Propädeutik (auch als Anregung für Philosophie!):

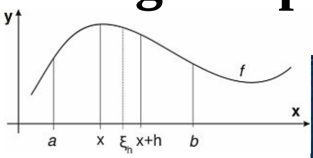


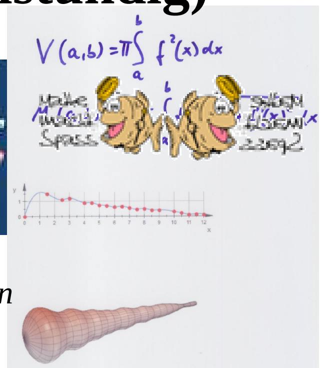
"Von allen, die bis jetzt nach Wahrheit forschten, haben die Mathematiker allein eine Anzahl Beweise finden können, woraus folgt, dass ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse."

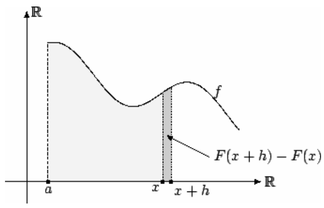
RENÉ DESCARTES (1596-1650),
französischer Philosoph und Mathematiker

Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

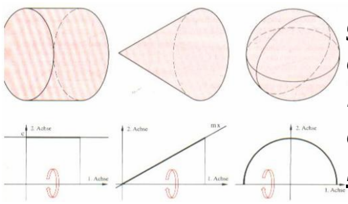
(8A, Gymnasium, 2012/13)

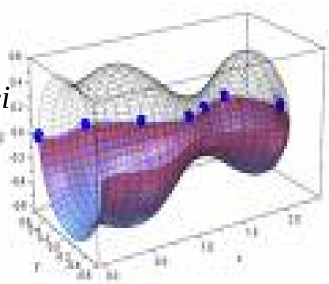


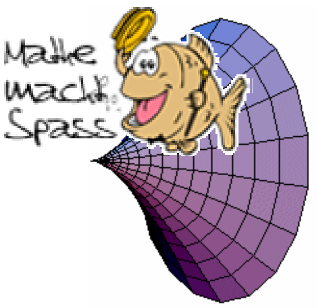


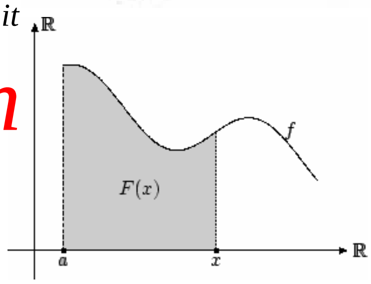


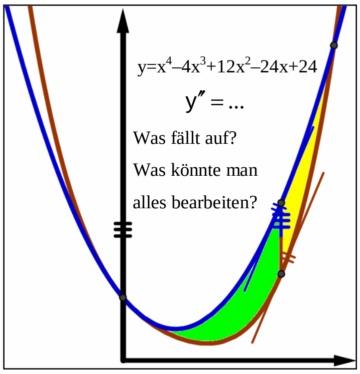
Diese Beispiele sollen durch jene für das Kapitel "Integralrechnung" relevanten Grundaufgaben {Ermitteln von Stammfunktionen durch elementare Integrationsregeln $[\int x^{\alpha}\cdot dx=(\alpha+1)^{-1}\cdot x^{\alpha+1}+C,\ \alpha\neq -1$*, Summen- und Vielfachenregel {im Sinne der Linearität der Integration!}, Anwendung des bestimmten Integrals auf geometrische Problemstellungen [Quadratur, Kubatur] führen, die du bei der ersten Schularbeit (nebst dem Stochastik-Kapitel!)* ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen, wobei hier bereits (nicht zuletzt auch schon im Hinblick auf die Matura!) eine* **Vernetzung** *mit den* **G r u n d l a g e n** *des Stoffs der 7. Klasse (sowohl Kegelschnitte als auch Differentialrechnung) vorgenommen wird.*



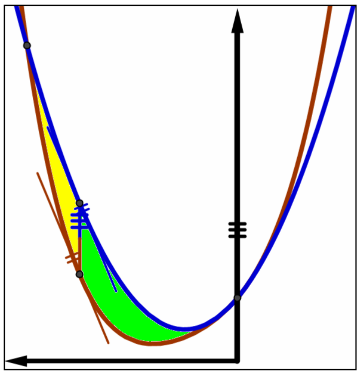








ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine a b s o l u t e N o t w e n d i g k e i t f ü r e i n a n g e m e s s e n e s Ü b u n g s p r o g r a m m ! ! !



§0. Stammfunktionen (zur Eingewöhnung: Aufgaben 1 bis 7)

1) W(–1|12) ist der Wendepunkt des Graphen Γ_f einer normierten Polynomfunktion dritten Grades f, deren Wendetangente durch den Ursprung verläuft. Ermittle die Funktionsgleichung und ferner die Extremstellen von f.

2) H(–1|0) und W(0|–2) sind der Hoch- und der Wendepunkt des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades. Ermittle die Funktionsgleichung!

3) H(–1|4) und W(0|2) sind der Hoch- und der Wendepunkt des Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades. Ermittle die Funktionsgleichung!

4) Wie zu …

Klasse: 8C(Rg) **1. Schularbeit (zweistündig)** 4. 11. 2008

Modul PM5: Integralrechnung & Stochastik 2

1) **Löse durch Integration:** Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f weist den Hochpunkt H(–9|972) und den Tiefpunkt T(5|–400) auf. Ermittle die Funktionsgleichung von f!

5) … erkennen: auch …

Klasse: 8B(G) **1. Schularbeit (zweistündig)** 6. 11. 2008

Modul PM5: Integralrechnung & Stochastik 2

1) **Löse durch Integration:** S(0|27) bzw. W(4|11) ist ein Sattelpunkt bzw. ein (gewöhnlicher) Wendepunkt des Graphen einer Polynomfunktion vierten Grades f. Ermittle die Funktionsgleichung von f!

6) … bereits erprobt: ☺

Klasse: 8D(Rg) **1. Schularbeit (zweistündig)** 13. 11. 2009

Modul PM5: Integralrechnung und Stochastik 2

1. **Löse durch Integration:**
   Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades f geht durch den Koordinatenursprung und weist ferner die Wendepunkte $W_1(1|15)$ und $W_2(4|0)$ auf.
   Stelle die Funktionsgleichung von f auf!

7) Der Graph Γ_f einer Polynomfunktion fünften Grades f besitzt im Ursprung einen Sattelpunkt und geht durch den Punkt P(18|–9). Ferner weist f an den Stellen $x = 6$ und $x = 15$ (weitere!) Wendestellen auf. Stelle die Funktionsgleichung auf und ermittle ferner sowohl die vollständigen Wendepunkte und Koordinaten des relativen Tiefpunkts von Γ_f als auch alle Nullstellen von f!

§1. Quadratur (Aufgaben 8 bis 54)

8) $W_1(2|55)$ ist ein gewöhnlicher Wendepunkt, $W_2(6|135)$ der[1] Sattelpunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f.

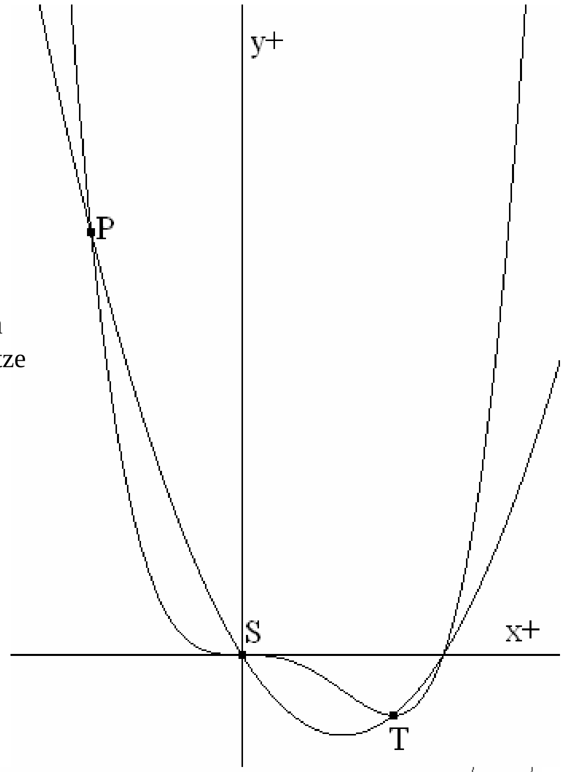
a) Ermittle die Funktionsgleichung (Zeige, dass $y=f(x)=\frac{1}{16}\cdot(5x^4-80x^3+360x^2)$ gilt!]

b) Γ_f begrenzt mit der Verbindungsstrecke der Wendepunkte ein Gebiet, dessen Flächeninhalt zu berechnen ist.

c) Ermittle ferner die Inhalte jener Flächenstücke, welche Γ_f mit seinen Wendetangenten begrenzt!

[1]: Erkläre, inwiefern hier die Verwendung des bestimmten Artikels gerechtfertigt ist (aber ohne Frau Prof. Gamperl zu fragen, da die Begründung nicht linguistischer, sondern mathematischer Natur ist!).

9) Durch den Sattelpunkt S(0|0), den Tiefpunkt T(3|–27) und die zweite Nullstelle des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f wird der Graph Γ_g einer Polynomfunktion zweiten Grades g gelegt, welcher mit Γ_f drei Flächenstücke begrenzt (vgl. Abbildung rechts!). Zeige, dass sich die Inhalte des linken und des mittleren der drei Flächenstücke wie 7:3 verhalten und kontrolliere auch, dass $x_P + x_T = 0$ gilt!

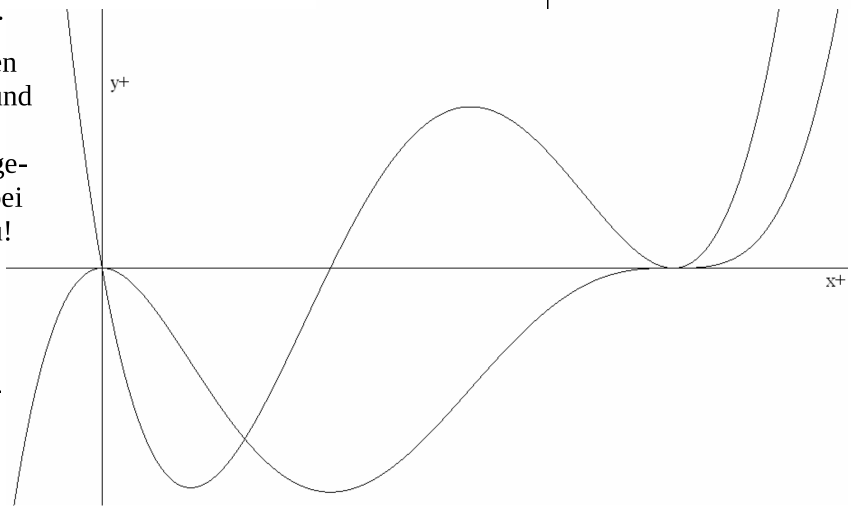


10) Durch zwei Punkte $P(x_P|y_P)$ und $Q(x_Q|y_Q)$ wird je eine nach oben und nach unten offene Normparabel p_1 und p_2 gelegt (ergo: Ansätze p_1: $y = x^2 + ax + b$ und p_2: $y = -x^2 + px + q$). Dann gilt der folgende

SATZ. Der Flächeninhalt A des von p_1 und p_2 begrenzten Flächenstücks beträgt $A = \frac{1}{3}\cdot\left|x_P - x_Q\right|^3$.

Überprüfe diesen Satz für die Punkte P(–1|5) und Q(2|8)!

11) Nebenstehend sind sowohl der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^2\cdot(x-4)^3$ als auch jener ihrer Ableitungsfunktion f´ abgebildet.



a) Ermittle die Null- und Extremstellen von f sowie die Nullstellen von f´ und beschrifte die Punkte in der nebenstehenden Abbildung! Welcher allgemeine Zusammenhang besteht hiebei zwischen f und f´? Begründe genau!

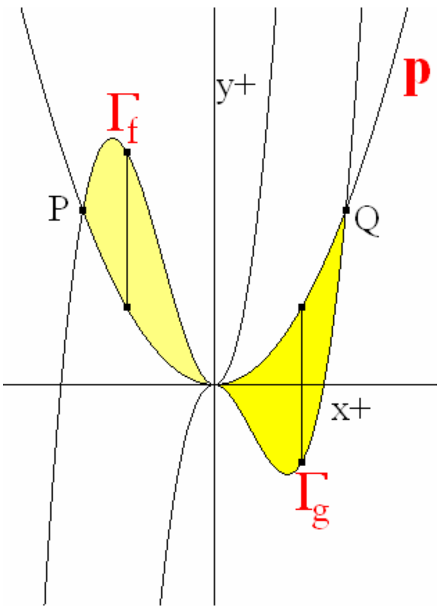
b) Berechne die Koordinaten aller Schnittpunkte der Graphen von Γ_f und $\Gamma_{f'}$. Begründe ***vor der Rechnung***, warum neben den in der Skizze zu erkennenden Schnittpunkten noch ein weiterer existieren muss!

c) Bestimme die Maße der Inhalte aller drei Flächenstücke, welche Γ_f und $\Gamma_{f'}$ miteinander begrenzen. Worauf ist jeweils zu achten und wie kann man diese Berechnungen möglichst ökonomisch durchführen?

12) Ist $S_1(x_1|y_1)$ bzw. $S_2(x_2|y_2)$ der Scheitelpunkt einer nach unten bzw. nach oben offenen Normparabel p_1 und p_2 gelegt (ergo: Ansätze p_1: $y = -x^2 + px + q$ und p_2: $y = x^2 + ax + b$). Dann gilt der folgende

SATZ. Der Flächeninhalt A des von p_1 und p_2 begrenzten Flächenstücks beträgt $A = \frac{1}{3}\cdot\left|2\cdot\Delta y - \Delta x^2\right|^{3/2}$, wobei sich Δx und Δy auf S_1 und S_2 beziehen und $\Delta y>0$ zu wählen ist!

Überprüfe diesen Satz für die Punkte S_1(1|–3) und S_2(5|7)!

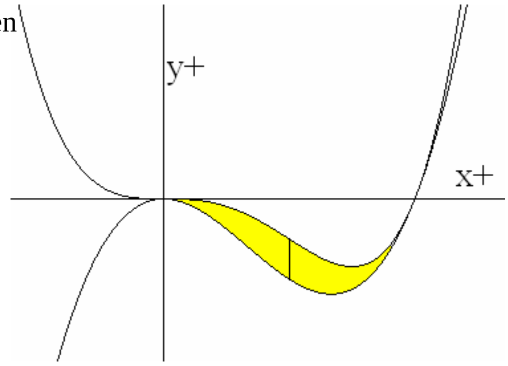


13) In nebenstehender Abbildung sind Γ_f und Γ_g die Graphen normierter Polynomfunktionen dritten Grades und berühren die Parabel p[p: $y = x^2$] im Koordinatenursprung. Ferner schließen beide Funktionsgraphen mit p jeweils ein Gebiet (gefärbte Flächenstücke) mit einem Flächeninhalt von 108 ein.

a) Ermittle Funktionsgleichungen von f und g. Verwende und begründe dazu den Ansatz $y = x^3+ax^2$!

b) Gib die Koordinaten der Punkte P und Q sowie der Endpunkte der maximalen vertikalen Durchmesser der beiden Flächen an!

14) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = \frac{5}{3} \cdot x^4 - 20x^3$ und $y = g(x) = 20x^3 - 240x^2$ sowie das von Γ_f und Γ_g begrenzte Gebiet inkl. seinem maximalen vertikalen Durchmesser eingezeichnet.



a) Beschrifte die Graphen in der Abbildung und begründe deine Entscheidung jeweils!

b) Untersuche die gegenseitige Lagebeziehung von Γ_f und Γ_g und zeige, dass das markierte Gebiet einen Flächeninhalt aufweist, welcher exakt dem bestimmten Integral $\int_0^{24} 2x^3 \cdot dx$ entspricht.

c) Ermittle den maximalen vertikalen Durchmesser und zeige, dass die Tangenten an Γ_f und Γ_g in den Endpunkten dieses Durchmessers zueinander parallel verlaufen! Begründe dies allgemein anhand der Genese dieser Extremwertaufgabe!

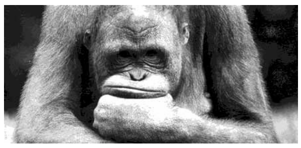
15) $W_1(2|y_1)$ ist ein Wendepunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktionen vierten Grades f, $t_1[I(-1|-3), II(5|6)]$ ist die zugehörige Wendetangente. Ferner ist mit $W_2(4|4)$ der zweite Wendepunkt von Γ_f bekannt.

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f!

b) Berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, welches die Wendetangente t_2 von W_2 mit Γ_f begrenzt. In welchem Verhältnis wird dieses Flächenstück von t_1 geteilt?

c) Analog zu b), wobei t_1 und t_2 jetzt die Rollen tauschen!

Für die folgenden Aufgaben 16) und 17) gilt: Bei Aufgabenteil (a) sollst du – über das sonstige Procedere hinaus! – selbst[1] ein wenig (aber intensiver als der rechts abgebildete Primat! ☺[2]) darüber nachdenken, wie du – unter Verwendung des Ansatzes[3] $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ bei Aufgabe 16) bzw. einem selbst entsprechend zuwählenden Ansatz bei Aufgabe 17) – zur Funktion f kommst.



16) (a) Löse die EULERsche Differentialgleichung $x^2y'' - 3xy' + 3y + 6 = 0$ unter den Randbedingungen $y(-2) = -4$ und $y(3) = 16$, die Lösungsfunktion heiße f.

(b) Diskutiere f und zeichne Γ_f!

(c) Durch den Tiefpunkt T von Γ_f soll eine Gerade g gelegt werden, welche mit Γ_f *rechts von* T ein Segment mit einem Flächeninhalt von 33,75FE begrenzt. Stelle eine Gleichung von g auf und berechne auch den Inhalt jenes Flächenstücks, welches g *links von* T mit Γ_f begrenzt.

17) Eine Polynomfunktion vierten Grades f, deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft, erfüllt die Differentialgleichung $y''^2 = y + x^2$.

(a) Ermittle die Funktionsgleichung von f [Res.: $y = x^4/144 + x^3/6$].

(b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

(c) Zeige, dass die Wendetangentenabschnitte zwischen den Schnittpunkten mit dem Graphen von f einander in ihrem Schnittpunkt im Verhältnis 3:1 teilen.

(d) In welchem Verhältnis stehen die Inhalte jener Flächenstücke, welche die Wendetangenten mit dem Graphen von f begrenzen?

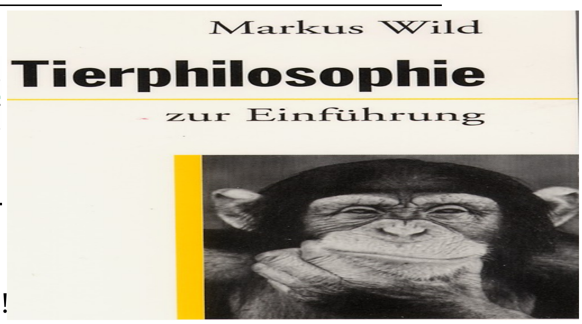
Bem.: Auch $y = x^4/144 - x^3/6$ wäre eine Lösung, rechne aber mit dem obig angeführten Resultat!

---

[1]: In der Tat hat Mathematik eine stark (aufgrund der Prüfungskultur im entsprechenden Unterrichtsgegenstand am Vormittag ebenda – leider! – nicht allzu stark integrierte) k r e a t i v e K o m p o n e n t e!!

[2]: Übrigens: Der Frage, inwieweit Tiere denken, ist auch schon so mancher Philosoph nachgegangen (siehe Abbildung rechts!)!

[3]: Wie man (derartige "EULERsche") Differentialgleichungen (und andere Typen) im Allgemeinen (also ohne Ansätze wie oben!) löst, ist eine hochinteressante Frage, deren Beantwortung jedoch leider für den (Regel-)Unterricht (nicht aber für das Wahlpflichtfach!) zu komplex ist!



18) Durch den Punkt $P(1|1)$ verläuft genau eine Parabel par in zweiter Hauptlage.

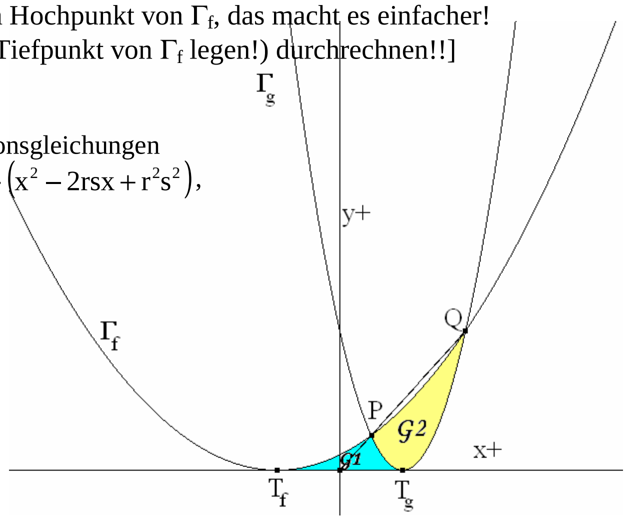
(a) Stelle eine Gleichung von par auf!

(b) Ermittle Gleichungen jener Geraden g und h durch P, welche mit par Segmente mit dem Flächeninhalt 36 begrenzen. Berechne auch die Koordinaten der zweiten Schnittpunkte!

(c) Gib (ohne das genaue Winkelmaß zu berechnen, d.h. nur durch Berechnung entsprechender trigonometrischer Werte) eine Anleitung zur Konstruktion des Schnittwinkels zwischen g und h!

19) Durch den Hoch- und den Tiefpunkt des Graphen Γ_f einer Polynomfunktion dritten Grades f wird der Graph Γ_g einer Polynomfunktion zweiten Grades g gelegt, welcher Γ_f in einem der beiden Extrempunkte berührt. In welchem Verhältnis teilt Γ_g das von Γ_f und der Tangente an Γ_f in ebenjenem Extrempunkt begrenzte Flächenstück?

Tipp: Ansatz $y = f(x) = x^3 - 3ax^2$, Berührung von Γ_g und Γ_f im Hochpunkt von Γ_f, das macht es einfacher!
[P.S.: Zwecks Übung auch die andere Variante (Γ_g durch den Tiefpunkt von Γ_f legen!) durchrechnen!!]



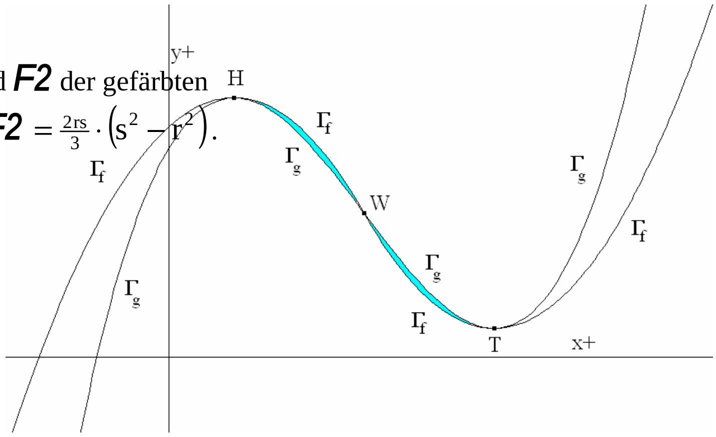
20) Betrachte Polynomfunktionen zweiten Grades f und g mit Funktionsgleichungen der Form $y = f(x) = \frac{1}{(r+s)^2} \cdot (x^2 + 2rsx + r^2s^2)$ und $y = g(x) = \frac{1}{(r-s)^2} \cdot (x^2 - 2rsx + r^2s^2)$,
wobei $0 < r < s$ (*) vorausgesetzt wird.

a) Begründe, warum die Tiefpunkte T_f und T_g von Γ_f und Γ_g auf der x-Achse liegen (siehe Abbildung!).

Rechne in weiterer Folge allgemein mit den Parametern [unter Beachtung von (*)!] oder mit den sich aus $r = 1$ und $s = 2$ ergebenden konkreten Parabeln:

b) Beweise/verifiziere, dass die Schnittpunkte P und Q von Γ_f und Γ_g und der Koordinatenursprung kollineare Lage aufweisen.

c) Beweise/kontrolliere für die Flächeninhalte ***F1*** und ***F2*** der gefärbten Gebiete ***G1*** und ***G2*** die Formeln ***F1*** $= \frac{2r^3s}{3}$ und ***F2*** $= \frac{2rs}{3} \cdot (s^2 - r^2)$.

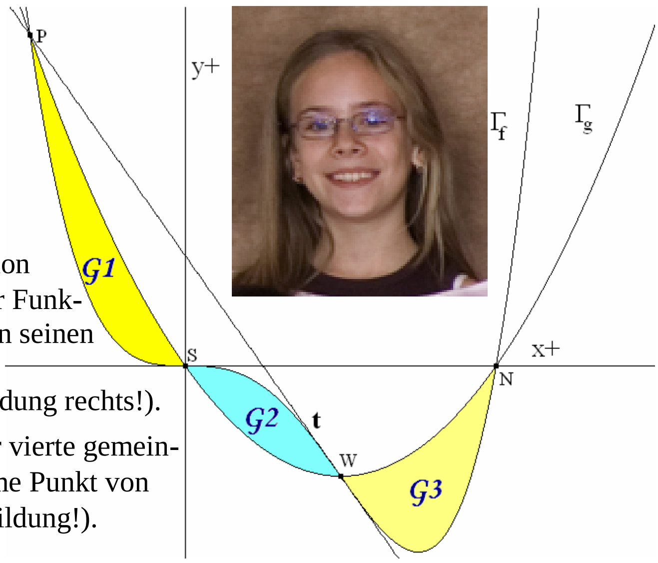


21) a) Warum ist die via

$$y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 8 & \text{für } x \in]-\infty;3] \\ x^2 - 10x + 26 & x \in]3;\infty[\end{cases}$$

definierte Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

b) Γ_f ähnelt in auffälliger Weise dem Graphen Γ_g einer Polynomfunktion dritten Grades g (siehe Abbildung rechts!), welcher die gleichen Extrempunkte und den gleichen Wendepunkt wie Γ_f aufweist. Stelle die Funktionsgleichung von g auf und zeige, dass die Flächeninhalte jener Gebiete, welche Γ_f und Γ_g begrenzen, gleich sind.



22) a) Ermittle die Funktionsgleichung jener Polynomfunktion zweiten Grades g, deren Graph Γ_g den Graphen Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 4x^3$ in seinen beiden Schnittpunkten mit der x-Achse sowie seinem gewöhnlichen Wendepunkt W schneidet (siehe Abbildung rechts!).

b) Zeige, dass W der Tiefpunkt von Γ_g ist und ferner der vierte gemeinsame Punkt von Γ_f und Γ_g auch der zweite gemeinsame Punkt von Γ_f und seiner schrägen Wendetangente t ist (vgl. Abbildung!).

c) Denise (siehe erster Quadrant!) behauptet, dass die Flächeninhalte ***F1***, ***F2*** und ***F3*** der Gebiete ***G1***, ***G2*** und ***G3*** der Proportion ***F1*** : ***F2*** = ***F3*** : ***F2*** = 19 : 11 genügen? Liegt Denise mit ihrer Berechnung richtig?

23) Die "äußeren" der drei paarweise verschiedenen Nullstellen einer Polynomfunktion dritten Grades f seien gleichzeitig auch die Nullstellen einer Polynomfunktion zweiten Grades g, wobei Γ_f und Γ_g einander einmal auf der $x-$Achse berühren. Beweise, dass der Inhalt jener Fläche, welche die beiden Funktionsgraphen miteinander begrenzen, nur von der Differenz der "äußeren" Nullstellen, nicht aber von der Lage der mittleren Nullstelle abhängt.

24) Eine Polynomfunktion f vierten Grades mit einer dreifachen und einer einfachen Nullstelle begrenzt mit der x-Achse ein Flächenstück der Breite b und der Höhe h. Beweise, dass dann für den Flächeninhalt ***A*** dieses Flächenstücks die Formel ***A*** = $\frac{64bh}{135}$ gilt.

25) Fortsetzung von Aufgabe 6:

Klasse: 8D(Rg) | **1. Schularbeit (zweistündig)** | 13. 11. 2009

Modul PM5: Integralrechnung und Stochastik 2

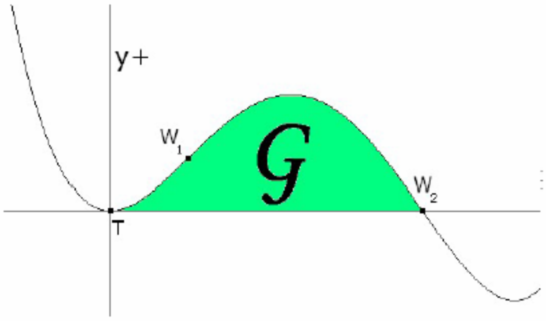
2. $\boxed{\text{SATZ.}}$ Weist der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades f einen Tiefpunkt T im Ursprung sowie einen Wendepunkt W_2 auf der $x-$Achse auf und ist $W_1(u|v)$ der zweite nicht auf der $x-$Achse liegende Wendepunkt, so gilt: Der Flächeninhalt $\mathcal{F}$ des vom Graphen Γ_f und der $x-$Achse zwischen T und W_2 begrenzten Gebiets $\mathcal{G}$ (siehe Abbildung links unten!) beträgt

$$\boxed{\mathcal{F} = \frac{128}{25} \cdot u \cdot v}.$$

Überprüfe diesen Satz für die Funktion aus Aufgabe 1 [zur Kontrolle: $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2$].

Aufgabe 1) dieser Schularbeitsangabe entspricht der Aufgabe 6) dieser Aufgabensammlung!!

Zeige aber zuerst, dass Γ_f auch tatsächlich einen Tiefpunkt im Ursprung aufweist!



26) Fortsetzung von Aufgabe 5:

Klasse: 8B(G) | **1. Schularbeit (zweistündig)** | 6. 11. 2008

Modul PM5: Integralrechnung & Stochastik 2

2) **SATZ.** Weist der Graph Γ_f einer Polynomfunktion vierten Grades f einen Tiefpunkt T auf der x-Achse und einen Sattelpunkt S auf der y-Achse auf, dann begrenzt Γ_f mit den Koordinatenachsen ein Gebiet **G** mit dem Flächeninhalt **F** = $\frac{3bh}{5}$ (siehe nebenstehende Abbildung).

Verifiziere diesen Satz für die Funktion aus Beispiel 1 [zur Kontrolle: y = f(x) = $\frac{1}{16} \cdot (x^4 - 8x^3 + 432)$ ☺]!

Achtung! Aufgabe 1) dieser Schularbeitsangabe entspricht Aufgabe 5) dieser Aufgabensammlung!!

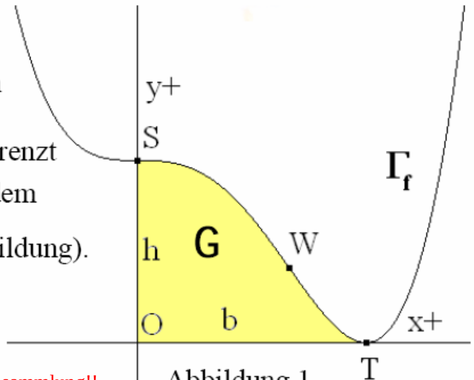


Abbildung 1

27) Fortsetzung von Aufgabe 4:

Klasse: 8C(Rg) **1. Schularbeit (zweistündig)** 4. 11. 2008

Modul PM5: Integralrechnung & Stochastik 2

2) Weist eine Polynomfunktion dritten Grades f Extremstellen auf, so begrenzt die Gerade g durch den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T von Γ_f mit Γ_f zwei Gebiete (vgl. Abb. 1). Zeige am Beispiel der Funktion aus Beispiel 1) [zur Kontrolle: $y = f(x) = x^3 + 6x^2 - 135x$ ☺] die Gültigkeit der folgenden beiden Sätze:

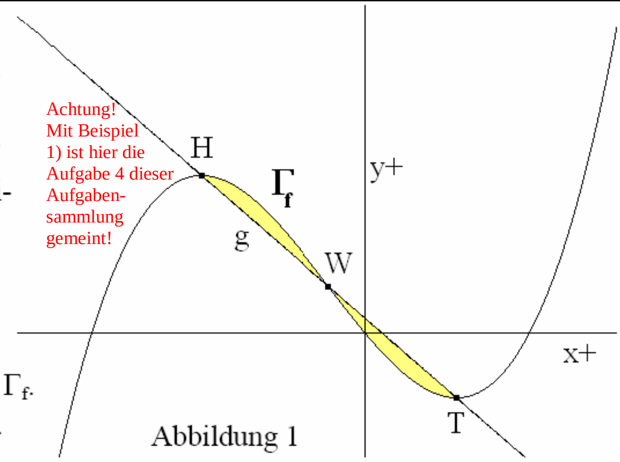
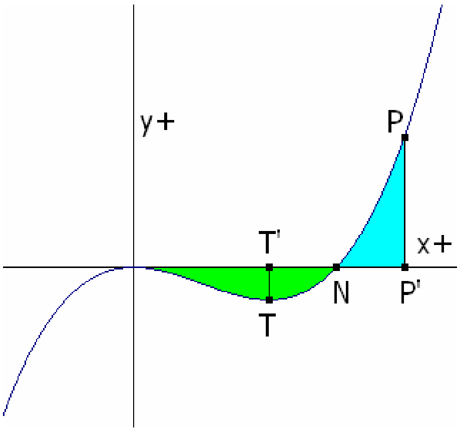


Abbildung 1

SATZ 1. Der Wendepunkt W von Γ_f ist der dritte gemeinsame Punkt von g und Γ_f.

SATZ 2. Die Flächeninhalte F_1 und F_2 der beiden Gebiete sind gleich groß, und zwar gilt $F_1 = F_2 = \frac{|x_H - x_T| \cdot |y_H - y_T|}{32}$, wobei $H(x_H|y_H)$ und $T(x_T|y_T)$.

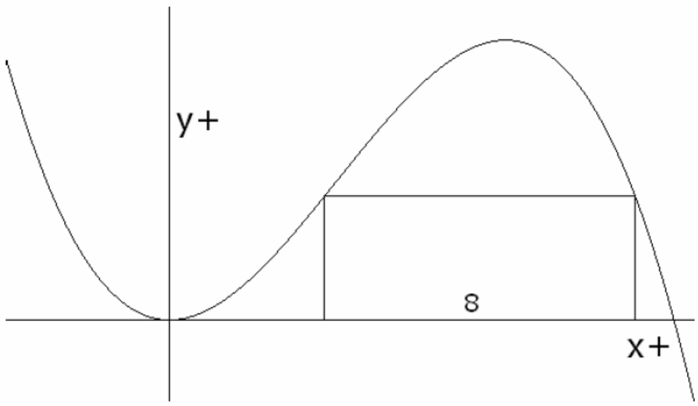
28) Der Graph der in nebenstehender Figur abgebildeten Polynomfunktion dritten Grades f weist im Koordinatenursprung seinen Hoch- und in T(6|–16) seinen Tiefpunkt auf. P' entsteht durch Spiegelung von T' an N. Zeige, dass die beiden gefärbten Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt aufweisen und gib aufgrund dieser Eigenschaft ohne weiterer Berechnungen das Resultat für das bestimmte Integral $\int_0^{x_P} f(x) \cdot dx$ an (Begründung des Resultats!).



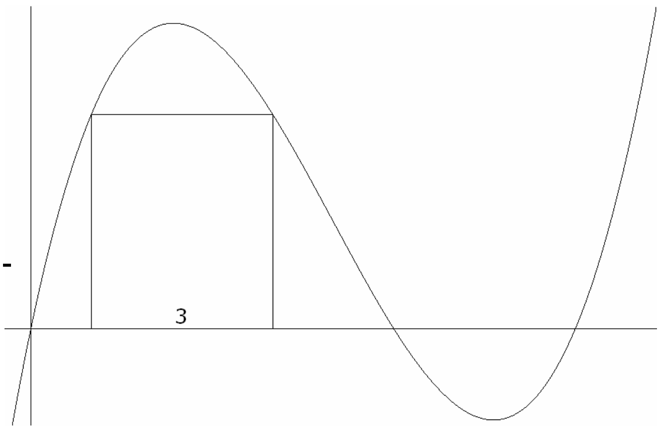
29) Nebenstehend ist der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = -x^3 + 13x^2$ abgebildet.

a) Ermittle die Koordinaten der Eckpunkte des in der Abbildung eingezeichneten Rechtecks der Breite 8 (Achtung! Figur nicht maßstabsgetreu!) und begründe die Eindeutigkeit der Lösung!

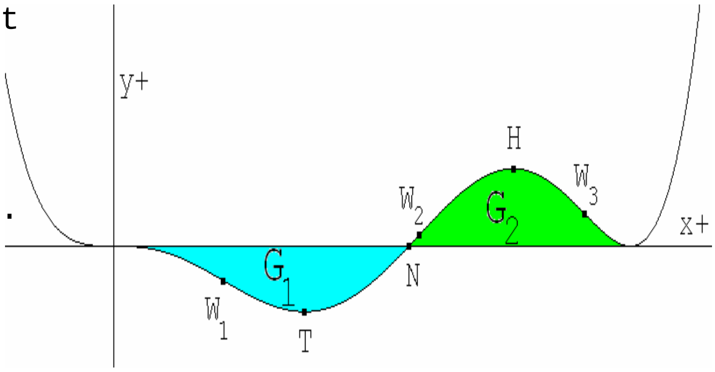
b) Begründe ohne Taschenrechner, dass das Rechteck weniger als 50% des vom Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzten Gebiets einnimmt!



30) Nebenstehend ist der Graph der reellen Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^3 - 15x^2 + 54x$ abgebildet. Schreibe jenem Bereich, welchen Γ_f im ersten Quadranten mit der x-Achse begrenzt, jenes eindeutig bestimmte Rechteck mit Breite 3 ein und zeige, dass dieses Rechteck dieses Gebiet im Verhältnis 5:4 teilt.



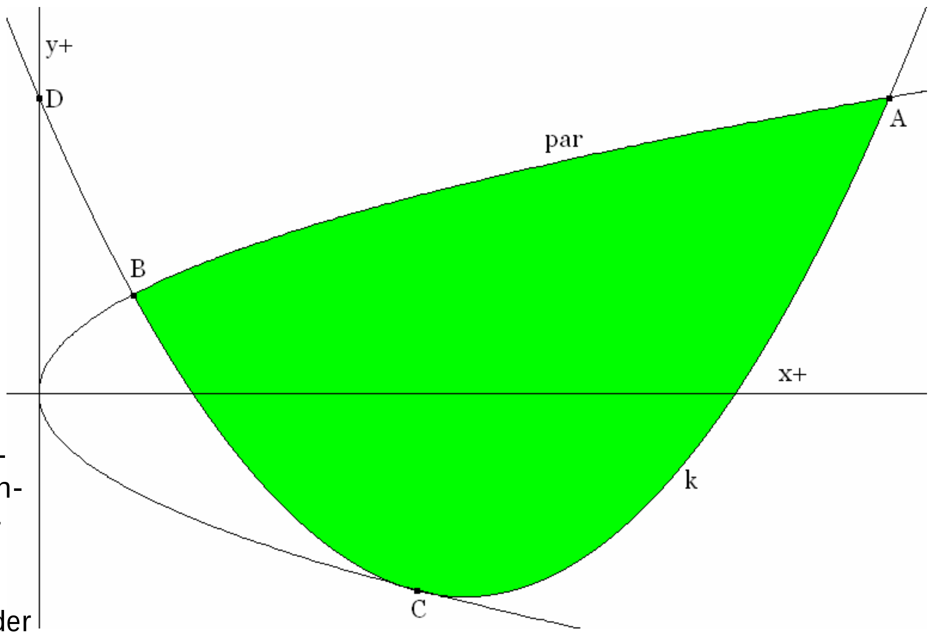
31) Die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=7x^3\cdot(x-4)\cdot(x-7)^2$ ist gegeben. Ihr Funktionsgraph Γ_f ist in der rechten Figur abgebildet.



a) Berechne $F(x)=\int f(x)\cdot dx$! Kontrolliere, dass $F(x) = x^4\cdot(x-7)^3$ gilt.

b) Zeige, dass die Gebiete G_1 und G_2 den gleichen Flächeninhalt aufweise und erkläre hierbei kurz die Nützlichkeit des Kontrollteils in a)! Wie groß muss daher $\int_0^7 f(x)\cdot dx$ sein?

32)a) Stelle eine Gleichung jener nach oben geöffneten Normparabel k (k: $y=x^2+ax+b$) auf, welche die durch den Punkt $A(9/4|3/4)$ gehende Parabel par in erster Hauptlage in A und $B(x_B|y_B)$ mit $x_B=y_B$ schneidet. Kontrolliere, dass A und D gleich hoch liegen und bestätige die in der Abbildung illustrierte Lagebeziehung zwischen k und par (nebst der Schnittpunkte A und B)!



b) Zeige, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist und begründe ohne Taschenrechner, dass sein Flächeninhalt weniger als eine Flächeneinheit beträgt.

c) Berechne den Flächeninhalt des in der Figur gefärbten von k und par eingeschlossenen Gebiets und zeige die relativ gute Übereinstimmung mit $\sqrt{2}$!

d) Zeige ohne Taschenrechner, dass das Dreieck aus b) mehr als 2/3 der Fläche aus c) ausmacht!

33) Eine Erweiterung der Übungsaufgabe 106 zum ersten Teil der Differentialrechnung aus "eurer" 7A[1]:

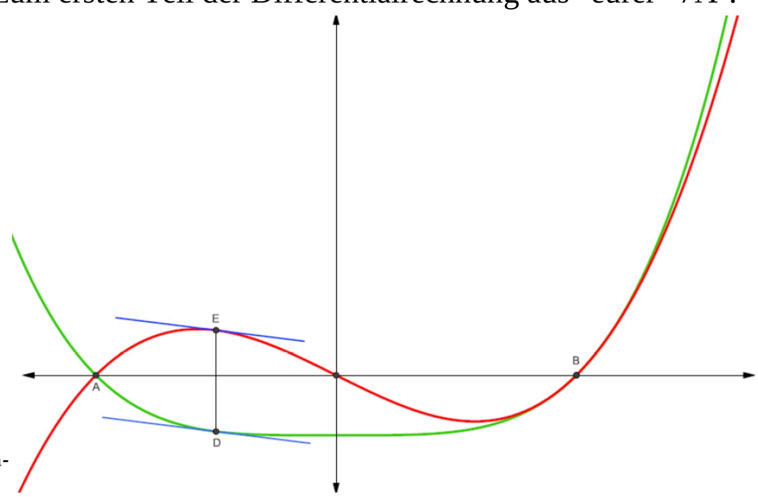
Gegeben sind die reellen Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=\frac{1}{8}\cdot(x^3-4x)$ sowie $y=g(x)=\frac{1}{32}\cdot(x^4-16)$.

(1) Ordne den Kurven in der Abbildung den jeweiligen Funktionsgraphen zu. Begründe!

(2) Zeige, dass die beiden Kurven einander je in einem Punkt der x-Achse orthogonal schneiden bzw. oskulieren.

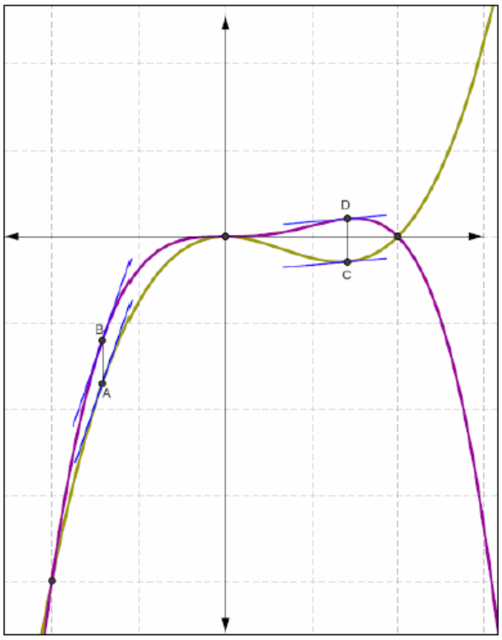
(3) Verifiziere, dass das von den beiden Funktionsgraphen begrenzte Gebiet einen Flächeninhalt von 1.6 aufweist.

(4) Berechne Lage und Länge des längsten zur y-Achse parallelen Durchmessers DE dieses Gebiets! Begründe, warum die Tangenten an die Kurven in D und E zueinander parallel sein müssen!



[1]: Du kannst dir natürlich noch andere derartige Aufgaben hernehmen und eigenständig entsprechende Flächeninhalte berechnen! ☺

34) Eine Erweiterung der Übungsaufgabe 107 zum ersten Teil der Differentialrechnung aus "eurer" 7A:



Gegeben sind die reellen Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3-x^2$ sowie $y=g(x)=x^3-x^4$.

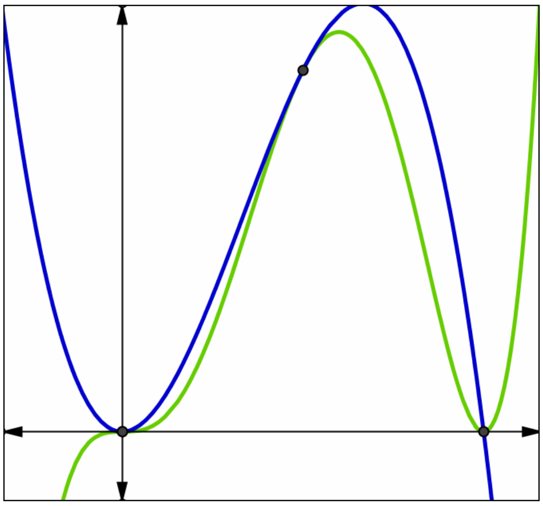
(1) Ordne den Kurven in der Abbildung den jeweiligen Funktionsgraphen zu. Begründe!

(2) Zeige, dass die beiden Kurven einander im Ursprung beühren und sich ein weiteres Mal auf der x-Achse orthogonal schneiden.

(3) Verifiziere, dass das von den beiden Funktionsgraphen begrenzte Gebiet einen Flächeninhalt von $\frac{4}{15}$ aufweist.

(4) Berechne Lage und Länge des längsten zur y-Achse parallelen Durchmessers AB bzw. CD dieses Gebiets! Begründe, warum die Tangenten an die Kurven in A und B bzw. C und D zueinander parallel sein müssen und zeige, dass AB und CD gleich lang sind.

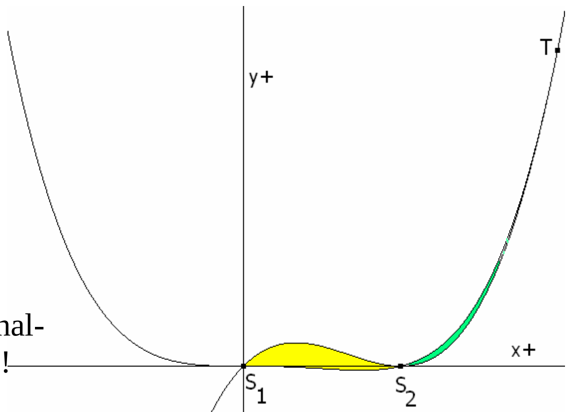
35) In der rechten unteren Figur auf der nächsten Seite sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x)=x^5-4x^4+4x^3$ und $g(x)=-x^3+2x^2$ abgebildet.



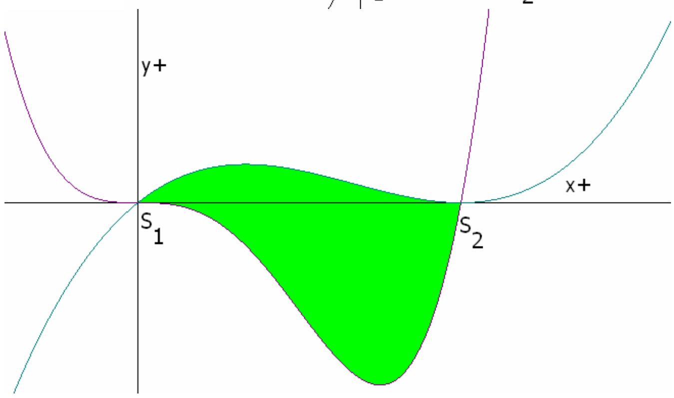
a) Ordne den Kurven die jeweilige Funktion zu und begründe deine Wahl!

b) Zeige, dass die beiden Kurven einander in zwei Punkten berühren und in einem Punkt schneiden und berechne die Flächeninhalte der beiden von ihnen begrenzten Gebiete! (Zeige, dass sich letztere wie 3:13 verhalten.)

36) Durch die Wendepunkte des Graphen der Funktion f [$y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$] wird eine Parabel in zweiter Hauptlage gelegt, welche mit Γ_f drei Flächenstücke begrenzt. Zeige, dass sich die Inhalte dieser Flächenstücke wie 19:11:19 verhalten. Fertige eine saubere Skizze an!

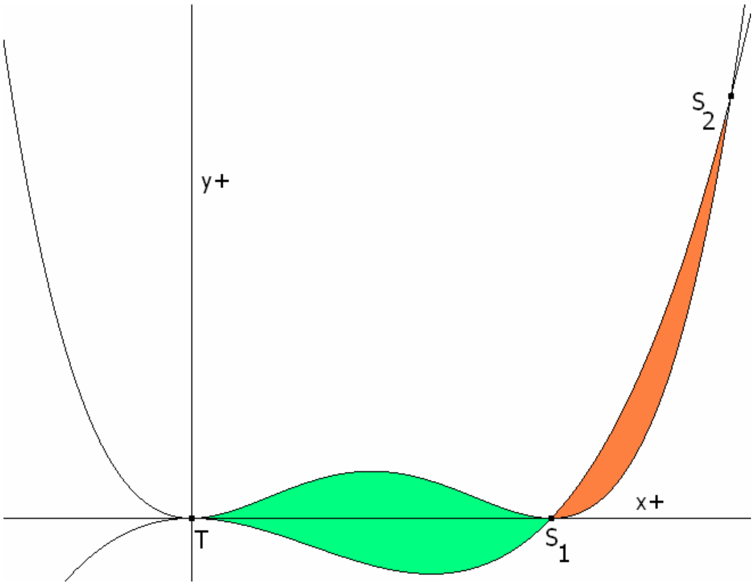


37) Unmittelbar rechts sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=\frac{1}{8}\cdot(15x^4-30x^3)$ und $y=g(x)=15x^3-60x^2+60x$ abgebildet. Berechne die Flächeninhalte der beiden von den Funktionsgraphen begrenzten Gebiete!



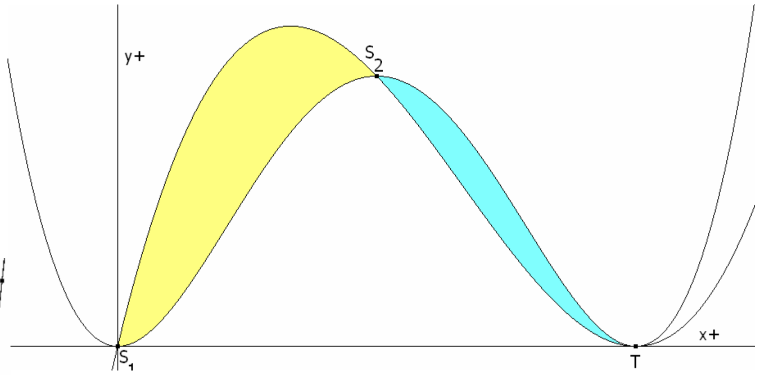
38) Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=5x^4-20x^3$ und $y=g(x)=3x^3-24x^2+48x$ abgebildet. Berechne den Flächeninhalte des von den beiden Funktionsgraphen begrenzten Gebiets!

39) Rechts sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=4x^4-80x^3+400x^2$ und $y=g(x)=20x^3-200x^2$. Setze die Flächeninhalte der beiden gefärbten Gebiete in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!

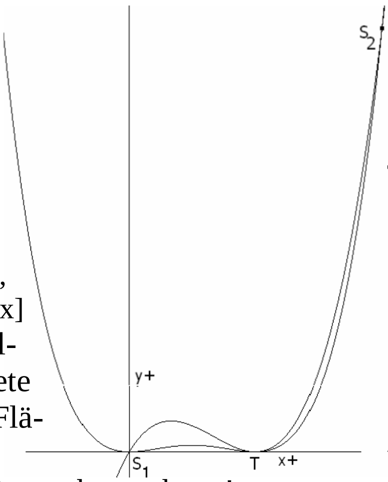


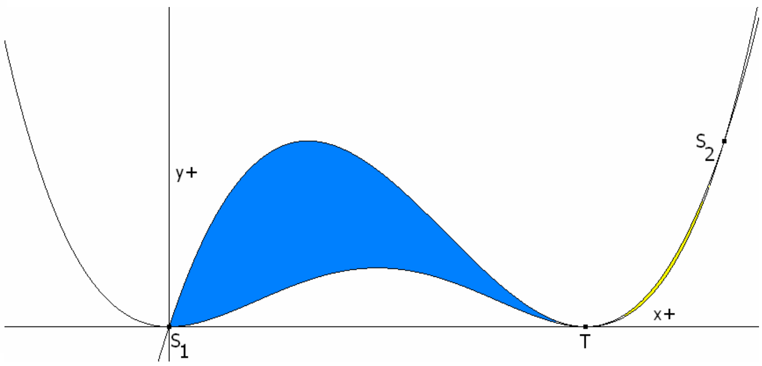
40) Rechts unten sind zwei gefärbte Gebiete abgebildet, welche die Graphen der beiden Funktionen f $[y=f(x)=x^4-4x^3+4x^2]$ und $g[y=g(x)=x^3-4x^2+4x]$ miteinander begrenzen. Zeige, dass sich deren Flächeninhalte wie 23:7 verhalten!

41) Zeige, dass die weiter unten rechts abgebildeten Funktionsgraphen der Funktionen f $[y=f(x)=x^4-6x^2+9x^2]$ und $y=g(x)=4x^3-24x^2+36x$ zwei Gebiete einschließen, deren Flächeninhalte sich wie 63:1 verhalten!

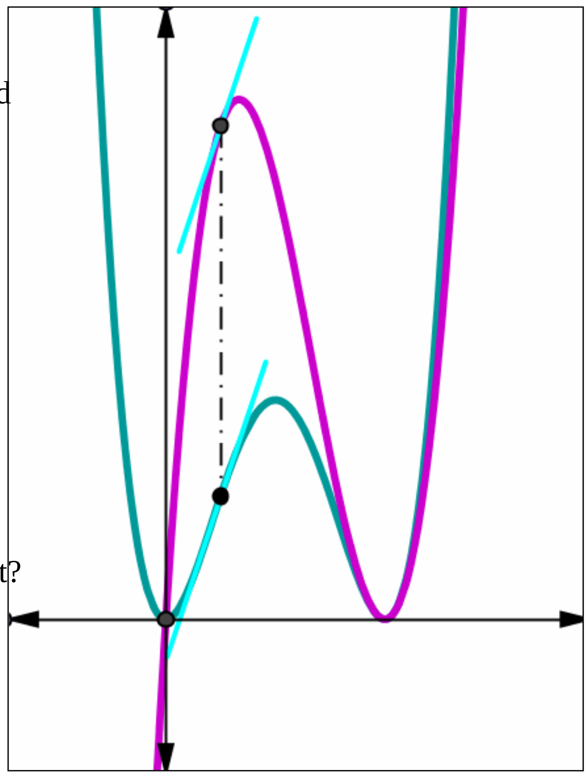


42) Unmittelbar rechts sind die Graphen der Funktionen f und g $[f(x)=x^4-2x^3+x^2$, $g(x)=2x^3-4x^2+2x]$ abgebildet, welche zwei Gebiete von gleichem Flächeninhalt begrenzen. Dies ist nachzurechnen!





43) In der rechten Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=5x^4-40x^3+80x^2$ und $y=g(x)=20x^3-160x^2+320x$ abgebildet.



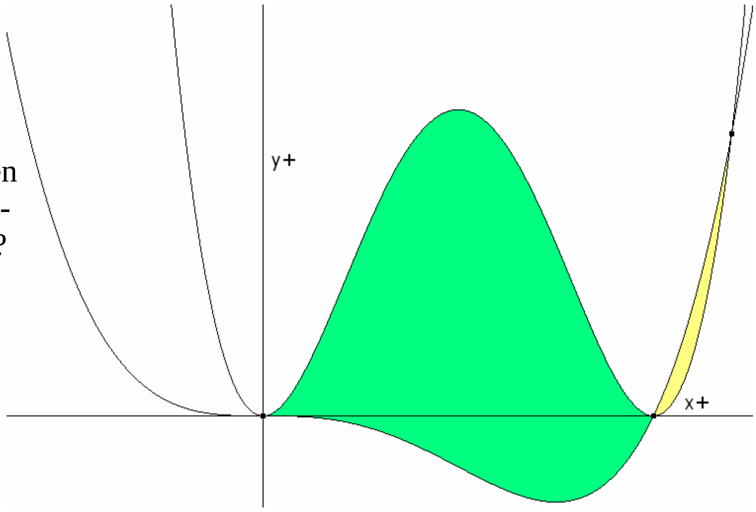
a) Zeige, dass die beiden Funktionsgraphen genau ein Gebiet begrenzen und berechne dessen Flächeninhalt!

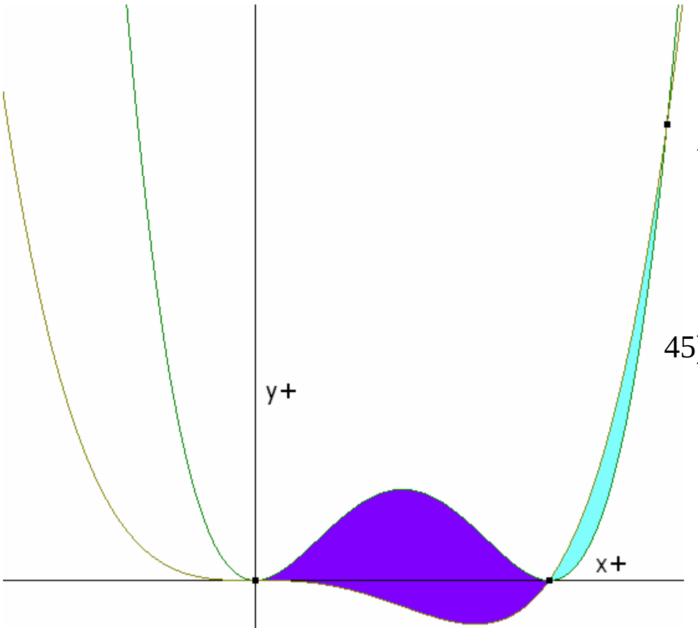
b) Ermittle den längsten zur y-Achse parallelen Durchmesser dieses Gebiets und zeige, dass die Tangenten an die beiden Kurven in den Endpunkten dieses Durchmessers zueinander parallel verlaufen. Erkläre, warum das zwingenderweise so und nicht anders sein muss!

c) In welchem Verhältnis teilt der Durchmesser das Gebiet?

d) Ist eine dieser beiden Tangenten eine Wendetangente? Begründe deine Antwort!

44) In der rechten Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=24x^4-240x^3+600x^2$ und $y=g(x)=4x^4-20x^3$ abgebildet.
In welchem durchgekürzten Verhältnis stehen die Flächeninhalte jener beiden Gebiete, welche die beiden Funktionsgraphen begrenzen?





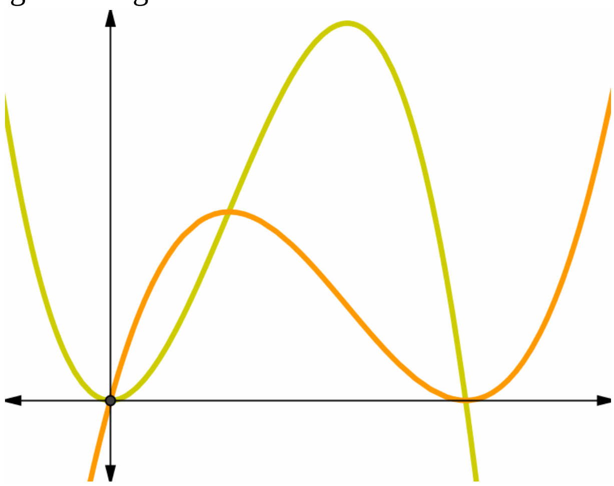
45) Links sind die Graphen der Funktionen f [$y=f(x)=7x^4-210x^3+1575x^2$] und g[$y=g(x)=2x^4-30x^3$] abgebildet.
Setze die Flächeninhalt der gefärbten Gebiete in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!

46) Die Kurven in der rechten Abbildung sind Funktionsgraphen von Polynomfunktionen.

a) Von welchem Grad sind die zugehörigen Polynom(funktion)e(n) mindestens? Begründe!

b) Ordne den Kurven die jeweils passende der beiden Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=3x^2-½\cdot x^3$ und $y=g(x)=¼\cdot x^3-3x^2+9x$ zu!

c) In welchem (durchgekürzten!) Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden von den Kurven begrenzten Gebiete?

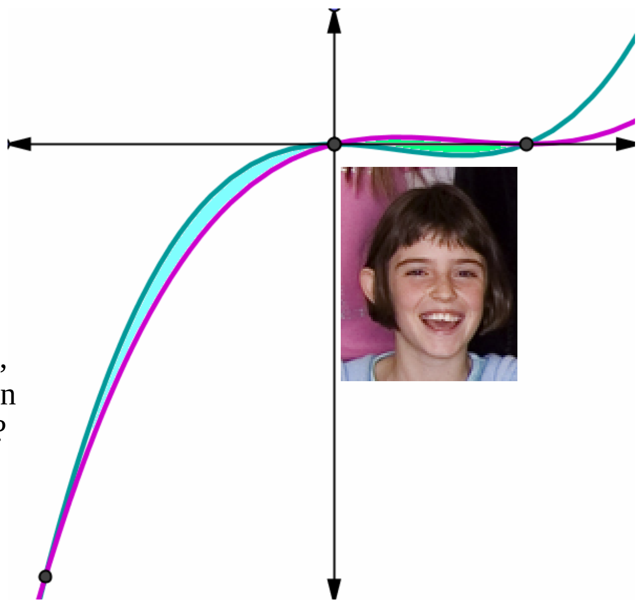


47) Die Kurven in der rechten Abbildung sind Funktionsgraphen von Polynomfunktionen.

a) Von welchem Grad sind die zugehörigen Polynom(funktion)e(n) mindestens? Begründe!

b) Ordne den Kurven die jeweils passende der beiden Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=30x^3-60x^2$ und $y=g(x)=18x^3-72x^2+72x$ zu!

c) Julia verkündet freudig (siehe vierter Quadrant), dass sich die Flächeninhalte der beiden gefärbten Gebiete wie 3:1 verhalten. Stimmt das wirklich?

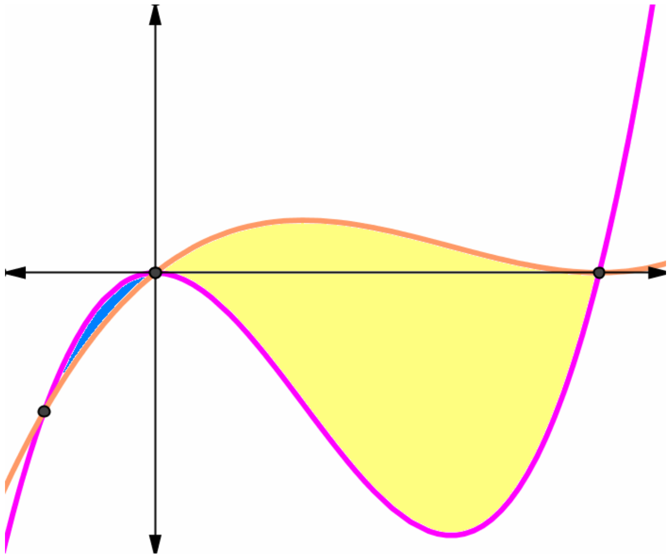


48) Die Kurven in der rechten Abbildung sind Funktionsgraphen von Polynomfunktionen.

a) Von welchem Grad sind die zugehörigen Polynom(funktion)e(n) mindestens? Begründe!

b) Ordne den Kurven die jeweils passende der beiden Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=5x^3-20x^2$ und $y=g(x)=x^3-8x^2+16x$ zu!

c) In welchem (durchgekürzten!) Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden von den Kurven begrenzten Gebiete?

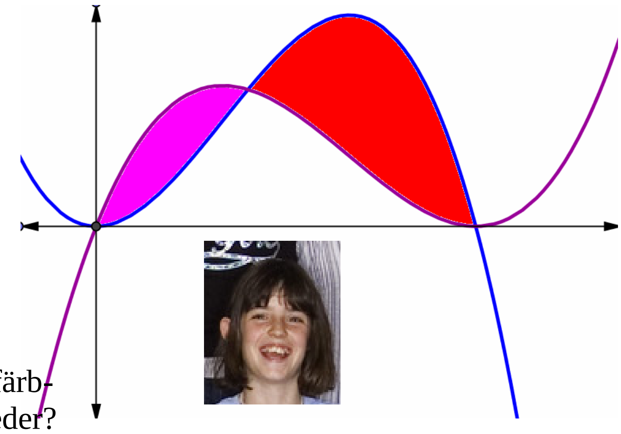


49) Die Kurven in der rechten Abbildung sind Funktionsgraphen von Polynomfunktionen.

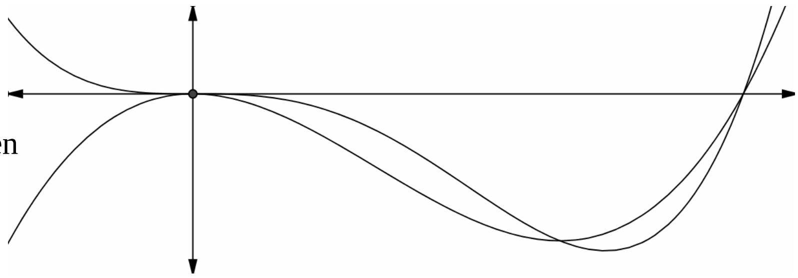
a) Von welchem Grad sind die zugehörigen Polynom(funktion)e(n) mindestens? Begründe!

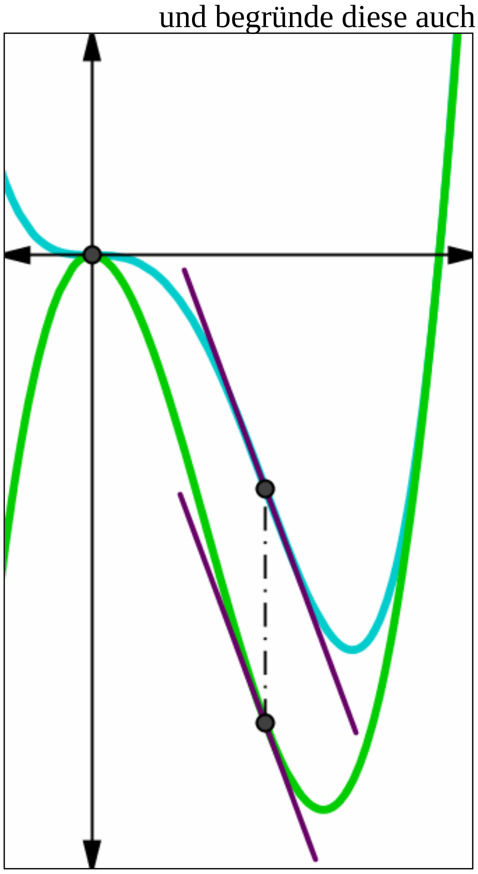
b) Ordne den Kurven die jeweils passende der beiden Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=180x^2-36x^3$ und $y=g(x)=24x^3-240x^2+600x$ zu!

c) Julia verkündet erneut freudig (siehe vierter Quadrant), dass sich die Flächeninhalte der beiden gefärbten Gebiete wie 3:1 verhalten. Stimmt es jetzt/wieder?

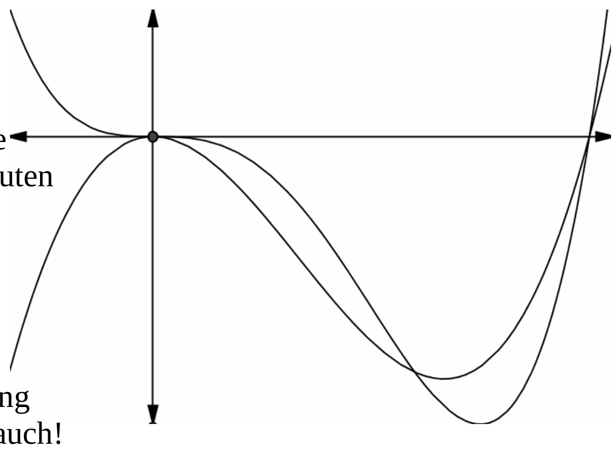


50) Zeige, dass sich die Flächeninhalte der in der rechten Figur abgebildeten Gebiete wie 16:7 verhalten. Dabei lauten die Gleichungen der Begrenzungskurven $y=20x^4-60x^3$ und $y=40x^3-120x^2$. Triff zuerst eine entsprechende Zuordnung und begründe diese auch!





51) Zeige, dass die Flächeninhalte der in der rechten Figur abgebildeten Gebiete gleich sind. Dabei lauten die Gleichungen der Begrenzungskurven $y=5x^4-25x^3$ und $y=15x^3-75x^2$. Triff zuerst eine entsprechende Zuordnung und begründe diese auch!



52) In der linken unteren Figur auf der vorigen Seite sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x)=5x^4-30x^3$ und $g(x)=30x^3-180x^2$ abgebildet.

a) Ordne der jeweiligen Kurve die passende Funktion zu (Begründung)!

b) Berechne den Flächeninhalt des von den beiden Kurven begrenzten Gebiets!

c) Ermittle den längsten vertikalen Durchmesser dieses Gebiets und zeige, dass dieser das Gebiet in zwei gleich große Flächenstücke teilt. Weise die Parallelität der eingezeichneten Tangenten nach und begründe sie allgemein!

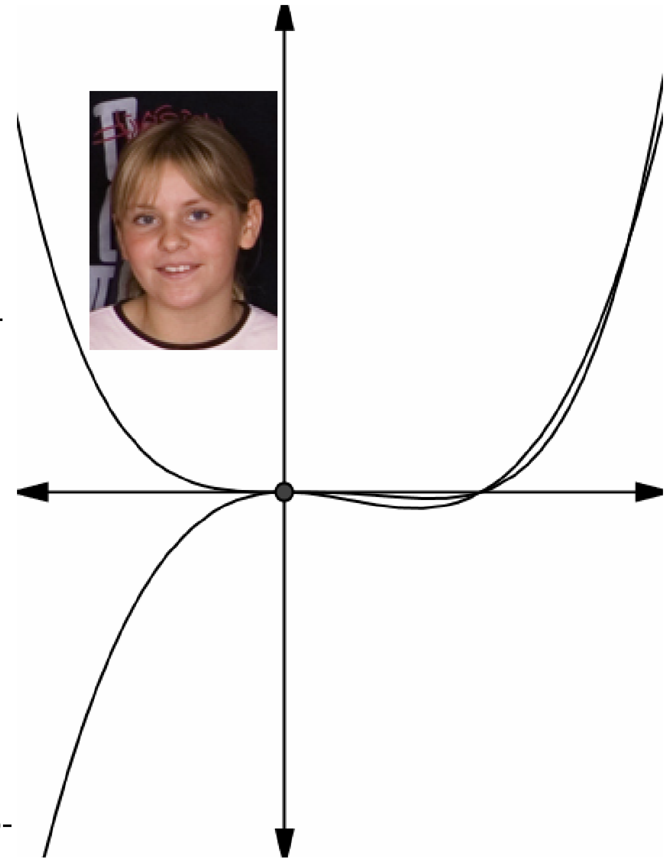
d) Zeige, dass eine der beiden parallelen Tangenten eine Wendetangente ist und die andere Tangente durch den Koordinatenursprung verläuft!

e) Rechne nach, dass die Wendetangente aus d) mit ihrem Funktionsgraphen ein 1 ½ mal so großes Gebiet begrenzt als jenes aus b)!

53) In der rechten Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x)=60x^4-240x^3$ und $g(x)=420x^3-1680x^2$ abgebildet.

a) Ordne der jeweiligen Kurve die passende Funktion zu (Begründung)!

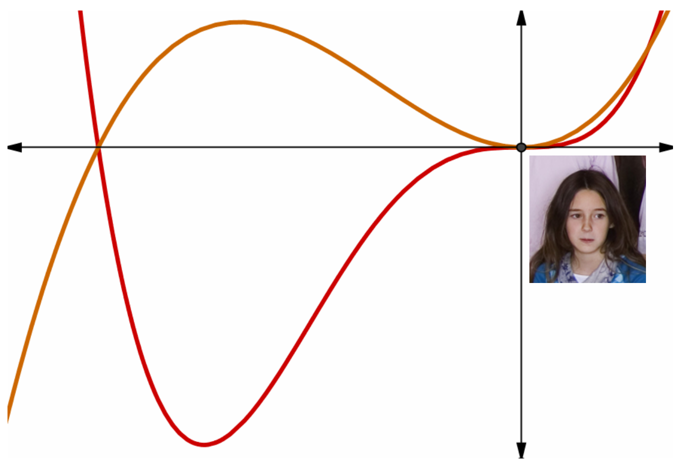
b) Ulli (siehe zweiter Quadrant) behauptet, dass sich die Flächeninhalte der beiden von den Funktionsgraphen begrenzten Gebiete wie 103:145 verhalten! Stimmt das wirklich?



54) In der rechten unteren Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x)=x^4+10x^3$ und $g(x)=3x^3+30x^2$ abgebildet.

a) Ordne der jeweiligen Kurve die passende Funktion zu (Begründung)!

b) Anna (siehe vierter Quadrant) behauptet, dass sich die Flächeninhalte der beiden von den Funktionsgraphen begrenzten Gebiete wie 100:1 verhalten! Stimmt das wirklich?



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Lösungen folgen im Herbst 2012!

Wien, im Mai 2012. Dr. Robert Resel, e. h.