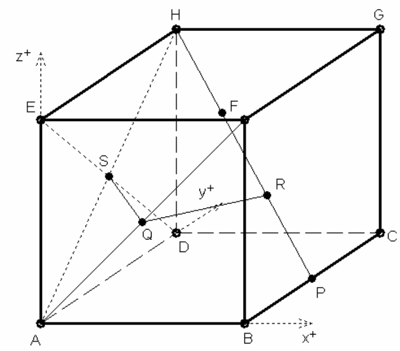
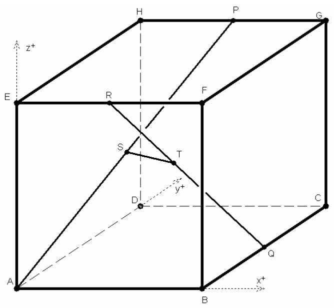
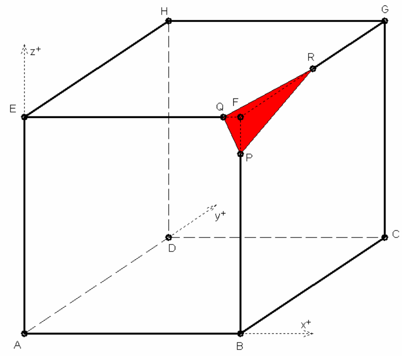
Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

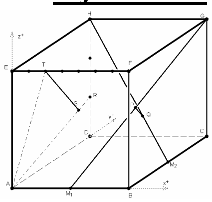


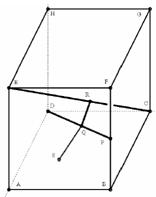
(6A, G y m n a s i u m, 2010/11)

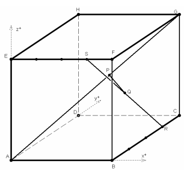


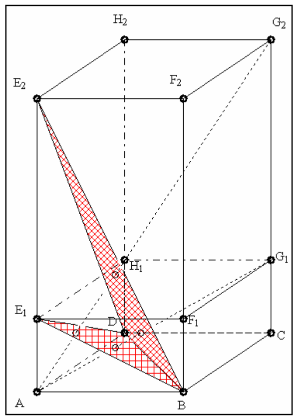
*Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil der Analytischen Raumgeometrie (Teil 2: November und Dezember 2010!) relevanten Grundaufgaben [SMS-Regel, Mittelpunktsformel, Schwerpunktformel, Betrag eines 3D-Vektors, Skalares und Vektorielles Produkt zweier 3D-Vektoren, Orthogonalitätskriterium, Normalvektorform der Ebenengleichung, Parameterform der Geradengleichung, Schnitt Gerade/Ebene, Flächeninhaltsberechnung mittels Vektoriellem Produkt, Teilverhältnisse] führen, die du bei der ersten Schularbeit **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen.*





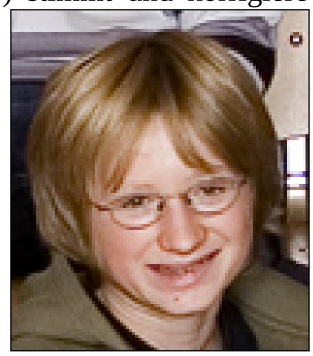






ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

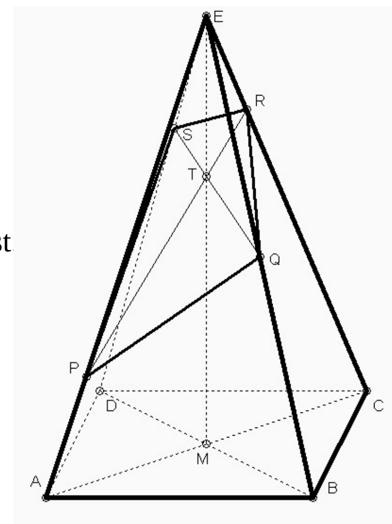
1) **Bis auf ein anderes Foto ein Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mi, den 18. Oktober 2006:**
M sei der Mittelpunkt des Begrenzungsquadrats ABEF eines Würfels ABCDEFGH, S der Schnittpunkt der Gerade g_{DM} mit der Ebene ε_{ABH}. "D i a g o n a l - D a v e" (siehe Abbildung rechts!) behauptet, dass $\overline{DS} = 2 \cdot \overline{SM}$ (*) gilt. Kontrolliere durch Rechnung, ob (*) stimmt und korrigiere Diagonal-Daves Aussage gegebenenfalls! **[Diagonal-Daves Tip (der stimmt jedenfalls!): Wähle die Würfelkantenlänge mit 6!$]**



"D i a g o n a l - D a v e"

Ausgangstext für die Aufgaben 2 bis 6 (vgl. auch Abbildung unter "Diagonal-Dave"!):

Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine Gerade rechteckige Pyramide ABCDE errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt. **Achtung: Wähle sowohl für die Länge, Breite als auch Höhe der Pyramide stets Vielfache von 40!**



2) Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S.
Zeige, dass $7 \cdot \overline{SE} = 3 \cdot \overline{DS}$ gilt!

Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Gerade g_{ME} in einem Punkt T.

3) Zeige, dass T auch der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks PQRS ist

4) Zeige, dass $\overline{PT} = 3 \cdot \overline{TR}$ gilt!

5) Zeige, dass $3 \cdot \overline{QT} = 5 \cdot \overline{TS}$ gilt!

6) Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Gerade g_{ME} in einem Punkt T.
Zeige, dass $3 \cdot \overline{MT} = 5 \cdot \overline{TE}$ gilt!

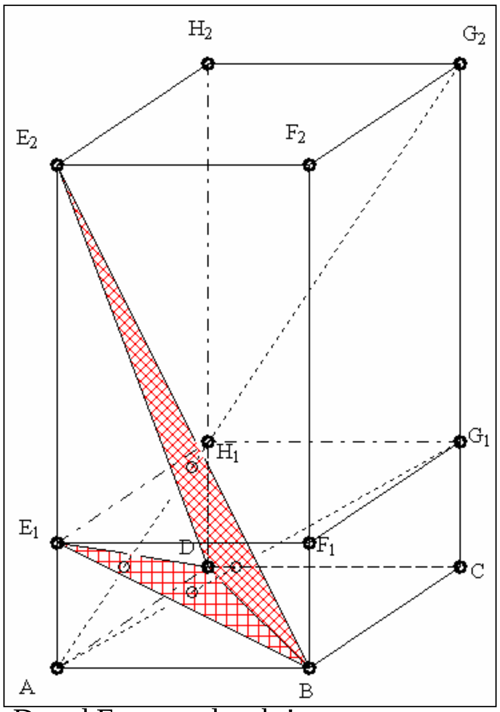
7) M_{BC} sei der Mittelpunkt der Basiskante BC, D´ der Mittelpunkt der Seitenkante DS einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). Dann spannen die Punkte A, M_{BC} und D´ eine Ebene ε auf. Bearbeite nun folgende Punkte **(Wähle dabei für die Basiskantenlänge der Pyramide ein Vielfaches von 12 und für die Höhe der Pyramide ein Vielfaches von 6!)**:

a) Berechne die Lage der Schnittpunkte B´ und C´ von ε mit g_{BS} und g_{CS} und beschreibe sie (ordentliche Skizze!)!

b) Zeige, dass M_{BC} auf der Strecke B´C´ liegt und drücke die genaue Lage durch ein Teilverhältnis aus!

8) Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). P entstehe, indem man den Mittelpunkt M_{AS} an A spiegle, Q sei der Mittelpunkt der Kante CS. In welchem Verhältnis teilt die Ebene ε_{BPQ} die Kante DS? **Wähle dabei für die Basiskantenlänge der Pyramide ein Vielfaches von 20 und für die Höhe der Pyramide ein Vielfaches von 10!**

9) In nebenstehender Abbildung befinden sich zwei Quader $ABCDE_1F_1G_1H_1$ (doppelt so lang und breit als hoch) und $ABCDE_2F_2G_2H_2$ (doppelt so hoch als lang und breit). **Wähle dabei für die vorkommenden Basiskantenlängen sowie Höhen stets Vielfache von 18!**



a) Die Gerade durch A und G_1 schneidet die Ebene durch B, D und E_1 im Punkt T. Wie verhalten sich die Streckenlängen $\overline{AT}$ und $\overline{TG_1}$ zueinander?

b) Die Gerade durch A und G_2 schneidet die Ebene durch B, D und E_2 im Punkt U. Wie verhalten sich die Streckenlängen $\overline{AU}$ und $\overline{UG_2}$ zueinander?

c) Beweise, dass die Gerade durch A und G_1 auf die Ebene durch B, D und E_2 normal steht! Stimmt die Behauptung von "Hammy" (nebenstehende Abbildung oben), dass der Schnittpunkt der beiden Gebilde die Strecke AG_1 halbiert? Beweise oder widerlege durch Rechnung!

d) Beweise, dass die Gerade durch A und G_2 auf die Ebene durch B, D und E_1 normal steht! Stimmt die Behauptung der "Donauhotelbesitzerin" (obige Abbildung unten), dass der Schnittpunkt der beiden Gebilde die Strecke AG_2 sechstelt? Beweise oder widerlege durch Rechnung!

10) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(–7|8|–10), B(35|–20|26), C(–1|35|4)]!
11) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(1|6|7), B(6|8|21), C(5|10|5)]!
12) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(7|8|9), B(20|–8|13), C(15|24|47)]!

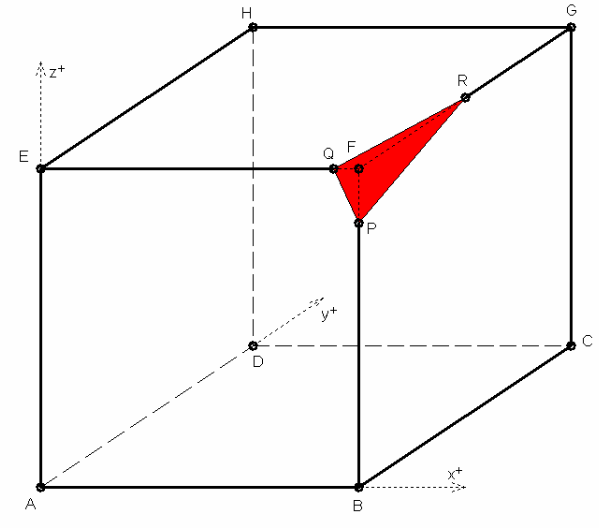
13) Gegeben ist das rechtwinklige Tetraeder ABCD[A(49|0|0), B(0|98|0), C(0|0|147), D(0|0|0)], dessen vier Begrenzungsflächen die Flächeninhalte $F_{\Delta ABC}$, $F_{\Delta ACD}$, $F_{\Delta BCD}$ sowie $F_{\Delta ABD}$ aufweisen.

a) Verifiziere, dass dann $\boxed{F_{\Delta ABD}{}^2 + F_{\Delta ACD}{}^2 + F_{\Delta BCD}{}^2 = F_{\Delta ABC}{}^2}$ ***(Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes für rechtwinklige Dreiecke aus der Ebene für rechtwinklige Tetraeder im Raum)*** gilt!

b) Mit den Bezeichnungen $\boxed{h = d(D, \varepsilon_{ABC})}$ (Normalabstand!), $a = \overline{AD}$, $b = \overline{BD}$ und $c = \overline{CD}$ läßt sich beweisen [**Wer dies probiert und – ansatzweise – erfolgreich ist, kann mit einem gehörigen $\boxed{\text{BONUS}}$ rechnen, was auch für einen Beweis von Aufgabenteil a) gilt, wobei dazu lediglich A(a|0|0), B(0|b|0), C(0|0|c), D(0|0|0) angesetzt werden braucht!**],

dass $\boxed{\frac{h^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^4 \cdot w_a{}^2 + b^4 \cdot w_b{}^2 + c^4 \cdot w_c{}^2}{4 \cdot F_{\Delta ABC}{}^2}}$ gilt, wobei hier w_a, w_b bzw. w_c für die Länge jener Tetraederkante steht, welche zur Kante mit der Seitenlänge a, b bzw. c windschief verläuft. Verifiziere diese Formel am vorliegenden konkreten Beispiel!

14) Aus nebenstehend abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 64) wurde wie illustriert ein Eck derart abgeschnitten, dass $\overline{QF} = 1$, $\overline{PF} = 4$ sowie $\overline{RF} = 32$ gilt. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR!



15) Senkrecht über dem Eckpunkt D eines Quadrats ABCD befindet sich die Spitze E einer schiefen quadratischen Pyramide, deren Seitenkanten AE, BE und CE in vier gleich lange Teile geteilt werden (siehe Abbildung!). Die markierten Teilungspunkte P, Q und R spannen eine Ebene auf, welche die Kante DE in einem Punkt S schneidet. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks PQRS, wenn

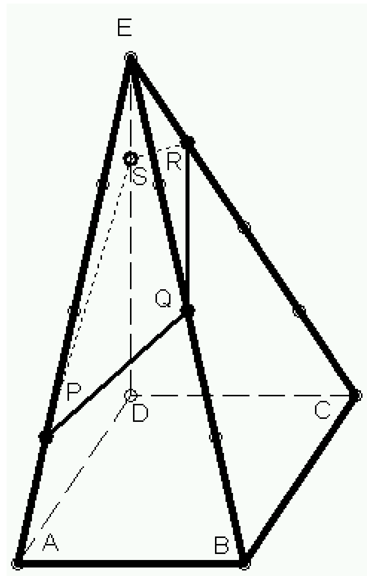
a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 12$, $\overline{DE} = 40$

b) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 4$, $\overline{DE} = 120$

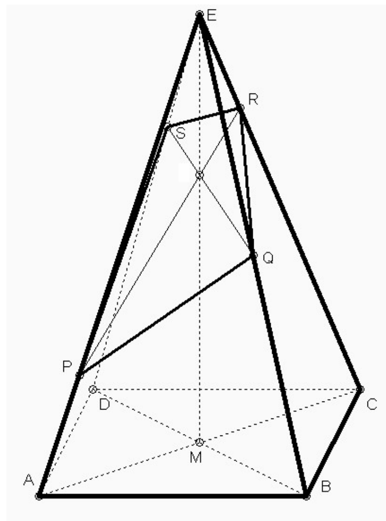
c) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 36$, $\overline{DE} = 40$

d) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 108$, $\overline{DE} = 160$

gilt (vgl. nebenstehende Abbildung!)



16) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mi, den 18. Oktober 2006:</u>**
(vgl. untere rechte Abbildung!)
Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine gerade rechteckige Pyramide ABCDE mit der Spitze E errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt (vgl. nebenstehende Figur!). Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S. Beweise, dass sich die Flächeninhalte $F_{\Delta PQR}$ und $F_{\Delta PRS}$ der Dreiecke ΔPQR und ΔPRS wie 5:3 verhalten!
Tip: Ansätze $\overline{AD} = \overline{BC} = 40a$**,** $\overline{AB} = \overline{CD} = 40b$, $\overline{ME} = 40h$



17) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6B(G) vom Di, den 07. November 2006:</u>**
(vgl. untere rechte Abbildung!)
Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine gerade rechteckige Pyramide ABCDE mit der Spitze E errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt (vgl. nebenstehende Figur!). Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S. Beweise, dass sich die Flächeninhalte $F_{\Delta PQS}$ und $F_{\Delta QRS}$ der Dreiecke ΔPQS und ΔQRS wie 3:1 verhalten!
Tip: Ansätze $\overline{AD} = \overline{BC} = 40a$**,** $\overline{AB} = \overline{CD} = 40b$, $\overline{ME} = 40h$

18) Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD mit Mittelpunkt M, Spitze S). Nun werden die Seitenkanten AS, BS und CS jeweils in fünf gleich lange Teile geteilt und sodann (jeweils von einem Basiseckpunkt zur Spitze S weisend) auf AS, BS bzw. CS der erste, zweite bzw. dritte Teilungspunkt P, Q bzw. R markiert. $\boxed{\textbf{Tip: Ansätze } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 50a, \ \overline{MS} = 50h}$

a) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt T der Ebene ε_{PQR} mit der Seitenkante D die Länge ebenjener?

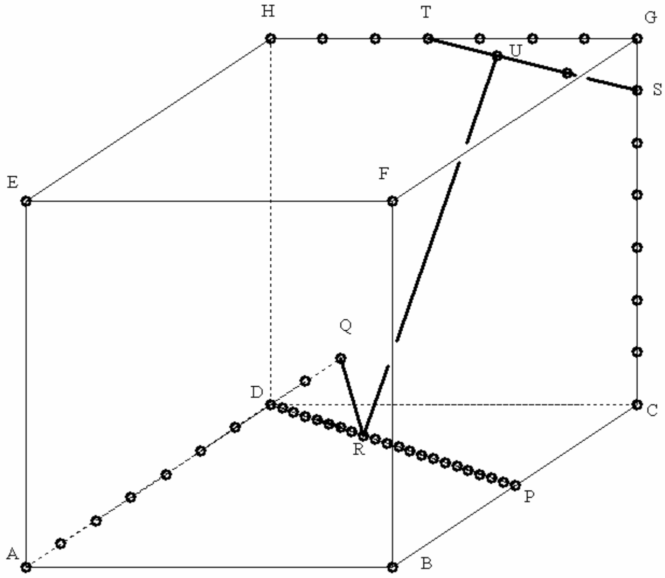
b) Beweise: Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔPQR und ΔPTR verhalten sich wie 5:4.

19) Fortsetzung von Aufgabe 7:
Zeige, dass für die Flächeninhalte $F_{\Delta AB'C'}$ und $F_{\Delta AC'D'}$ der Dreiecke $\Delta AB'C'$ und $\Delta AC'D'$ die Beziehung $\boxed{F_{\Delta AB'C'} = 4 \cdot F_{\Delta AC'D'}}$ gilt!

20) Der in der Figur rechts unten abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 42. Die Würfelkanten AD, CG und GH wurden in jeweils sieben gleich lange Teile geteilt. Q (in der Verlängerung über D hinaus), S und T sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte. P ist der Mittelpunkt der Würfelkante BC. Die Strecke DP wurde in 21 gleich lange Teile geteilt, R ist von D aus betrachtet der achte Teilungspunkt. Die Strecke ST wurde in drei gleich lange Teile geteilt, U ist der entsprechend in der Figur markierte Teilungspunkt.

a) Zeige, dass g_{RU} auf g_{QR} und g_{ST} normal steht!

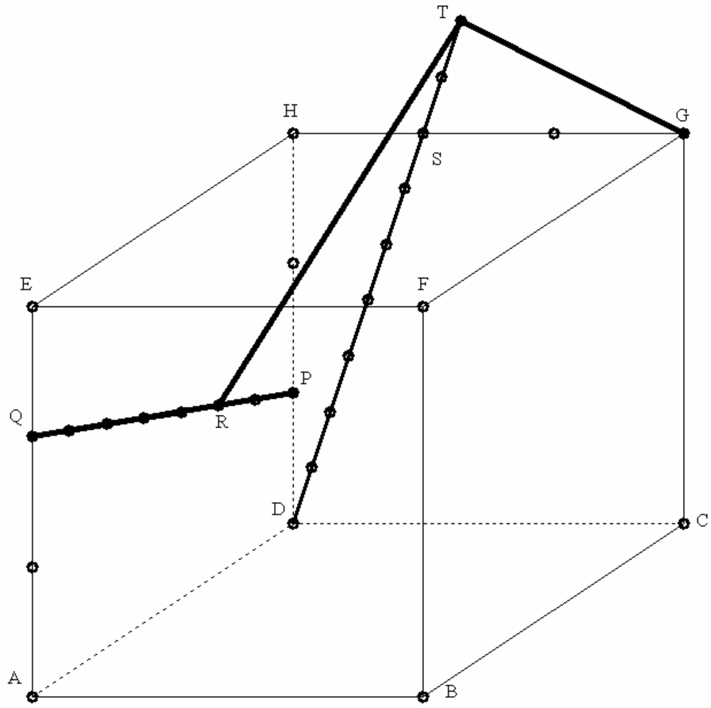
b) Zeige, dass die Länge der Strecke RU der Würfelkantenlänge entspricht.



21) Der in der Figur ganz unten abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 21. Die Würfelkanten AE, DH und HG wurden jeweils in drei gleich lange Teile geteilt. Q, P und S sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte. Die Strecken PQ und DS (letzte über S hinaus verlängert) wurden jeweils in sieben gleich lange Teile geteilt. R und T sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte.

a) Zeige, dass g_{RT} auf g_{PQ} und g_{GT} normal steht!

b) Zeige, dass die Länge der Strecke RT der Würfelkantenlänge entspricht.



22) **<u>Wie deutlich ersichtlich ein ehemaliges Beispiel einer schriftlichen Wiederholungsprüfung:</u>**

… wobei b) auf das zweite Quartal verschoben wird!

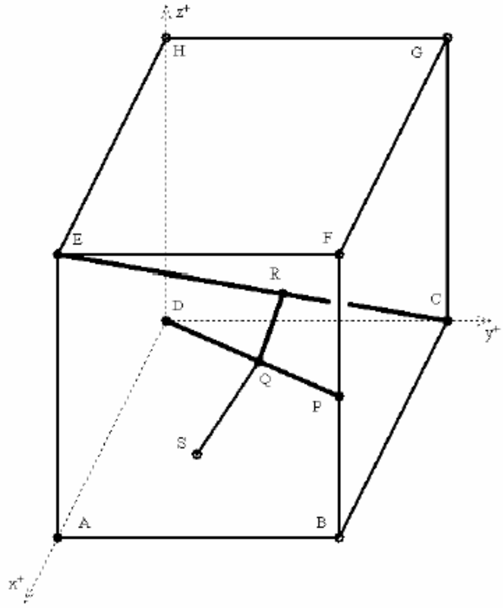
Klasse: 6C(Rg) **27. 02. 2007**

Schriftliche Wiederholungsprüfung (Pflichtmodul PM1: Analytische Raumgeometrie)

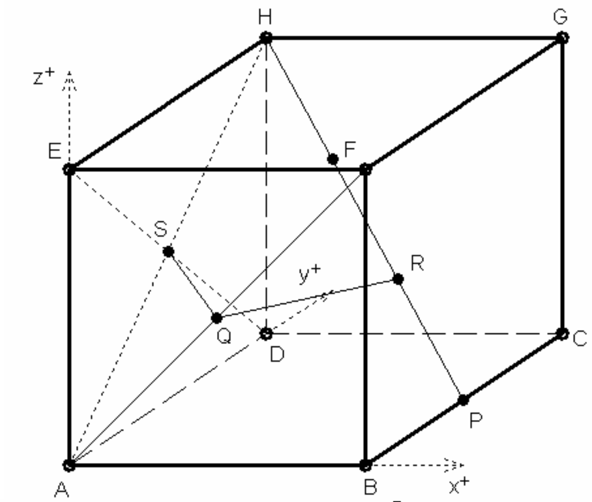
1) In nebenstehend abgebildetem Würfel (passend zur nächst gelegenen Straßenbahn: Seitenlänge 26) sind die Strecken DP und CE (P … Mittelpunkt der Würfelkante BF) eingezeichnet.
R ist von C nach E betrachtet der 11. von insgesamt 26 Teilungspunkten,
Q ist von D nach P betrachtet der 7. von insgesamt 13 Teilungspunkten.

a) Zeige, dass g_{QR} auf g_{DP} und g_{CE} normal steht! Verwende dazu das *<u>bereits eingezeichnete Koordinatensystem</u>*!

b) Berechne für den Punkt S(16|9|0) – siehe Abbildung! – das Maß des Winkels $\angle SQR$ und zeige, dass $\overline{QS} = \sqrt{3} \cdot \overline{QR}$ gilt!
Benenne den Winkel und zeichne ihn ein (Skizze oder in der Abbildung)!



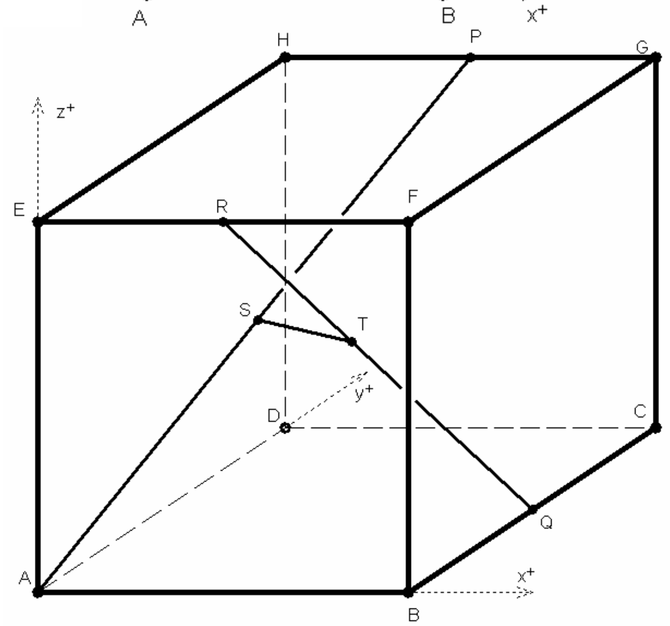
23) In nebenstehend abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 6) sind bis auf die Würfeleckpunkte alle eingezeichneten Punkte durch fortlaufende Halbierung bzw. Drittelung entstanden. Beweise, dass die Gerade g_{QR} sowohl auf g_{HP} als auch g_{AF} normal steht
$\boxed{\text{und berechne das Maß des Winkels } \angle SQR}$!
… $\boxed{\text{dies}}$ aber erst im zweiten Quartal!



24) Der rechts abgebildete Würfel hat eine Seitenlänge von 106. P, Q und R sind der Abbildung zu entnehmende Kantelmittelpunkte. S und T entstehen durch Unterteilung der Strecken AP und QR in 53 gleich lange Teile. Dabei ist S von A aus betrachtet der 27. und T von Q aus betrachtet der 31. Teilungspunkt.

a) Zeige, dass g_{ST} auf g_{AP} und g_{QR} normal steht!

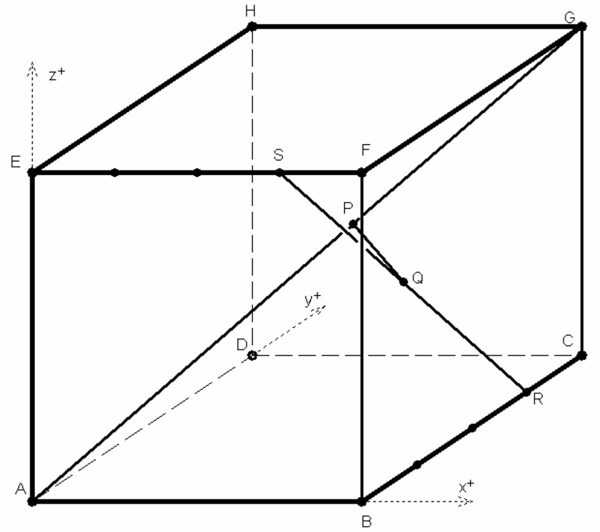
b) Berechne für den Punkt U(0|–18|54) das Maß des Winkels $\angle TSU$! … aber erst im 2. Quartal!



25) Nebenstehend abgebildeter Würfel hat eine Seitenlänge von 24. R bzw. S geht durch Viertelung der Kante BC bzw. EF hervor. P entsteht durch Unterteilung der Strecke AG in zwölf gleich lange Teile, wobei P von A aus betrachtet der siebte Teilungspunkt ist, Q ist der Mittelpunkt der Strecke RS.

a) Beweise, dass g_{AG}, g_{RS} und g_{PQ} paarweise aufeinander normal stehen!

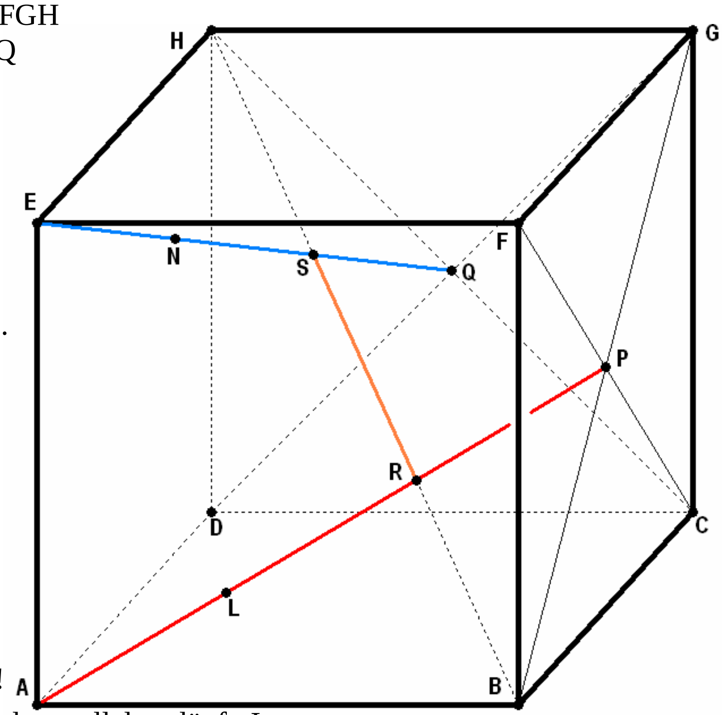
b) Berechne für den Punkt T(0|–145|12) das Maß des Winkels $\angle PQT$! … aber erst im 2. Quartal!



26) In nebenstehender Figur hat der Würfel ABCDEFGH eine Kantenlänge von 6. Die Strecken AP und EQ wurden jeweils in drei gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte L, R, N und S hervorgehen.

a) Zeige, dass g_{RS} sowohl auf g_{AP} als auch auf g_{EQ} normal steht.

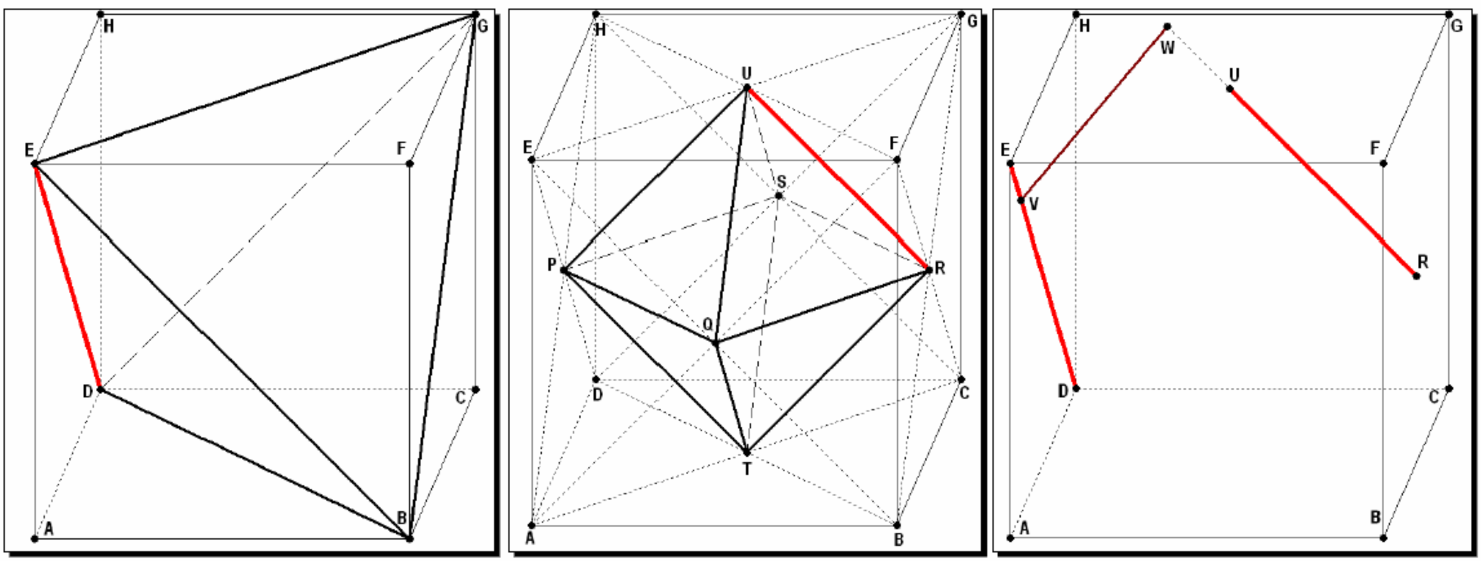
b) Zeige, dass R und S auf der Raumdiagonale BH liegen und beschreibe deren Lage auf BH durch Teilverhältnisse (ikonisch oder verbal!).



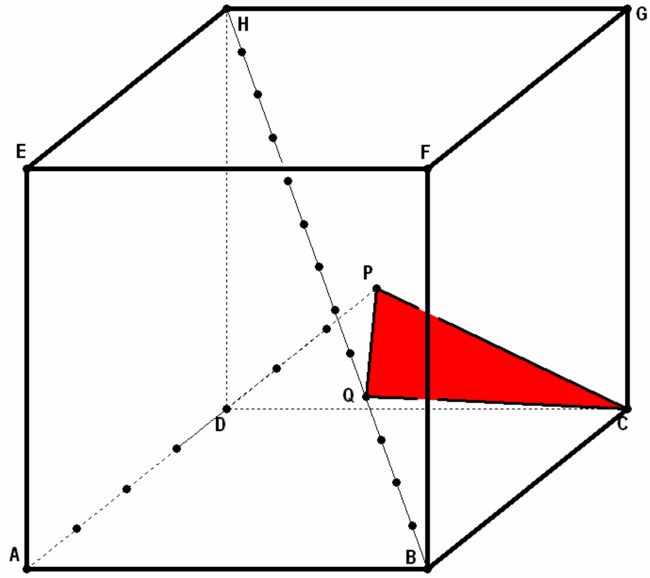
27) In einem Tetraeder BDEG und einem Oktaeder PQRSTU, welche beide aus einem Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 12 abgeleitet wurden (vgl. untere Abbildungen) sind jene Punkte V und W auf den (Trägergeraden der) Kanten DE und RU zu betrachten, für welche $\overline{VE} = 5 \cdot \overline{DV}$ und $\overline{UW} = \frac{1}{3} \cdot \overline{UR}$ gilt:

a) Zeige, dass g_{VW} auf g_{DE} und g_{RU} normal steht!

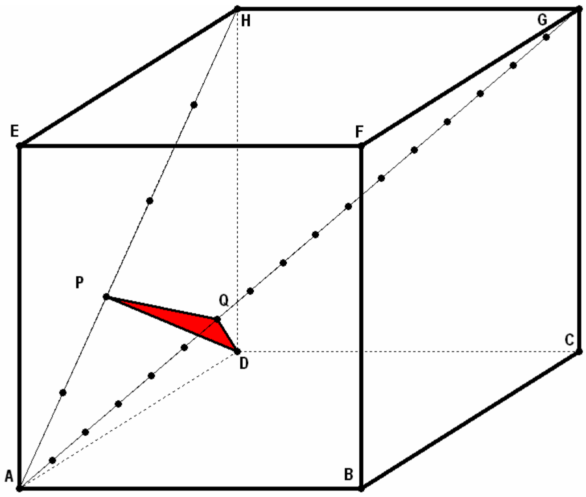
b) Zeige, g_{VW} zu einer Raumdiagonale des Würfels parallel verläuft. In welchem Verhältnis steht die Länge von UV zu dieser Raumdiagonale?

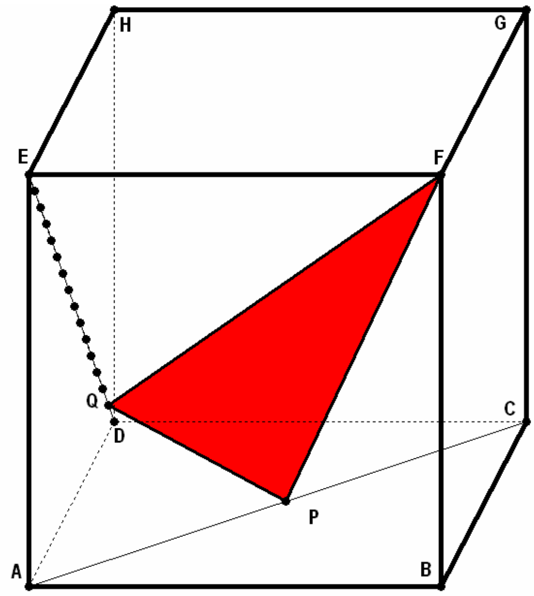


28) Im nebenstehenden Würfel (a=52) wurde die Raumdiagonale BH in dreizehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. P entsteht durch (über D hinausgehende forltaufende) Viertelung der Kante AD. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPCQ!



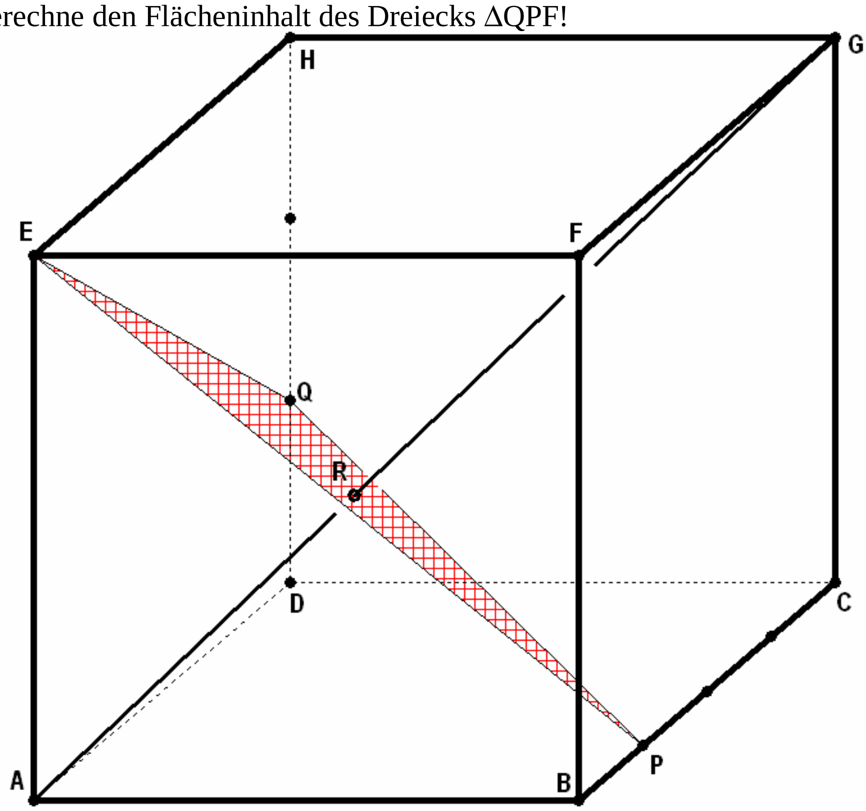
29) Im links unten abgebildeten Würfel (a=85) wurde die Raumdiagonale AG in siebzehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. P entsteht durch Fünftelung der Flächendiagonale AH. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDQP!



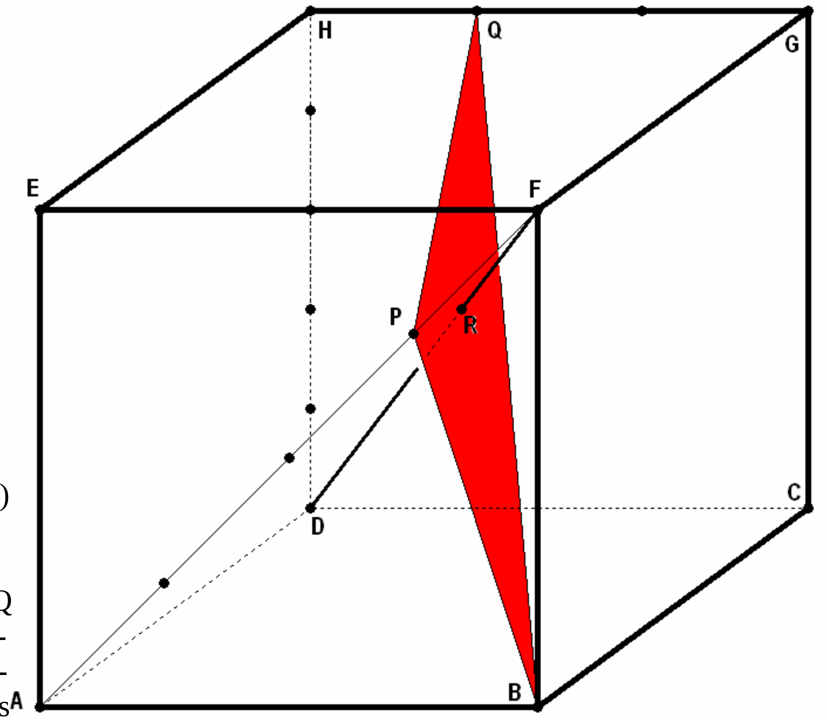


30) Im rechts oben abgebildeten Würfel (a=480) wurde die Flächendiagonale AC in 32 gleich lange Teile geteilt, P ist von A aus betrachtet der 17. Teilungspunkt. Die Flächendiagonale DE wurde in fünfzehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPF!

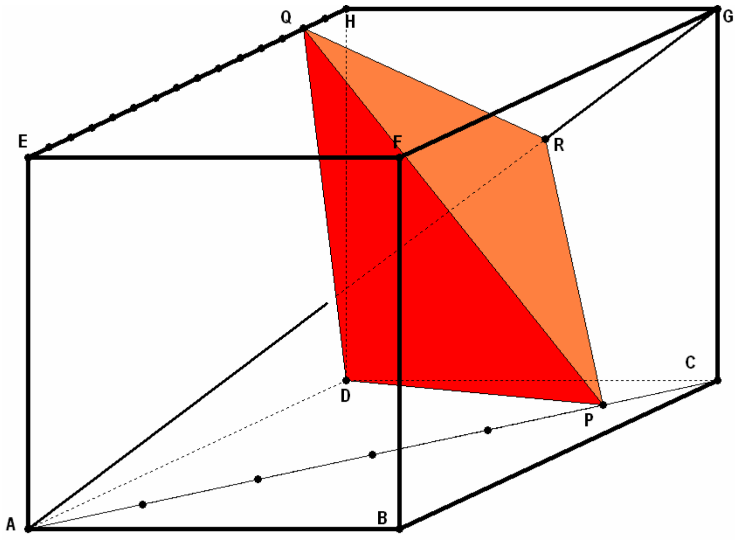
31) In nebenstehendem Würfel (a=60) wurde die Kante BC in vier gleich lange Teile sowie die Kante DH in drei gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{EPQ} mit der Raumdiagonale AG die Länge selbiger teilt!



32) In nebenstehendem Würfel (a=12) wurde die Flächendiagonale AF in vier gleich lange Teile sowie die Kante GH in drei gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{BPQ} mit der Raumdiagonale DF die Länge selbiger teilt!



33) Im links unten abgebildetem Würfel (a=60) wurde die Flächendiagonale AC in sechs gleich lange Teile sowie die Kante EH in fünfzehn gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{DPQ} mit der Raumdiagonale AG die Länge selbiger teilt!



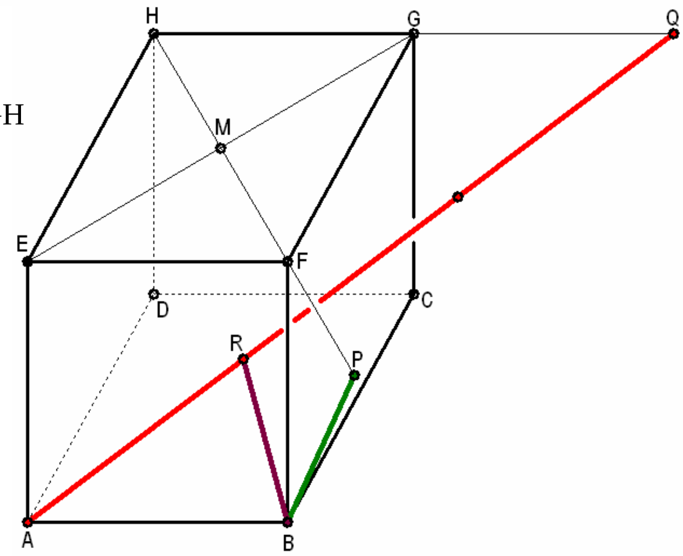
34) Beweise allgemein (Hinweis: Satz 6.5 auf Seite 11 des Skriptums!) oder überprüfe für zwei selbst gewählte Vektoren:

$$\left[\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{b}\right]\times\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right]=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

35) Der nebenstehend abgebildete Würfel ABCDEFGH weist eine Seitenlänge von 6 auf. P bzw. Q ist der Spiegelpunkt von M an F bzw. von H an G. R entsteht durch Drittelung der Strecke AQ.

a) Zeige, dass g_{BR} sowohl auf g_{AQ} als auch auf g_{BP} normal steht!

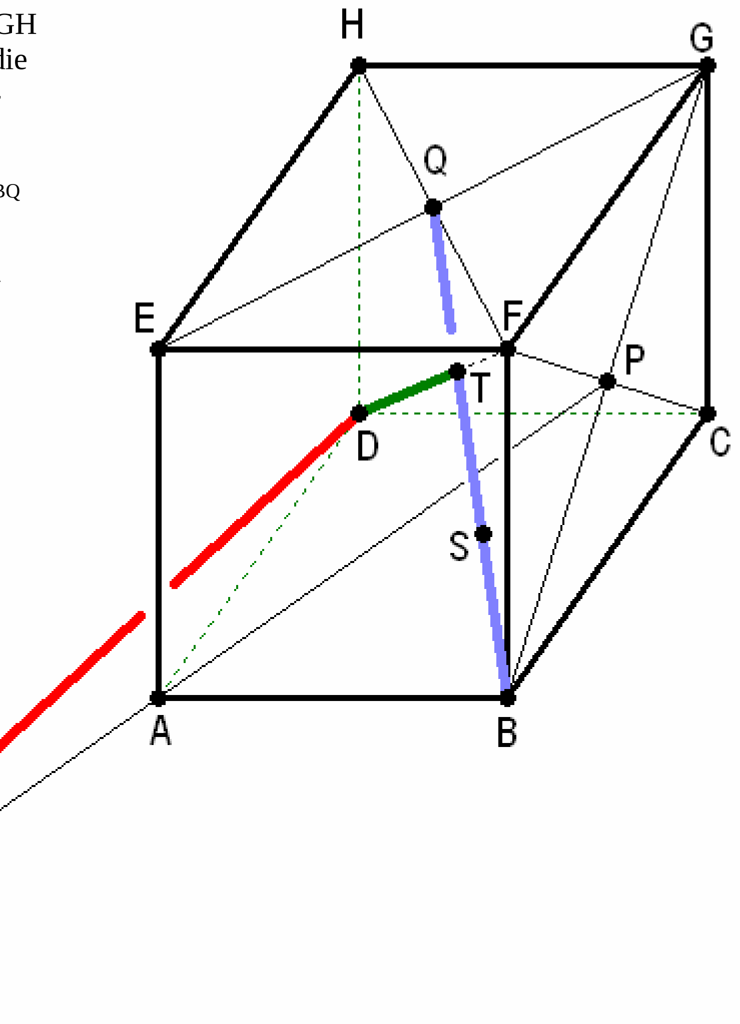
b) Zeige, dass R auf der Raumdiagonale BH liegt und beschreibe seine Lage auf BH durch ein Teilverhältnis (ikonisch oder verbal!)



36) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 6) wurde P an A gespiegelt sowie die Strecke BQ in drei gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte R, S und T hervorgegangen sind.

a) Zeige, dass g_{DT} sowohl auf g_{DR} als auch auf g_{BQ} normal steht!

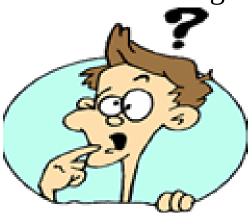
b) Zeige, dass T auf der Raumdiagonale DF liegt und beschreibe seine Lage auf DF durch ein Teilverhältnis (ikonisch oder verbal!).



37) ZUM NACHDENKEN …
… und freilich zu bearbeiten:

Warum verdeckt die Gerade g_{BQ} die Gerade g_{AP}, wenn man die Konfiguration aus Aufgabe 36 in Richtung AD (von A nach D) betrachtet?

Hinweis: Schnittpunkt der beiden (im Raum zueinander windschief liegenden!) Geraden in einem geeigneten Hauptriss!



38) Vom Quader $ABCDEFGH$ sind die Eckpunkte $A(8|72|9)$, $B(16|84|33)$ und $D(26|78|z_D)$ bekannt.

(a) Berechne z_D! In welcher besonderen Ebene liegt D?

(b) Berechne die Koordinaten von C!

(c) Die Länge der Kante AE soll 84 betragen, wobei E über π_1 liegt.
Berechne die Koordinaten von E und zeige, dass E genauo so hoch über π_1 liegt wie B.
In welcher speziellen Ebene liegt E?

(d) Berechne die Koordinaten von F, G und H!

(e) Berechne auf zwei Arten die Länge einer Raumdiagonale des Quaders!
Welche der Punkte (a) bis (d) brauchst du dafür unbedingt (Begründung!)?

39) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeige, dass $|\overrightarrow{a_1}| = \left|\overrightarrow{b_1}\right| = \ell$ gilt und berechne ℓ.

(b) Bilde $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{a_1}$ und zeige, dass $\overrightarrow{v}$ nach Multiplikation mit $\frac{1}{\ell}$
(Der neue Vektor heiße $\overrightarrow{c_1}$!) noch immer ganzzahlige Komponenten aufweist.
Was fällt dir an ihnen auf und was kannst du über $|\overrightarrow{c_1}|$ aussagen?

40) Wie Aufgabe 39) mit $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

41) Wie müsste nun nach 39) und 40) die nächste Angabe lauten?

(a) Schreibe das allgemeine Bildungsgesetz für die Vektoren $\overrightarrow{a_1}$ und $\overrightarrow{b_1}$ auf!

(b) Bearbeite nach 41)(a) nun in allgemeiner Form die entsprechenden Aufgabenstellungen (a) und (b) aus 39) und 40)! Beachte dabei, beim Bilden des vektoriellen Produkts nicht gleich alles auszumultiplizieren, sondern möglichst viel herauszuheben, um dann mit $\frac{1}{\ell}$ multiplizieren zu können!

42) P bzw. Q sei der Mittelpunkt der Kante EF bzw. CG des Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 18).

a) Zeige, dass g_{AQ} und h_{DP} aufeinander normal stehen!

b) Zeige, dass die Strecken AQ und DP gleich lang sind!

c) R bzw. S teilt AQ bzw. DP von A bzw. D aus innen im Verhältnis 4:5. Beweise, dass i_{RS} auf g_{AQ} und h_{DP} normal steht! Den wievielten Bruchteil der Würfelkantenlänge nimmt die Länge der Strecke RS ein?

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 1. Schularbeit (zweistündig)

(6A, Gymnasium, 2010/11)

12) 441

13b) Nota bene: $d(D, \varepsilon_{ABC}) = \overline{DS}$, S(36/18/12), wobei $\{S\} = g \cap \varepsilon_{ABC}$ und $g \perp \varepsilon_{ABC} \wedge D \in g$

15b) 9540

18a) $\overline{DT} : \overline{TS} = 13 : 12$

27) $\overline{VW} : \overline{AG} = 1 : 3$

28) 1352

29) 935

30) 82800

31) $\overline{AR} : \overline{RG} = 2 : 3$

32) $\overline{DR} : \overline{RF} = 2 : 1$

33) $\overline{AR} : \overline{RG} = 3 : 1$

Wien, im Oktober 2010. Dr. Robert Resel, e. h.