{3125} \approx 100$

51) a) $y = g(x) = 4x^2 - 16x$
c) Bam, passt! ☺ Dave is back!

53) exaktes "Verhältnis": $\frac{\pi+1}{\pi-1}$

54) a) $y = f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ (Tipp: Ansatz $f''(x)=a\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)$, ….; Lsg.: a=6)
b) $N_1=N_2=H(-1|0)$, $N_3(1|0)$, $T\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{32}{27}\right)$
c) $\frac{4}{3}$

55) Tipp: Ansätze $y = f(x) = x(x-a)(x-b)$, $0<a<b$ und $y = g(x) = px^2 + qx$, …., Lsg.: $\boldsymbol{F} = \frac{b^4}{12}$