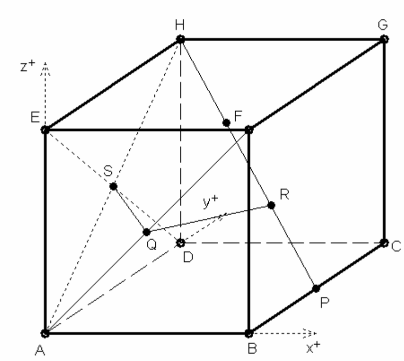
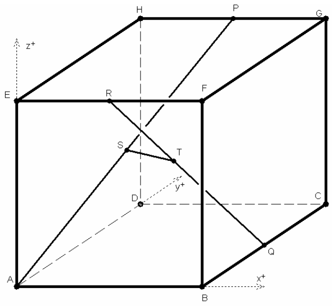
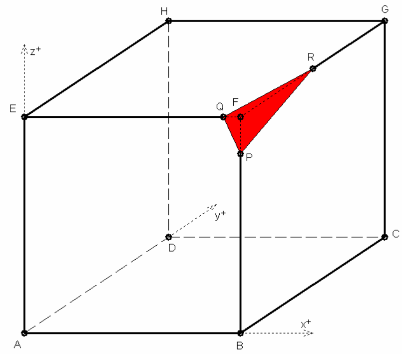
Übungsbeispiele für die 1. Schularbeit (zweistündig)

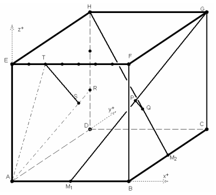


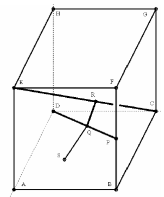
(6X, Realgymnasium, 2008/09)

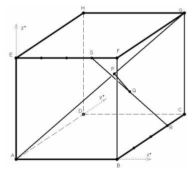


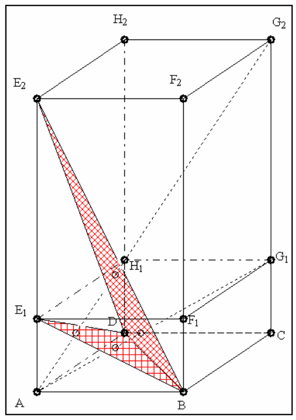
*Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil der Analytischen Raumgeometrie (Teil 2: November und Dezember 2008!) relevanten Grundaufgaben [SMS-Regel, Mittelpunktsformel, Schwerpunktformel, Betrag eines 3D-Vektors, Skalares und Vektorielles Produkt zweier 3D-Vektoren, Orthogonalitätskriterium, Normalvektorform der Ebenengleichung, Parameterform der Geradengleichung, Schnitt Gerade/Ebene, Vektor-Winkel-Formel (Schnittwinkel zwischen zwei Geraden sowie zwischen Gerade und Ebene), Flächeninhaltsberechnung mittels Vektoriellem Produkt, Teilverhältnisse] führen, die du bei der ersten Schularbeit **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen.*











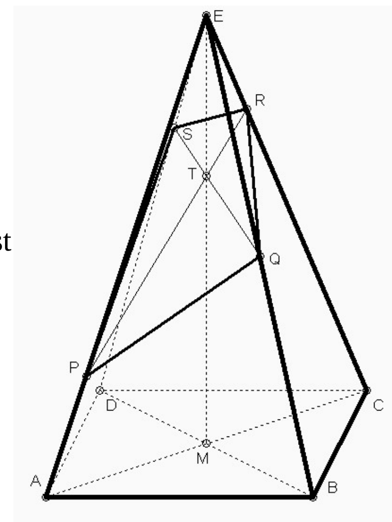
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

1) **Bis auf ein anderes Foto ein Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mi, den 18. Oktober 2006:**
M sei der Mittelpunkt des Begrenzungsquadrats ABEF eines Würfels ABCDEFGH, S der Schnittpunkt der Gerade g_{DM} mit der Ebene ε_{ABH}. "Raumgeometrie-Ron" (siehe Abbildung rechts!) behauptet, dass $\overline{DS} = 2 \cdot \overline{SM}$ (*) gilt. Kontrolliere durch Rechnung, ob (*) stimmt und korrigiere Raumgeometrie-Rons Aussage gegebenenfalls! **(Raumgeometrie-Rons Tip (der stimmt jedenfalls!): Wähle die Würfelkantenlänge mit 6!**

"Raumgeometrie-Ron"

*Ausgangstext für die Aufgaben 2 bis 6 (*vgl. auch Abbildung unter "Raumgeometrie-Ron"!*)*:

Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine Gerade rechteckige Pyramide ABCDE errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt. **Achtung: Wähle sowohl für die Länge, Breite als auch Höhe der Pyramide stets Vielfache von 40!**



2) Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S.
Zeige, dass $7 \cdot \overline{SE} = 3 \cdot \overline{DS}$ gilt!

Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Gerade g_{ME} in einem Punkt T.

3) Zeige, dass T auch der Diagonalenschnittpunkt des Vierecks PQRS ist

4) Zeige, dass $\overline{PT} = 3 \cdot \overline{TR}$ gilt!

5) Zeige, dass $3 \cdot \overline{QT} = 5 \cdot \overline{TS}$ gilt!

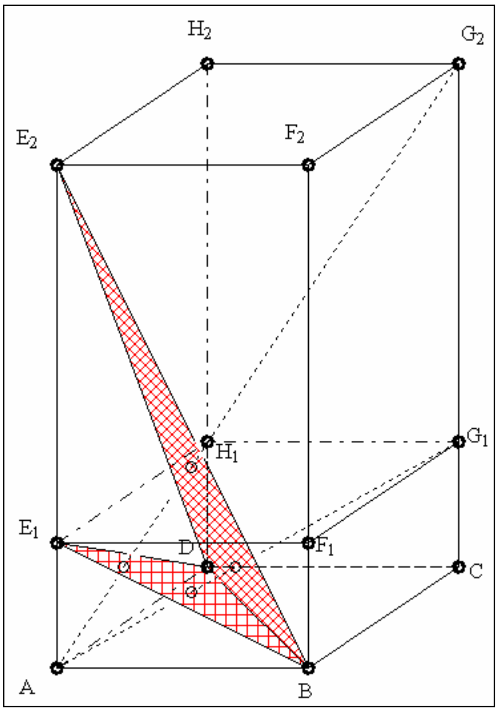
6) Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Gerade g_{ME} in einem Punkt T.
Zeige, dass $3 \cdot \overline{MT} = 5 \cdot \overline{TE}$ gilt!

7) M_{BC} sei der Mittelpunkt der Basiskante BC, D´ der Mittelpunkt der Seitenkante DS einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). Dann spannen die Punkte A, M_{BC} und D´ eine Ebene ε auf. Bearbeite nun folgende Punkte **(Wähle dabei für die Basiskantenlänge der Pyramide ein Vielfaches von 12 und für die Höhe der Pyramide ein Vielfaches von 6!)**:

a) Berechne die Lage der Schnittpunkte B´ und C´ von ε mit g_{BS} und g_{CS} und beschreibe sie (ordentliche Skizze!)!

b) Zeige, dass M_{BC} auf der Strecke B´C´ liegt und drücke die genaue Lage durch ein Teilverhältnis aus!

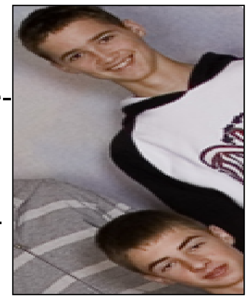
8) Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD, Spitze S). P entstehe, indem man den Mittelpunkt M_{AS} an A spiegle, Q sei der Mittelpunkt der Kante CS. In welchem Verhältnis teilt die Ebene ε_{BPQ} die Kante DS? **Wähle dabei für die Basiskantenlänge der Pyramide ein Vielfaches von 20 und für die Höhe der Pyramide ein Vielfaches von 10!**



9) In nebenstehender Abbildung befinden sich zwei Quader $ABCDE_1F_1G_1H_1$ (doppelt so lang und breit als hoch) und $ABCDE_2F_2G_2H_2$ (doppelt so hoch als lang und breit). **Wähle dabei für die vorkommenden Basiskantenlängen sowie Höhen stets Vielfache von 18!**

a) Die Gerade durch A und G_1 schneidet die Ebene durch B, D und E_1 im Punkt T. Wie verhalten sich die Streckenlängen $\overline{AT}$ und $\overline{TG_1}$ zueinander?

b) Die Gerade durch A und G_2 schneidet die Ebene durch B, D und E_2 im Punkt U. Wie verhalten sich die Streckenlängen $\overline{AU}$ und $\overline{UG_2}$ zueinander?



c) Beweise, dass die Gerade durch A und G_1 auf die Ebene durch B, D und E_2 normal steht! Stimmt die Behauptung von "ζ" (nebenstehende Abbildung oben), dass der Schnittpunkt der beiden Gebilde die Strecke AG_1 halbiert? Beweise oder widerlege durch Rechnung!

d) Beweise, dass die Gerade durch A und G_2 auf die Ebene durch B, D und E_1 normal steht! Stimmt die Behauptung von "η" (obige Abbildung unten), dass der Schnittpunkt der beiden Gebilde die Strecke AG_2 sechstelt? Beweise oder widerlege durch Rechnung!

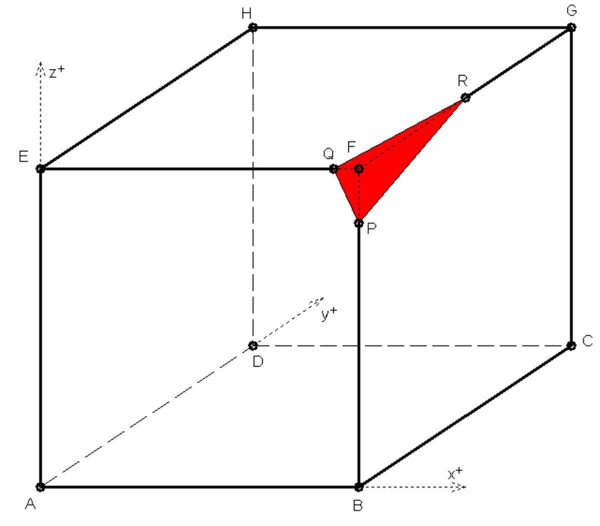
10) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(–7|8|–10), B(35|–20|26), C(–1|35|4)]!
11) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(1|6|7), B(6|8|21), C(5|10|5)]!
12) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC[A(7|8|9), B(20|–8|13), C(15|24|47)]!

13) Gegeben ist das rechtwinklige Tetraeder ABCD[A(49|0|0), B(0|98|0), C(0|0|147), D(0|0|0)], dessen vier Begrenzungsflächen die Flächeninhalte $F_{\Delta ABC}$, $F_{\Delta ACD}$, $F_{\Delta BCD}$ sowie $F_{\Delta ABD}$ aufweisen.

a) Verifiziere, dass dann $\boxed{F_{\Delta ABD}{}^2 + F_{\Delta ACD}{}^2 + F_{\Delta BCD}{}^2 = F_{\Delta ABC}{}^2}$ ***(Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes für rechtwinklige Dreiecke aus der Ebene für rechtwinklige Tetraeder im Raum)*** gilt!

b) Mit den Bezeichnungen $\boxed{h=d(D, \varepsilon_{ABC})}$ (Normalabstand!), $a = \overline{AD}$, $b = \overline{BD}$ und $c = \overline{CD}$ läßt sich beweisen [**Wer dies probiert und – ansatzweise – erfolgreich ist, kann mit einem gehörigen $\boxed{\text{BONUS}}$ rechnen, was auch für einen Beweis von Aufgabenteil a) gilt, wobei dazu lediglich A(a|0|0), B(0|b|0), C(0|0|c), D(0|0|0) angesetzt werden braucht!**], dass $\boxed{\frac{h^2}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^4 \cdot w_a{}^2 + b^4 \cdot w_b{}^2 + c^4 \cdot w_c{}^2}{4 \cdot F_{\Delta ABC}{}^2}}$ gilt, wobei hier w_a, w_b bzw. w_c für die Länge jener Tetraederkante steht, welche zur Kante mit der Seitenlänge a, b bzw. c windschief verläuft. Verifiziere diese Formel am vorliegenden konkreten Beispiel!

14) Aus nebenstehend abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 64) wurde wie illustriert ein Eck derart abgeschnitten, dass $\overline{QF} = 1$, $\overline{PF} = 4$ sowie $\overline{RF} = 32$ gilt.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR!



15) Senkrecht über dem Eckpunkt D eines Quadrats ABCD befindet sich die Spitze E einer schiefen quadratischen Pyramide, deren Seitenkanten AE, BE und CE in vier gleich lange Teile geteilt werden (siehe Abbildung!). Die markierten Teilungspunkte P, Q und R spannen eine Ebene auf, welche die Kante DE in einem Punkt S schneidet. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks PQRS, wenn

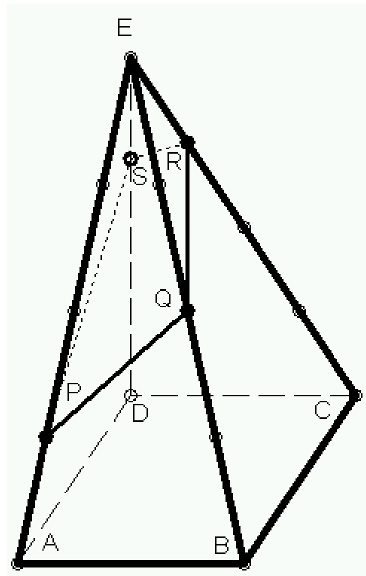
a) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 12$, $\overline{DE} = 40$

b) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 4$, $\overline{DE} = 120$

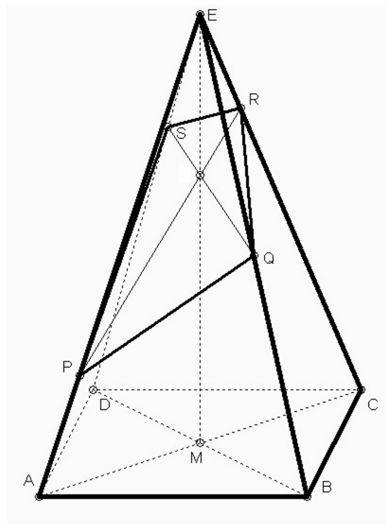
c) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 36$, $\overline{DE} = 40$

d) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 108$, $\overline{DE} = 160$

gilt (vgl. nebenstehende Abbildung!)



16) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6C(Rg) vom Mi, den 18. Oktober 2006:</u>**
(vgl. untere rechte Abbildung!)
Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine gerade rechteckige Pyramide ABCDE mit der Spitze E errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt (vgl. nebenstehende Figur!).
Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S.
Beweise, dass sich die Flächeninhalte $F_{\Delta PQR}$ und $F_{\Delta PRS}$ der Dreiecke ΔPQR und ΔPRS wie 5:3 verhalten!
Tip: Ansätze $\overline{AD} = \overline{BC} = 40a$, $\overline{AB} = \overline{CD} = 40b$, $\overline{ME} = 40h$



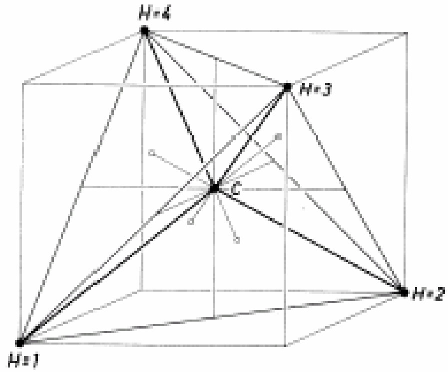
17) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6B(G) vom Di, den 07. November 2006:</u>**
(vgl. untere rechte Abbildung!)
Über dem Rechteck ABCD mit dem Diagonalenschnittpunkt M wird eine gerade rechteckige Pyramide ABCDE mit der Spitze E errichtet. Auf den Kanten AE, BE und CE werden die Punkte P, Q und R derart gewählt, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{QE} = \overline{BQ}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt (vgl. nebenstehende Figur!).
Die Ebene ε_{PQR} schneidet die Kante DE in einem Punkt S.
Beweise, dass sich die Flächeninhalte $F_{\Delta PQS}$ und $F_{\Delta QRS}$ der Dreiecke ΔPQS und ΔQRS wie 3:1 verhalten!
Tip: Ansätze $\overline{AD} = \overline{BC} = 40a$, $\overline{AB} = \overline{CD} = 40b$, $\overline{ME} = 40h$

18) Gegeben sei eine gerade quadratische Pyramide ABCDS (Basisquadrat ABCD mit Mittelpunkt M, Spitze S).
Nun werden die Seitenkanten AS, BS und CS jeweils in fünf gleich lange Teile geteilt und sodann (jeweils von einem Basiseckpunkt zur Spitze S weisend) auf AS, BS bzw. CS der erste, zweite bzw. dritte Teilungspunkt P, Q bzw. R markiert. $\boxed{\textbf{Tip: Ansätze } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = 50a,\ \overline{MS} = 50h}$

a) In welchem Verhältnis teilt der Schnittpunkt T der Ebene ε_{PQR} mit der Seitenkante D die Länge ebenjener?

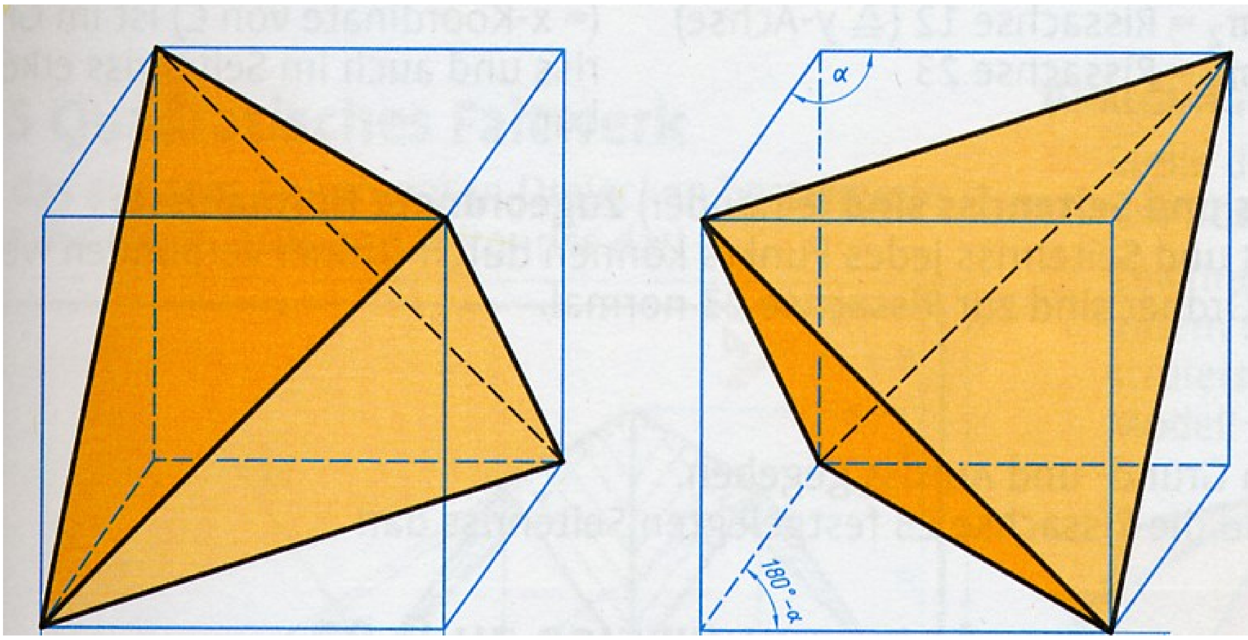
b) Beweise: Die Flächeninhalte der Dreiecke ΔPQR und ΔPTR verhalten sich wie 5:4.

19) Fortsetzung von Aufgabe 7:
Zeige, dass für die Flächeninhalte $F_{\Delta AB'C'}$ und $F_{\Delta AC'D'}$ der Dreiecke $\Delta AB'C'$ und $\Delta AC'D'$ die Beziehung $\boxed{F_{\Delta AB'C'} = 4 \cdot F_{\Delta AC'D'}}$ gilt!



20) Berechne den H-C-H-Bindungswinkel im ″Methan″-Molekül CH_4 (vgl. nebenstehende Abbildung, Genaueres dazu ab 2009/10 im Unterrichtsgegenstand *Chemie* → Kapitel *Alkane*), dessen geometrische Struktur die Form eines regelmäßigen Tetraeders hat (dreiseitige Pyramide mit sechs gleich langen Kanten).

BEACHTE DABEI DIE UNTEREN BEIDEN ABBILDUNGEN, DIE ILLUSTRIEREN, WIE SICH DAS REGELMÄSZIGE TETRAEDER AUS DEM WÜRFEL ABLEITEN LÄSZT!



21) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6B(G) vom Di, den 07. November 2006:</u>**
Im regelmäßigen Tetraeder ABCD seien P und Q Punkte auf den Kanten AD und BD derart, dass $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{PD}$ und $\overline{BQ} = 5 \cdot \overline{QD}$ gilt. Zeige, dass das Dreieck ΔCPQ rechtwinklig mit dem rechten Winkel in P ist! **Tip: Leite das Tetraeder aus einem Würfel der Seitenlänge 6 ab!**

22) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6D(Rg) vom Oktober 2007:</u>**
Im regelmäßigen Tetraeder ABCD (abzuleiten aus einem Würfel der Kantenlänge 10) seien P und R Punkte auf den Kanten AB und BD derart, dass $\overline{PB} = 4 \cdot \overline{AP}$ und $\overline{RD} = 4 \cdot \overline{BR}$ gilt. M sei der Mittelpunkt der Kante CD, Q jener Punkt auf der Strecke CM, für den $\overline{CQ} = 4 \cdot \overline{QM}$ gilt. Zeige, dass das Dreieck ΔPQR gleichschenklig ist. Welche Seite bildet die Basis?


Prof. K.
(Musikprofessor der 6D)

23) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6D(Rg) vom Oktober 2007:</u>**
M sei der Mittelpunkt der Kante BF eine Würfels ABCDEFGH. Prof. K. (vgl. nebenstehende Abbildung!) behauptet, dass das Maß eines Winkels φ, welchen die Gerade g_{DM} mit der Ebene ε_{ABH} einschließt, exakt 60° beträgt. Kontrolliere durch Rechnung, ob seine Behauptung stimmt und korrigiere sie gegebenenfalls!
(Prof. K.s) Tip (der stimmt jedenfalls!): Wähle die Würfelkantenlänge mit 2!

24) Die Punkte P, Q und R liegen auf den Kanten AD, BD und CD des Tetraeders ABCD derart, dass $\overline{PD} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{BQ} = \overline{QD}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RD}$ gilt. Beweise, dass ΔPQR gleichschenklig ist.
Was ist die Basis? **Tip: Leite das Tetraeder aus einem Würfel der Seitenlänge 4 ab!**

25) Beweise folgenden

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Für jeden Wert von n schließen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n+1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1-n \\ 2n+1 \\ n+2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 30° ein.

26) Beweise folgenden

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Für jeden Wert von n schließen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ n(n+1) \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -n^2 \\ 1 \\ (n+1)^2 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 45° ein.

27) **Zusatzpunkte-Schularbeitsbeispiel der 6D(Rg) vom Oktober 2007:**
Beweise folgenden

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Für jeden Wert von n schließen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n+1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -n \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einen Winkel von 60° ein.

28) Ausgehend vom Würfel ABCDEGFH (Seitenlänge 2) bezeichne P bzw. Q den Mittelpunkt des Quadrats ADEH bzw. ABCD. Berechne das Maß des Winkel $\angle HPQ$!

29) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen der Ebene ε_{PQR} [P(9|0|0), Q(0|3|0), R(0|0|2)] und der Gerade g_{AB} [A(4|1|5), B(0|4|10)]!

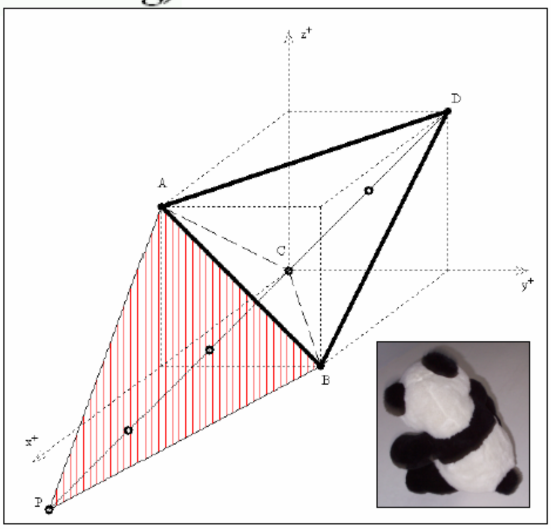
30) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen der Ebene ε_{PQR} [P(3|0|0), Q(0|1|0), R(0|0|2)] und der Gerade g_{AB} [A(4|5|6), B(3|9|15)]!

31) Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels zwischen der Ebene ε_{PQR} [P(1|0|0), Q(0|4|0), R(0|0|3)] und der Gerade g_{AB} [A(2|5|6), B(17|12|–2)]!

32) **Wie deutlich ersichtlich ein ehemaliges Schularbeitsbeispiel:**

Klasse: 6A(G) **2. Schularbeit (zweistündig)** **Fr, 20. Dezember 2002**

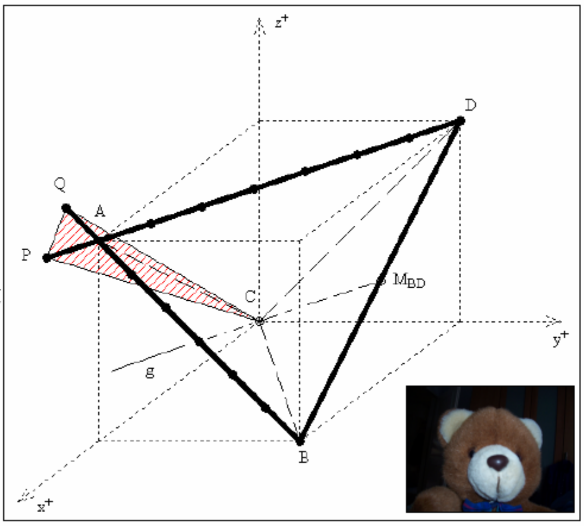
1) Der in nebenstehender Figur eingezeichnete Punkt P liegt in der illustrierten Art und Weise auf der Trägerade g_{CD} der Kante CD eines regelmäßigen Tetraeders ABCD, welchen du unter Beachtung der bereits eingezeichneten Koordinatenachsen aus einem Würfel der Seitenlänge 2 ableiten sollst. 6A-Bär Brutus (rechts unten in der Figur!) behauptet nun, dass der spitze Winkel zwischen der Gerade g durch B und C und der Ebene ε durch A, B und P exakt 60° misst. Beweise oder korrigiere Brutus kühne Behauptung!



33) **<u>Ebenso leicht erkennbar: ein weiteres ehemaliges Schularbeitsbeispiel:</u>**

Klasse: 6B(G) **2. Schularbeit (zweistündig)** **Fr, 13. Dezember 2002**

1) Die in nebenstehender Figur eingezeichneten Punkte P und Q liegen in der illustrierten Art und Weise auf den Trägergeraden g_{AD} und g_{AB} zweier Kanten eines regelmäßigen Tetraeders ABCD, welchen du unter Beachtung der bereits eingezeichneten Koordinatenachsen aus einem Würfel der Seitenlänge 42 ableiten sollst. 6B-Bär Bruno (rechts unten in der Figur!) behauptet nun, dass der spitze Winkel zwischen der Gerade g durch C und M_{BD} und der Ebene ε durch C, P und Q exakt 60° misst. Beweise oder korrigiere Brunos kühne Behauptung!

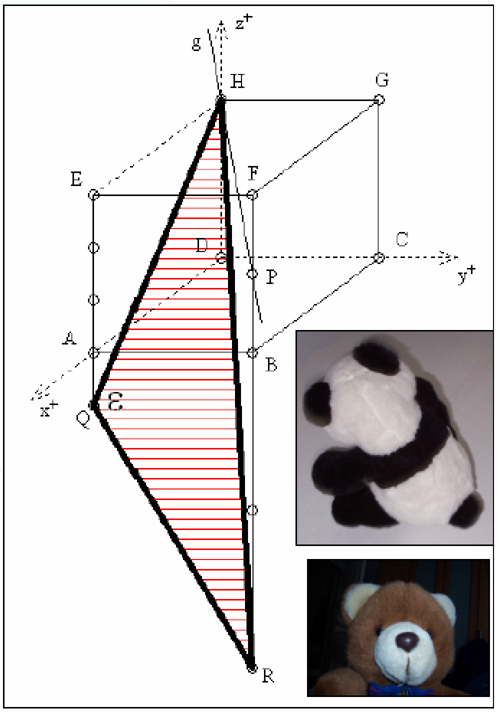


34) Für die "***Zurückgebliebenen***": ein weiteres ehemaliges Beispiel einer ***Nachtragsschularbeit***

Klasse: 6AB(G) **2. Schularbeit (zweistündig)** **Fr, 10. Jänner 2003**

(Nachtrag)

1) Die in nebenstehender Figur eingezeichneten Punkte P, Q und R liegen in der illustrierten Art und Weise auf den Trägeraden g_{BF}, g_{AE} und (nochmals) g_{BF} des Würfels ABCDEFGH mit der Seitenlänge 6, das zugehörige Koordinatensystem ist bereits eingezeichnet. 6A-Bär Brutus (rechts oben in der Figur!) behauptet, dass der spitze Winkel zwischen der Gerade g durch H und P und der Ebene ε durch H, Q und R exakt 30° misst, 6B-Bär Bruno (rechts unten in der Figur!) meint jedoch, dass besagter Winkel genau 60° misst. Behält einer der beiden Klassenbären Recht? Falls ja, welcher? Falls nein, korrigiere die beiden falschen Aussagen!



35) **<u>Schularbeitsbeispiel der 6B(G)</u>**
<u>vom Di, den 07. November 2006:</u>

M sei der Mittelpunkt des Begrenzungsquadrats ABEF eines Würfels ABCDEFGH. Prof. H. (vgl. nebenstehende Abbildung!) behauptet, dass das Maß eines Winkels φ, welchen die Gerade g_{DM} mit der Ebene ε_{ABH} einschließt, exakt 30° beträgt. Kontrolliere durch Rechnung, ob seine Behauptung stimmt und korrigiere sie gegebenenfalls!
(Prof. H.s) Tip (der stimmt jedenfalls!):
Wähle die Würfelkantenlänge mit 2!

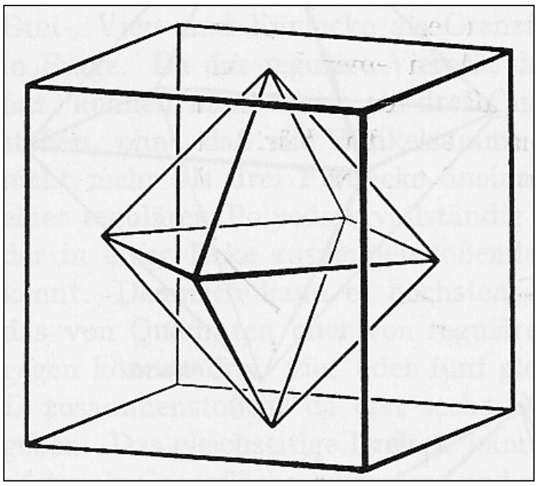
Prof. H. (ehrenwerter KV der 6B) beim Schulfest 2005 und dann ….

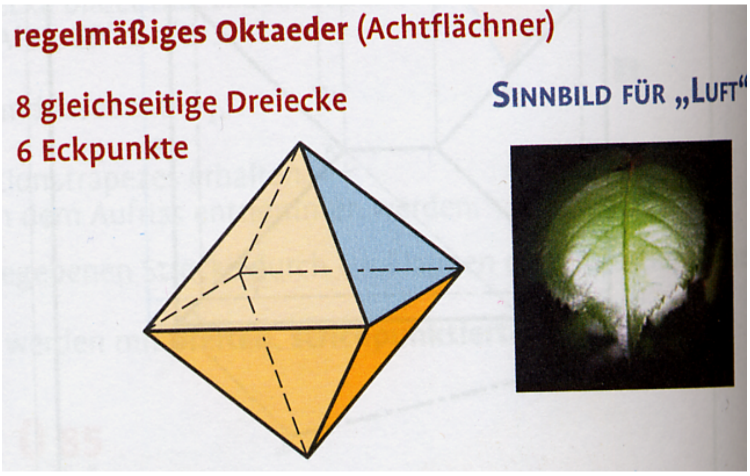
…. zwei Jahre später beim Schulfest 2007

36) Die Punkte P, Q und R liegen auf den Kanten $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CE}$ eines Oktaeders (vgl. untenstehende Abbildungen!) ABCDEF derart, dass $\overline{PE} = 3 \cdot \overline{AP}$, $\overline{BQ} = \overline{QE}$ sowie $\overline{CR} = 3 \cdot \overline{RE}$ gilt. Beweise, dass das Dreieck ΔPQR rechtwinklig ist. Was ist die Hypotenuse?

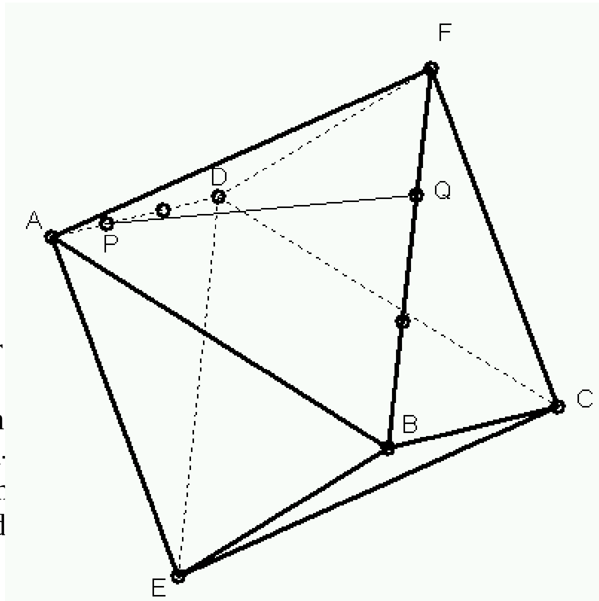
Tip: Leite das Oktaeder aus einem Würfel der Seitenlänge 4 ab!

BEACHTE DABEI DIE UNTERE LINKE ABBILDUNG, DIE ILLUSTRIERT, WIE SICH DAS OKTAEDER AUS DEM WÜRFEL ABLEITEN LÄSZT!





37) In nebenstehendem Oktaeder wurden die Kanten AD und BF jeweils in drei gleich lange Teile geteilt. Zeige für die markierten Punkte P und Q, dass g_{PQ} sowohl auf g_{AD} als auch auf g_{BF} normal steht!



38) Der in der Figur rechts unten abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 42. Die Würfelkanten AD, CG und GH wurden in jeweils sieben gleich lange Teile geteilt. Q (in der Verlängerung über D hinaus), S und T sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte. P ist der Mittelpunkt der Würfelkante BC. Die Strecke DP wurde in 21 gleich lange Teile geteilt, R ist von D aus betrachtet der achte Teilungspunkt. Die Strecke ST wurde in drei gleich lange Teile geteilt, U ist der entsprechend in der Figur markierte Teilungspunkt.

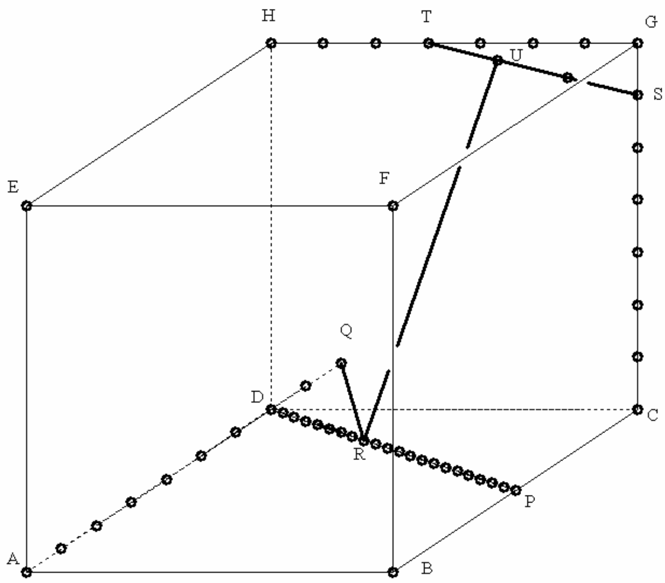
a) Zeige, dass g_{RU} auf g_{QR} und g_{ST} normal steht!

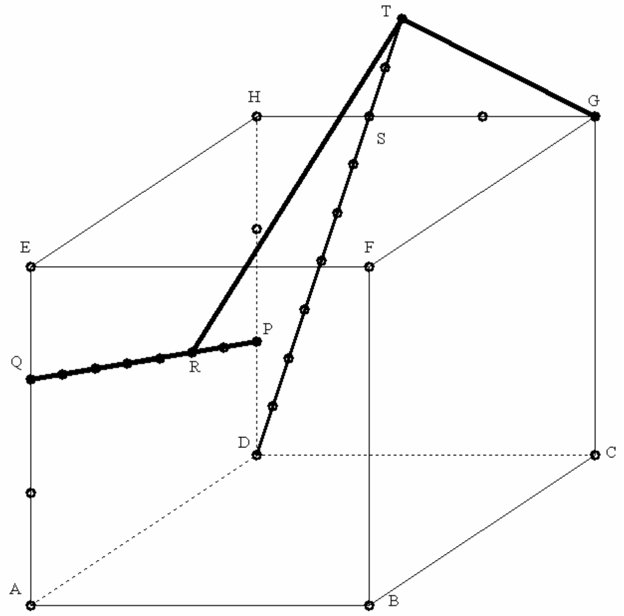
b) Zeige, dass die Länge der Strecke RU der Würfelkantenlänge entspricht.

39) Der in der Figur auf der nächsten Seite abgebildete Würfel ABCDEFGH hat eine Seitenlänge von 21. Die Würfelkanten AE, DH und HG wurden jeweils in drei gleich lange Teile geteilt. Q, P und S sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte. Die Strecken PQ und DS (letzte über S hinaus verlängert) wurden jeweils in sieben gleich lange Teile geteilt. R und T sind die entsprechend in der Figur markierten Teilungspunkte.

a) Zeige, dass g_{RT} auf g_{PQ} und g_{GT} normal steht!

b) Zeige, dass die Länge der Strecke RT der Würfelkantenlänge entspricht.





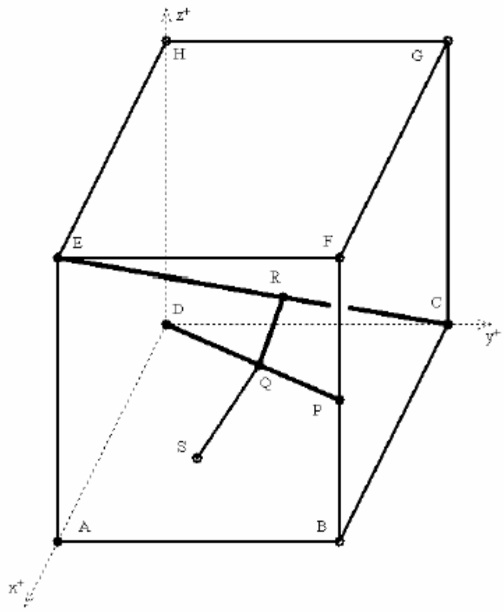
R A U M F Ü R N O T I Z E N

J e t z t n i c h t m e h r ! L

40) **Wie deutlich ersichtlich ein ehemaliges Beispiel einer schriftlichen Wiederholungsprüfung:**

Klasse: 6C(Rg) **27. 02. 2007**

Schriftliche Wiederholungsprüfung (Pflichtmodul PM1: Analytische Raumgeometrie)

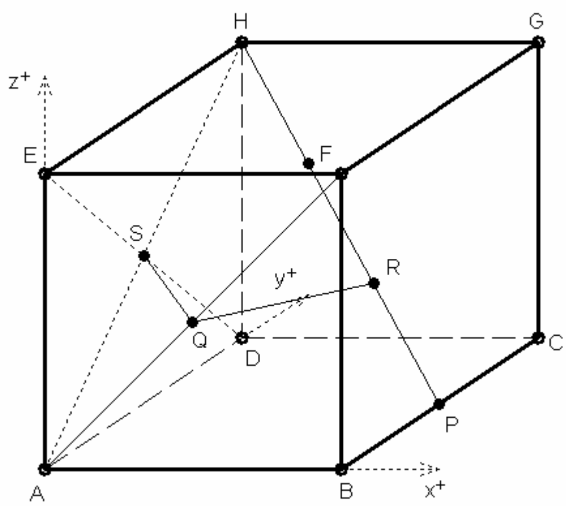


1) In nebenstehend abgebildetem Würfel (passend zur nächst gelegenen Straßenbahn: Seitenlänge 26) sind die Strecken DP und CE (P … Mittelpunkt der Würfelkante BF) eingezeichnet.
R ist von C nach E betrachtet der 11. von insgesamt 26 Teilungspunkten,
Q ist von D nach P betrachtet der 7. von insgesamt 13 Teilungspunkten.

a) Zeige, dass g_{QR} auf g_{DP} und g_{CE} normal steht! Verwende dazu das <u>*bereits eingezeichnete Koordinatensystem*</u>!

b) Berechne für den Punkt S(16|9|0) – siehe Abbildung! – das Maß des Winkels $\angle SQR$ und zeige, dass $\overline{QS} = \sqrt{3} \cdot \overline{QR}$ gilt!
Benenne den Winkel und zeichne ihn ein (Skizze oder in der Abbildung)!

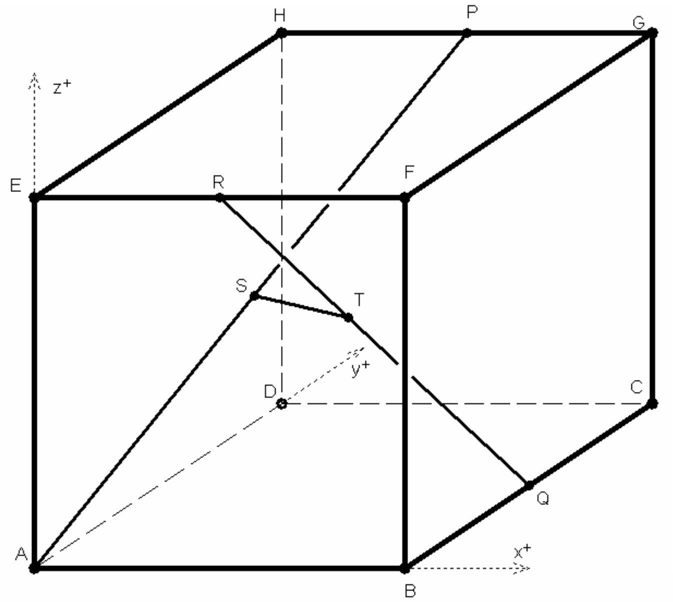
41) In nebenstehend abgebildetem Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 6) sind bis auf die Würfeleckpunkte alle eingezeichneten Punkte durch fortlaufende Halbierung bzw. Drittelung entstanden. Beweise, dass die Gerade g_{QR} sowohl auf g_{HP} als auch g_{AF} normal steht und berechne das Maß des Winkels $\angle SQR$!



42) Untenstehend abgebildeter Würfel hat eine Seitenlänge von 106. P, Q und R sind der Abbildung zu entnehmende Kantelmittelpunkte. S und T entstehen durch Unterteilung der Strecken AP und QR in 53 gleich lange Teile. Dabei ist S von A aus betrachtet der 27. und T von Q aus betrachtet der 31. Teilungspunkt.

a) Zeige, dass g_{ST} auf g_{AP} und g_{QR} normal steht!

b) Berechne für den Punkt U(0|–18|54) das Maß des Winkels $\angle TSU$!



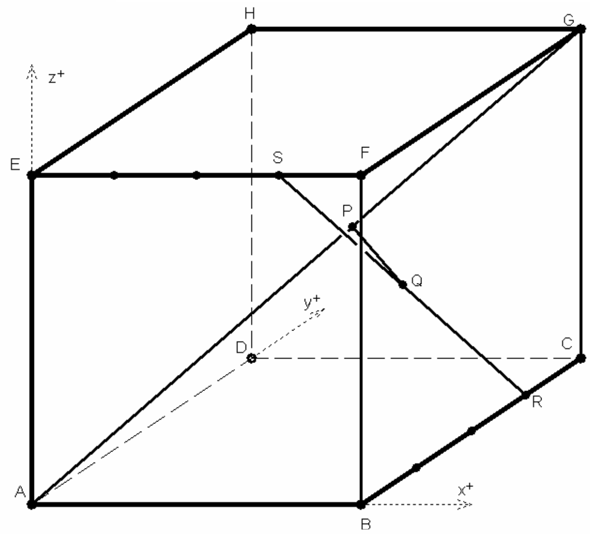
R A U M F Ü R N O T I Z E N

J e t z t n i c h t m e h r ! ☺

43) Nebenstehend abgebildeter Würfel hat eine Seitenlänge von 24. R bzw. S geht durch Viertelung der Kante BC bzw. EF hervor. P entsteht durch Unterteilung der Strecke AG in zwölf gleich lange Teile, wobei P von A aus betrachtet der siebte Teilungspunkt ist, Q ist der Mittelpunkt der Strecke RS.

a) Beweise, dass g_{AG}, g_{RS} und g_{PQ} paarweise aufeinander normal stehen!

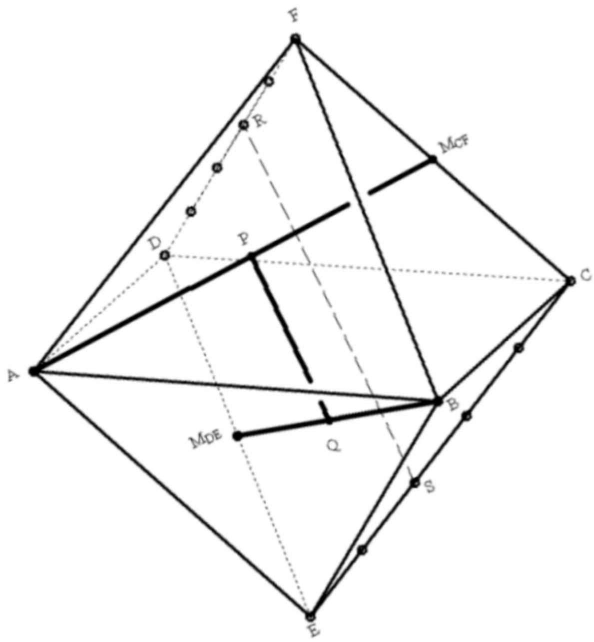
b) Berechne für den Punkt T(0|–145|12) das Maß des Winkels $\angle PQT$!



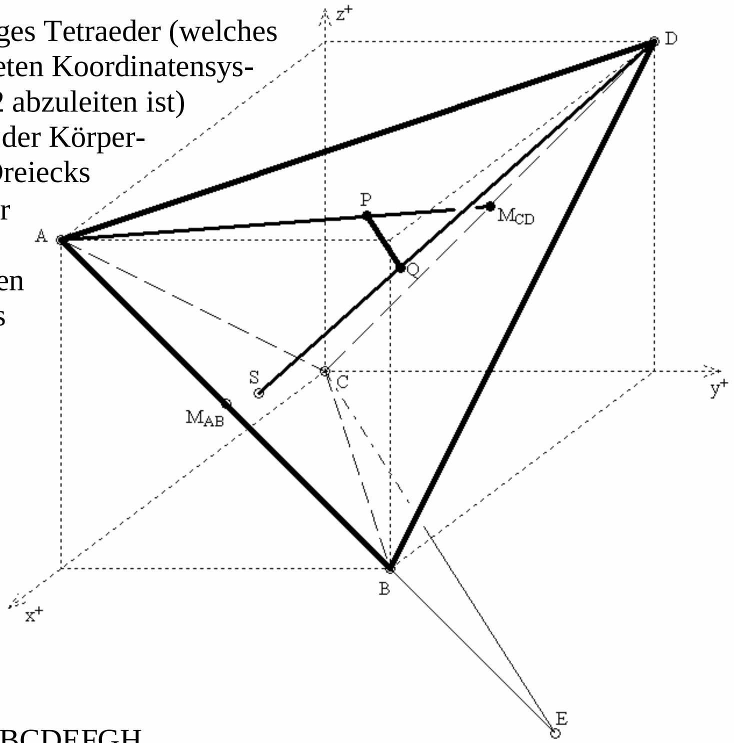
44) Im nebenstehend abgebildeten Oktaeder (abzuleiten aus einem Würfel mit der Seitenkantenlänge 220) geht die Strecke RS aus der Verbindung entsprechender Teilungspunkte auf den Kanten CE und DF hervor. P und Q entstehen jeweils durch "Elftelung" der Strecken AM_{CF} und BM_{DE}, wobei P bzw. Q der von A aus bzw. von B aus betrachtet sechste Teilungspunkt ist.

a) Zeige, dass g_{PQ} sowohl auf die Gerade durch A und M_{CF} als auch auf die Gerade durch B und M_{DE} normal steht!

b) Beweise, dass g_{PQ} parallel zu g_{RS} verläuft. In welchem Verhältnis stehen die Längen der Strecken PQ und RS?



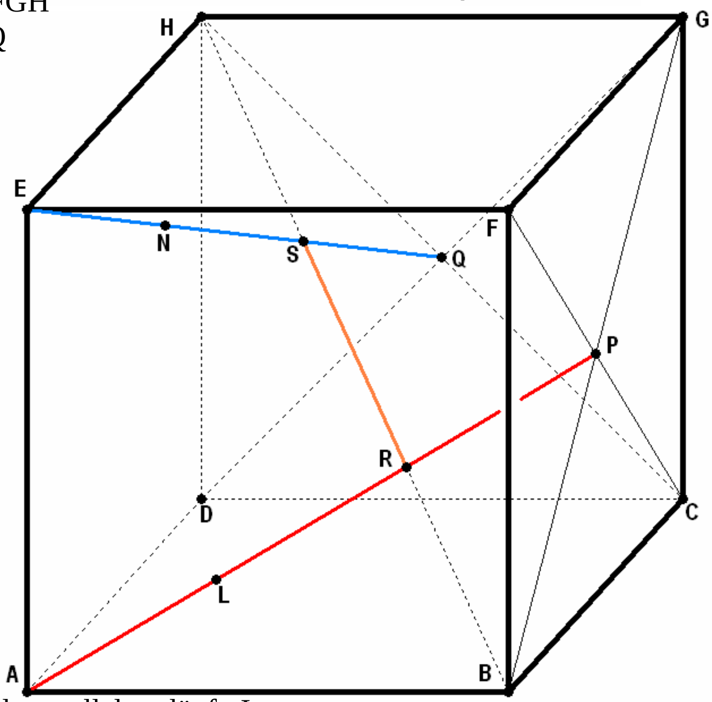
45) In nebenstehender Figur ist ein regelmäßiges Tetraeder (welches unter Verwendung des bereits eingeeichneten Koordinatensystems aus einem Würfel der Seitenlänge 42 abzuleiten ist) zusammen mit der Seitenhöhe AM_{CD} und der Körperhöhe SD (wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC ist) illustriert, E ist (vgl. Figur!) der Spiegelpunkt von M_{AB} an B. P und Q entstehen durch "Vierzehntelung" der Strecken AM_{CD} und SD, wobei P bzw. Q von A aus bzw. von S aus betrachtet der zehnte bzw. der fünfte Teilungspunkt ist.



a) Zeige, dass g_{PQ} sowohl auf die Gerade durch A und M_{CD} als auch auf die Gerade durch S und D normal steht!

b) Beweise, dass g_{PQ} parallel zu g_{CE} verläuft! In welchem Verhältnis stehen die Längen der beiden Strecken?

46) In nebenstehender Figur hat der Würfel ABCDEFGH eine Kantenlänge von 6. Die Strecken AP und EQ wurden jeweils in drei gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte L, R, N und S hervorgehen.



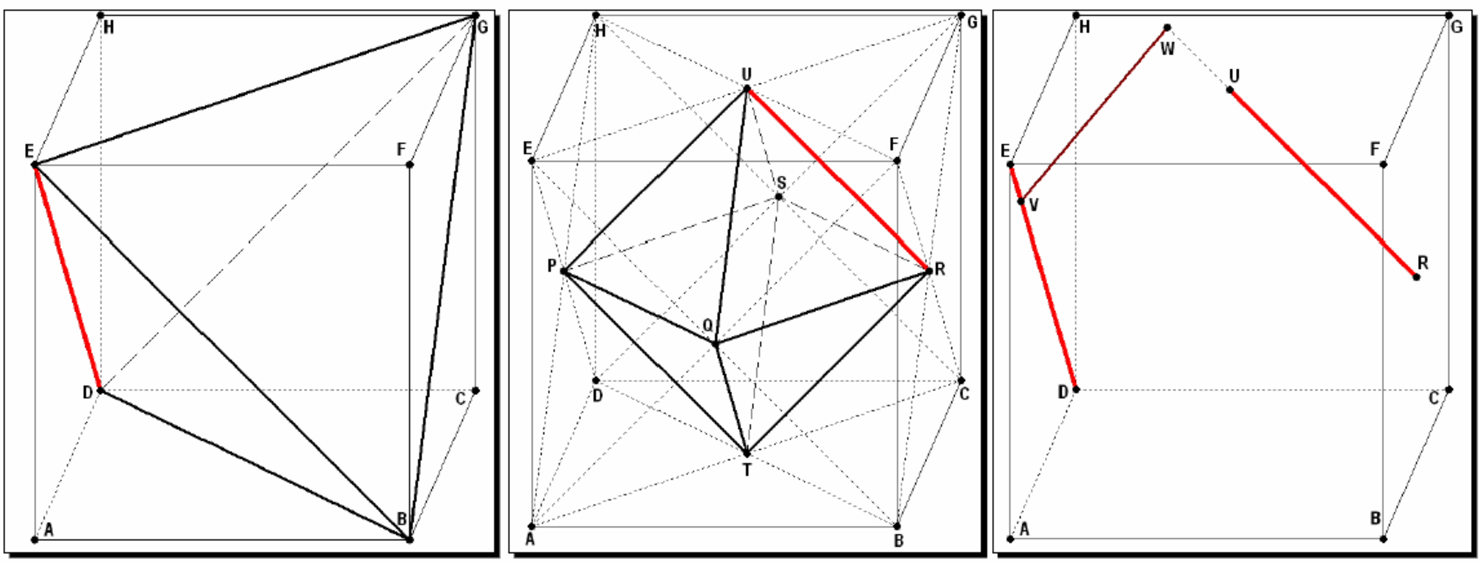
a) Zeige, dass g_{RS} sowohl auf g_{AP} als auch auf g_{EQ} normal steht.

b) Zeige, dass R und S auf der Raumdiagonale BH liegen und beschreibe deren Lage auf BH durch Teilverhältnisse (ikonisch oder verbal!).

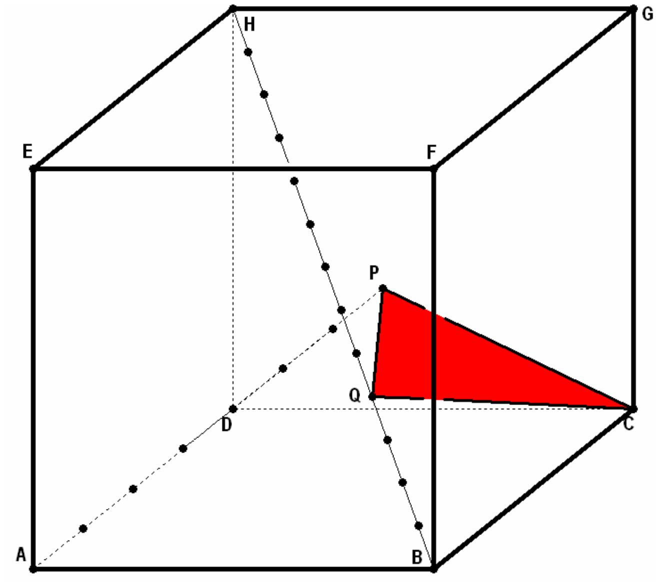
47) In einem Tetraeder BDEG und einem Oktaeder PQRSTU, welche beide aus einem Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 12 abgeleitet wurden (vgl. untere Abbildungen) sind jene Punkte V und W auf den (Trägergeraden der) Kanten DE und RU zu betrachten, für welche $\overline{VE} = 5 \cdot \overline{DV}$ und $\overline{UW} = \frac{1}{3} \cdot \overline{UR}$ gilt:

a) Zeige, dass g_{VW} auf g_{DE} und g_{RU} normal steht!

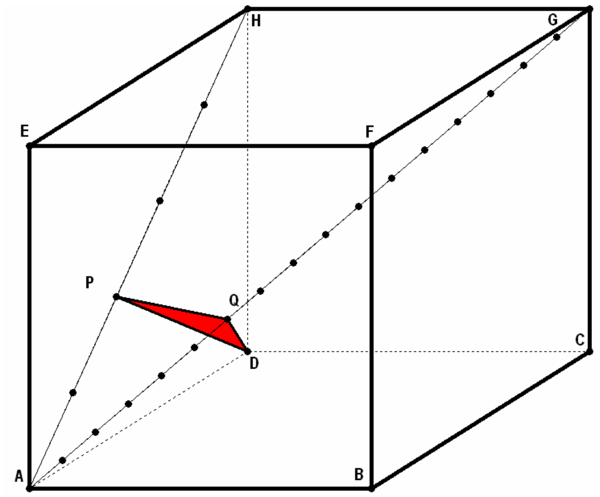
b) Zeige, g_{VW} zu einer Raumdiagonale des Würfels parallel verläuft. In welchem Verhältnis steht die Länge von UV zu dieser Raumdiagonale?

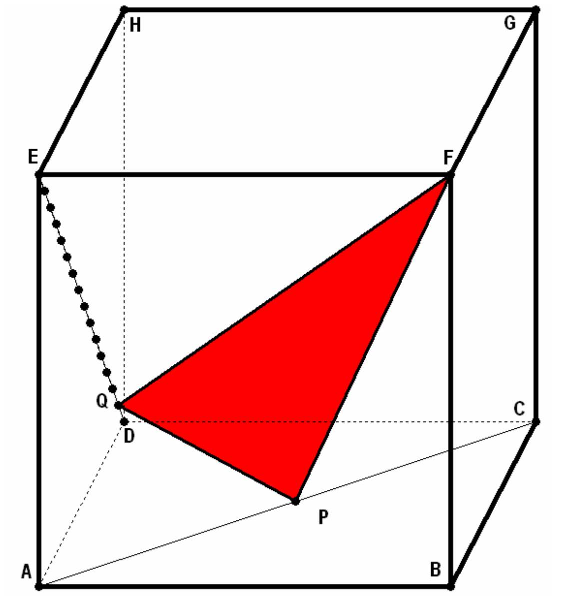


48) Im nebenstehenden Würfel (a=52) wurde die Raumdiagonale BH in dreizehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. P entsteht durch (über D hinausgehende forltaufende) Viertelung der Kante AD. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔPCQ!



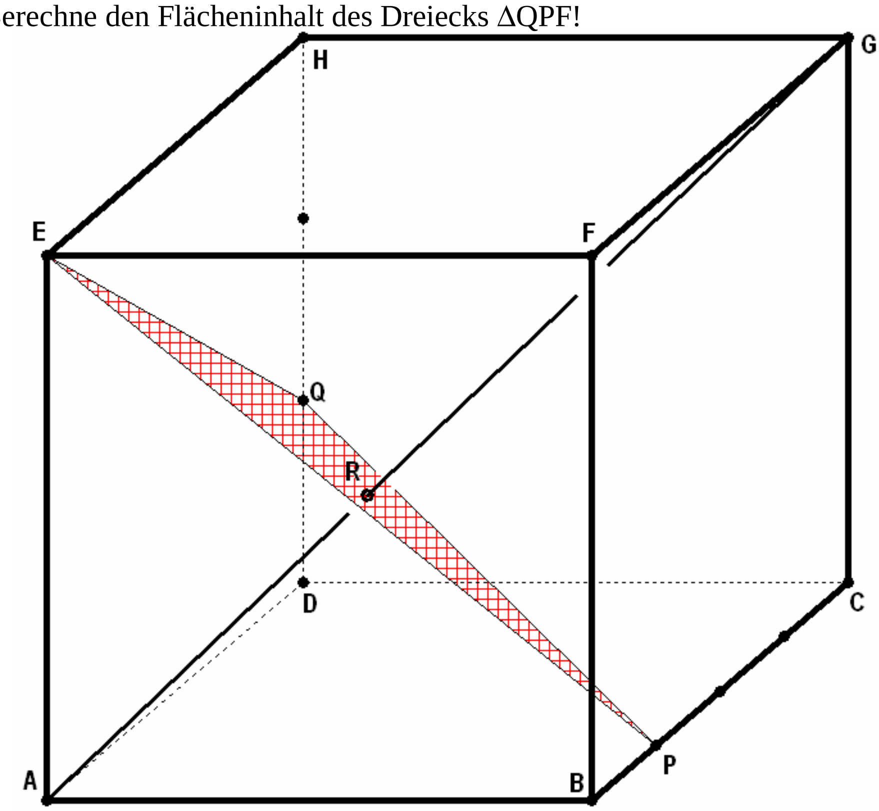
49) Im links unten abgebildeten Würfel (a=85) wurde die Raumdiagonale AG in siebzehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. P entsteht durch Fünftelung der Flächendiagonale AH. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔDQP!



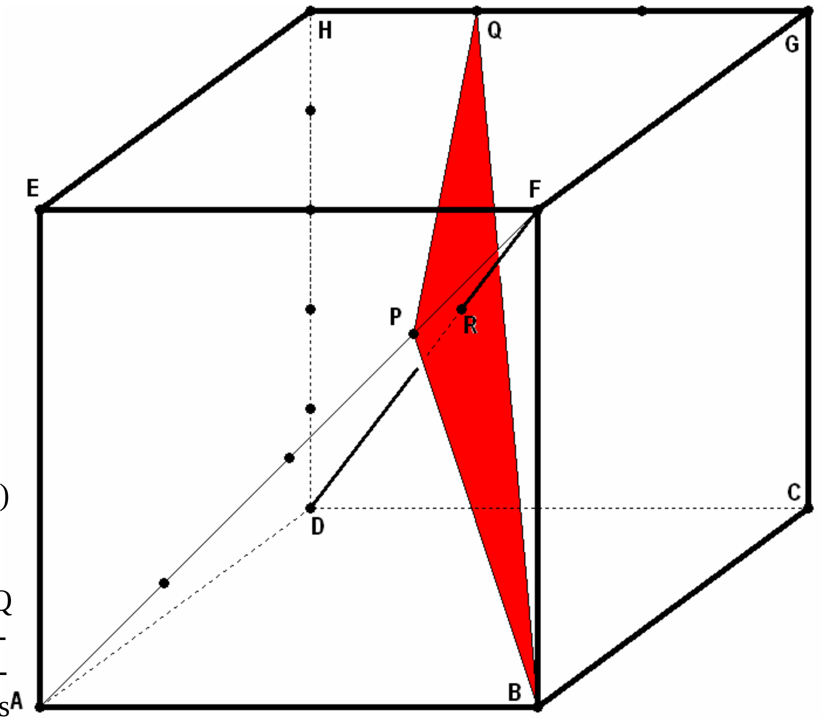


50) Im rechts oben abgebildeten Würfel (a=480) wurde die Flächendiagonale AC in 32 gleich lange Teile geteilt, P ist von A aus betrachtet der 17. Teilungspunkt. Die Flächendiagonale DE wurde in fünfzehn gleich lange Teile geteilt, Q ist der entsprechend markierte Teilungspunkt. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPF!

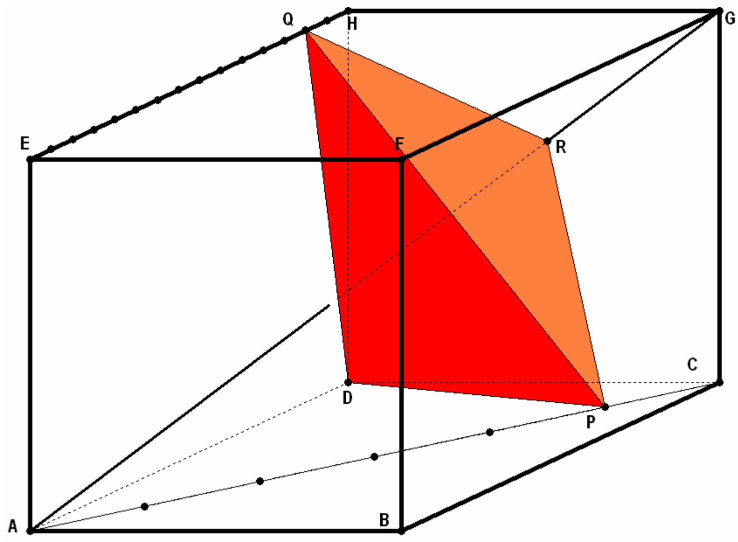
51) In nebenstehendem Würfel (a=60) wurde die Kante BC in vier gleich lange Teile sowie die Kante DH in drei gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{EPQ} mit der Raumdiagonale AG die Länge selbiger teilt!

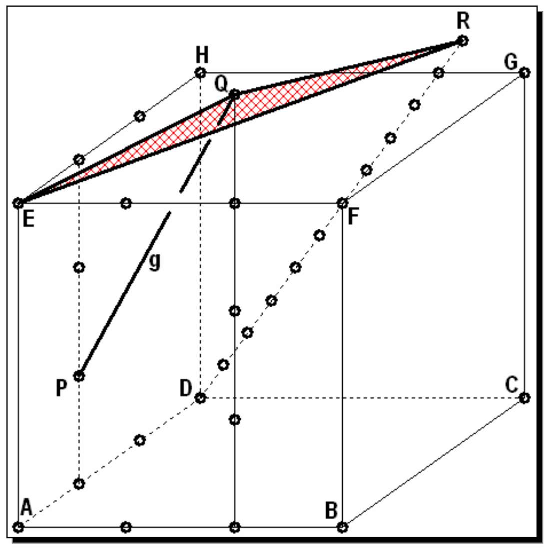


52) In nebenstehendem Würfel (a=12) wurde die Flächendiagonale AF in vier gleich lange Teile sowie die Kante GH in drei gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{BPQ} mit der Raumdiagonale DF die Länge selbiger teilt!



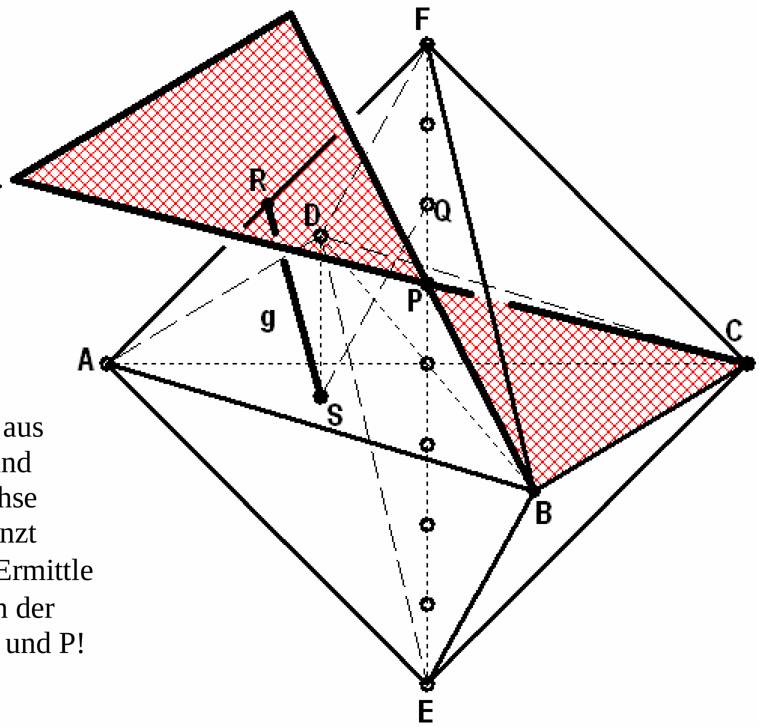
53) Im links unten abgebildetem Würfel (a=60) wurde die Flächendiagonale AC in sechs gleich lange Teile sowie die Kante EH in fünfzehn gleich lange Teile geteilt, P und Q sind die entsprechend markierten Teilungspunkte. Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und ermittle, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt R der Ebene ε_{DPQ} mit der Raumdiagonale AG die Länge selbiger teilt!



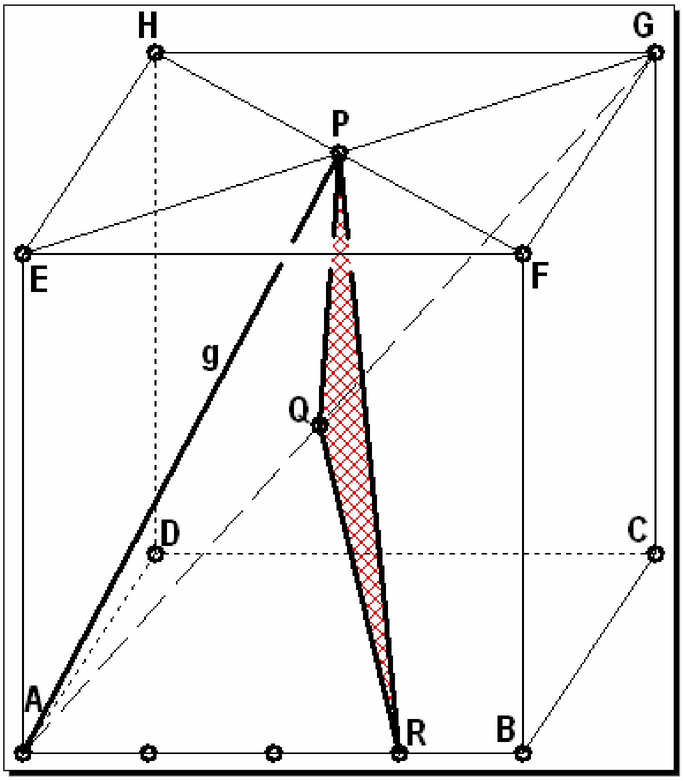


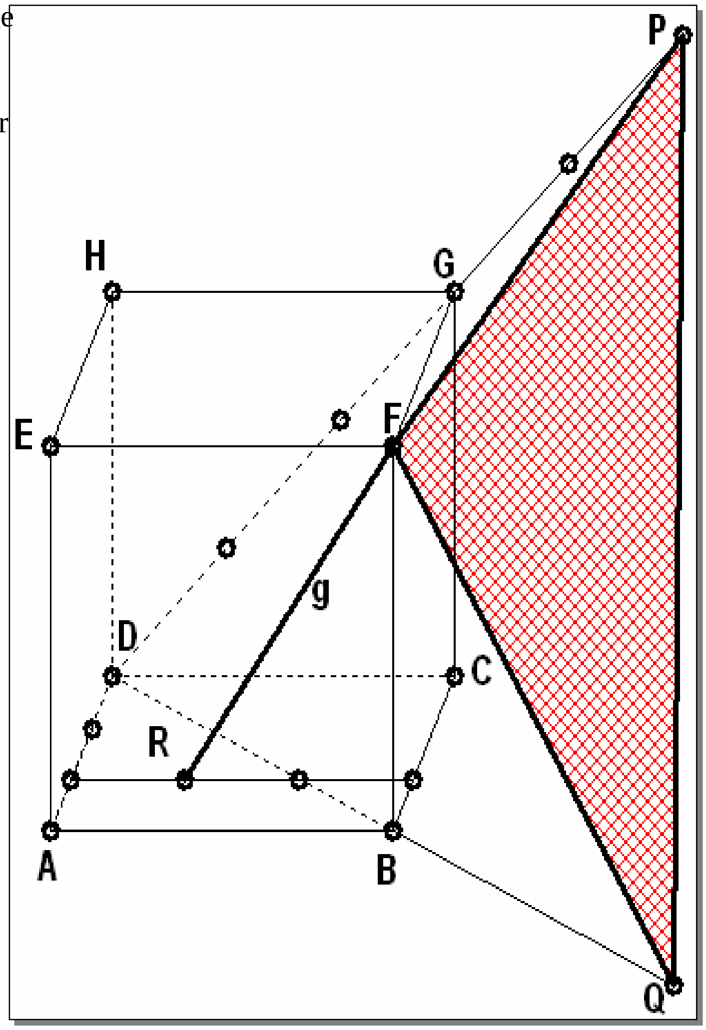
54) Der rechts oben abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 6 auf. Die Punkte P und Q entstanden wie illustriert durch (fortlaufende) Drittelung von Kanten des Würfels sowie deren Parallelen, R durch fortlaufende Sechstelung einer Raumdiagonale. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen der Gerade g und der Ebene durch die Punkte C, Q und R!

55) Das Oktaeder in nebenstehender Abbildung ist aus einem Würfel der Seitenlänge 8 abzuleiten. P und Q entstehen durch Achtelung der Symmetrieachse g_{EF}, R ist der Mittelpunkt der Kante AF, S ergänzt das Dreieck ΔDFQ zu einem Parallelogramm, Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen der Gerade g und der Ebene durch die Punkte B, C und P!



56) Der rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 3 auf. P und R entstehen durch (fortlaufende) Drittelung einer Würfelkante, einer Parallelen einer Würfelkante sowie einer Flächendiagonale, Q ist der Spiegelpunkt von D an B. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen der Gerade g und der Ebene durch die Punkte F, P und Q!





57) Der links oben abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 32 auf. P ist der Mittelpunkt des Quadrats EFGH, Q entsteht durch Teilung der Raumdiagonale AG in 32 gleich lange Teile, wobei Q von A nach G betrachtet der 15. Teilungspunkt ist. R schließlich entsteht durch Viertelung der Kante AB. Ermittle das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen der Gerade g und der Ebene durch die Punkte P, Q und R!

58) Beweise, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} (n+1)^2 \\ n^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n^2+2n+2 \\ 2n^2+2n+1 \\ n^2+1 \end{pmatrix}$ unabhängig von n stets den gleichen Winkel φ einschließen und berechne dessen Maß!

59) Beweise, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ n^2+n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n^2+2n \\ 2n+1 \\ n^2-1 \end{pmatrix}$ unabhängig von n stets den gleichen Winkel φ einschließen und berechne dessen Maß!

60) Beweise, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ n^2 \\ -(n+1)^2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n^2 \\ (n+1)^2 \\ -1 \end{pmatrix}$ unabhängig von n stets den gleichen Winkel φ einschließen und berechne dessen Maß!

61) Beweise, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} -n^2+n+1 \\ -n^2-n+1 \\ n^2+3n+1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} n^2+n-1 \\ n^2+3n+1 \\ n^2-n-1 \end{pmatrix}$ unabhängig von n stets den gleichen Winkel φ einschließen, welcher dem Bindungswinkel von Methan entspricht.

62) Beweise folgenden $\boxed{\text{SATZ}}$. Für jeden Wert von n schließt der Vektor $\vec a = \begin{pmatrix} n^2+3n+1 \\ -n^2+n+1 \\ n^2+n-1 \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $\vec b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **<u>den gleichen Winkel</u>** ein. **<u>Dieser</u>** entspricht dem Bindungswinkel von Methan.

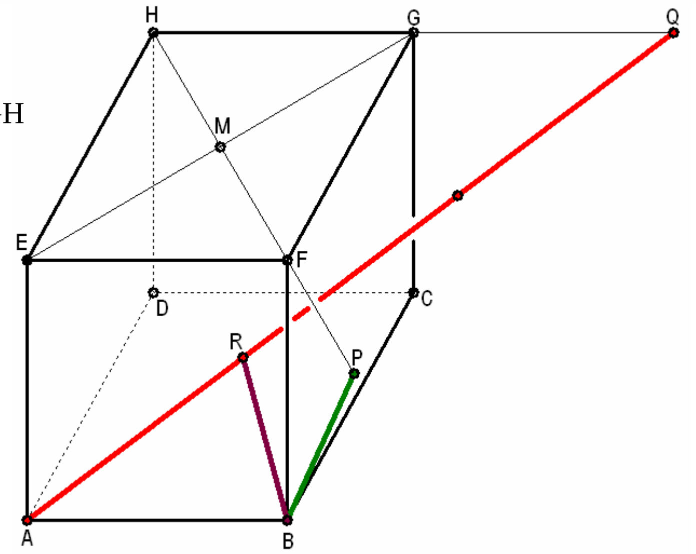
63) Beweise allgemein (Hinweis: Satz 6.5 auf Seite 11 des Skriptums!) oder überprüfe für zwei selbst gewählte Vektoren:

$$\left[\left(\vec b \times \vec a\right) \times \vec b\right] \times \left[\vec a \times \left(\vec b \times \vec a\right)\right] = \left(\vec a \times \vec b\right)^2 \cdot \left(\vec a \times \vec b\right)$$

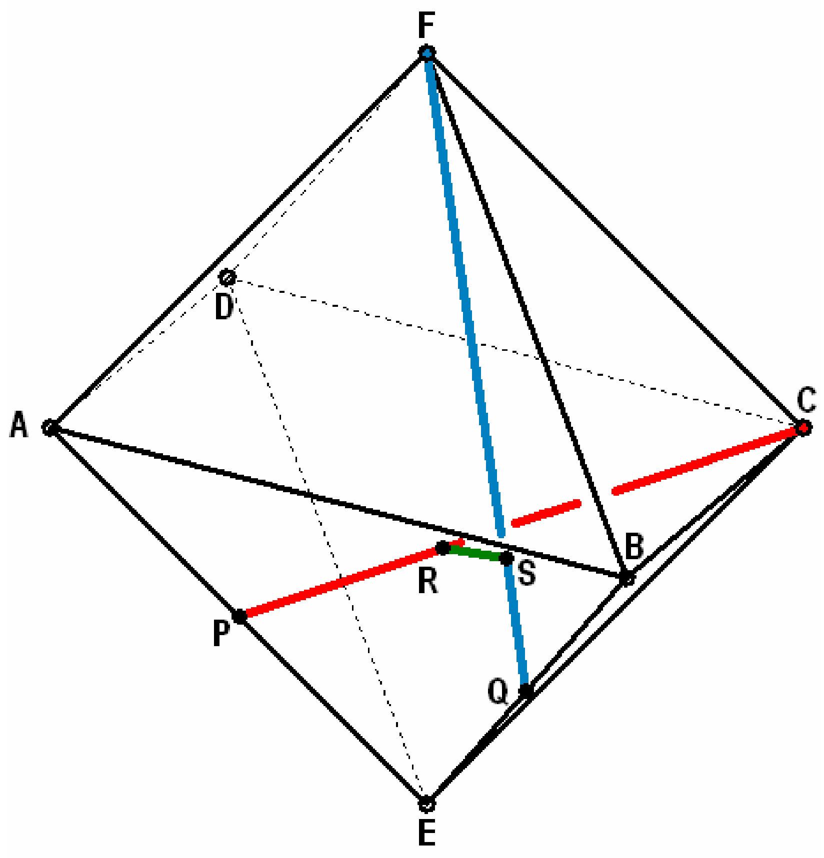
64) Der nebenstehend abgebildete Würfel ABCDEFGH weist eine Seitenlänge von 6 auf. P bzw. Q ist der Spiegelpunkt von M an F bzw. von H an G. R entsteht durch Drittelung der Strecke AQ.

a) Zeige, dass g_{BR} sowohl auf g_{AQ} als auch auf g_{BP} normal steht!

b) Zeige, dass R auf der Raumdiagonale BH liegt und beschreibe seine Lage auf BH durch ein Teilverhältnis (ikonisch oder verbal!).



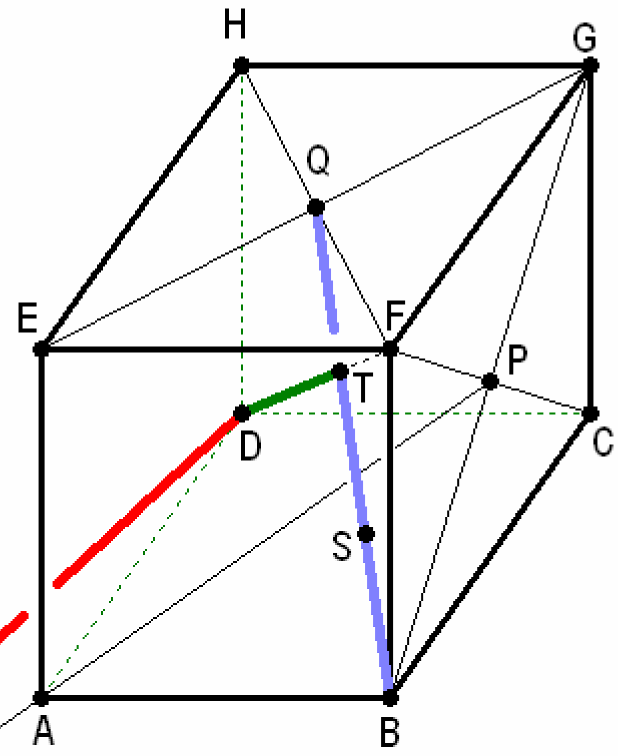
65) Leite nebenstehend abgebildetes Oktaeder ABCDEF aus einem Würfel der Seitenlänge 364 ab, um folgende Eigenschaft nachzuweisen: Unterteilt man die Strecken CP und FQ (wobei P bzw. Q der Mittelpunkt der Oktaederkante AE bzw. BE ist) in jeweils 91 gleich lange Teile und betrachtet auf PC (von P nach C gesehen!) den 33. Teilungspunkt R sowie auf QF (von Q nach F gesehen!) den 19. Teilungspunkt S, so steht g_{RS} sowohl auf g_{CP} als auch auf g_{FQ} normal.



66) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Kantenlänge 6) wurde P an A gespiegelt sowie die Strecke BQ in drei gleich lange Teile geteilt, woraus die Punkte R, S und T hervorgegangen sind.

a) Zeige, dass g_{DT} sowohl auf g_{DR} als auch auf g_{BQ} normal steht!

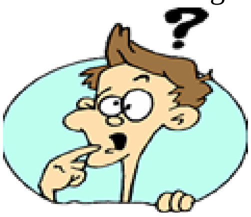
b) Zeige, dass T auf der Raumdiagonale DF liegt und beschreibe seine Lage auf DF durch ein Teilverhältnis (ikonisch oder verbal!).



67) ZUM NACHDENKEN …
… und freilich zu bearbeiten:

Warum verdeckt die Gerade g_{BQ} die Gerade g_{AP}, wenn man die Konfiguration aus Aufgabe 66 in Richtung AD (von A nach D) betrachtet?

Hinweis: Schnittpunkt der beiden (im Raum zueinander windschief liegenden!) Geraden in einem geeigneten Hauptriss!



68) Vom Quader $ABCDEFGH$ sind die Eckpunkte $A(8|72|9)$, $B(16|84|33)$ und $D(26|78|z_D)$ bekannt.

(a) Berechne z_D! In welcher besonderen Ebene liegt D?

(b) Berechne die Koordinaten von C!

(c) Die Länge der Kante AE soll 84 betragen, wobei E über π_1 liegt.
Berechne die Koordinaten von E und zeige, dass E genauo so hoch über π_1 liegt wie B.
In welcher speziellen Ebene liegt E?

(d) Berechne die Koordinaten von F, G und H!

(e) Berechne auf zwei Arten die Länge einer Raumdiagonale des Quaders!
Welche der Punkte (a) bis (d) brauchst du dafür unbedingt (Begründung!)?

69) Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{b_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeige, dass $|\overrightarrow{a_1}| = \left|\overrightarrow{b_1}\right| = \ell$ gilt und berechne ℓ.

(b) Bilde $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{a_1}$ und zeige, dass $\overrightarrow{v}$ nach Multiplikation mit $\frac{1}{\ell}$
(Der neue Vektor heiße $\overrightarrow{c_1}$!) noch immer ganzzahlige Komponenten aufweist.
Was fällt dir an ihnen auf und was kannst du über $|\overrightarrow{c_1}|$ aussagen?

70) Wie Aufgabe 69) mit $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

71) Wie müsste nun nach 69) und 70) die nächste Angabe lauten?

(a) Schreibe das allgemeine Bildungsgesetz für die Vektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{b_1}$ auf!

(b) Bearbeite nach 71)(a) nun in allgemeiner Form die entsprechenden Aufgabenstellungen (a) und (b) aus 69) und 70)! **Beachte dabei, beim Bilden des vektoriellen Produkts nicht gleich alles auszumultiplizieren, sondern möglichst viel herauszuheben, um dann mit $\frac{1}{\ell}$ multiplizieren zu können!**

72) P bzw. Q sei der Mittelpunkt der Kante EF bzw. CG des Würfels ABCDEFGH (Kantenlänge 18).

a) Zeige, dass g_{AQ} und h_{DP} aufeinander normal stehen!

b) Zeige, dass die Strecken AQ und DP gleich lang sind!

c) R bzw. S teilt AQ bzw. DP von A bzw. D aus innen im Verhältnis 4:5. Beweise, dass i_{RS} auf g_{AQ} und h_{DP} normal steht! Den wievielten Bruchteil der Würfelkantenlänge nimmt die Länge der Strecke RS ein?

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Hinweise zum (lohnenden!) Üben:

- **<u>Folgende 25 Aufgaben</u>** werden sicher in Schulübungen bearbeitet werden:
  1, 2, 4, 6, 7, 9ac, 10, 13a, 15d, 16, 20, 21, 25, 26, 28, 29, 33, 35, 36, 38, 43, 44, 68, 69 und 72

- **<u>Folgende 20 Aufgaben</u>** werden im Laufe des Septembers und Oktobers als Hausübung aufgegeben: 70 und 71 (1. HÜ), 63 (2. HÜ), 8 (3. HÜ), 9bd (4. HÜ), 11 und 12 (5. HÜ), 13b und 14 (6. HÜ), 15c (7. HÜ), 19 (8. HÜ), 22 (9. HÜ), 27, 58 und 59 (10. HÜ), 30 und 31 (11. HÜ), 34 (12. HÜ), 37 (13. HÜ), 39 (14. HÜ)

- **<u>Folgende 32 Aufgaben</u>** sind einzig und allein zum Zweck des eigenständigen Anwendens der bislang gelernten Methoden der Analytischen Raumgeometrie auf diverse geometrische Problemstellungen gedacht und werden (bis auf Einzelfälle in den Übungsstunden vor der Schularbeit) im Unterricht nicht behandelt: 3, 5, 15a, 15b, 17, 18, 23, 24, 32, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 60, 61, 62, 64, 65, 66 und 67

  <u>Fragen dazu in Pausen (die wir ja wohl nicht gemeinsam verbringen werden müssen …..) sind natürlich möglich und (im Rahmen) auch durchaus erwünscht!</u>

AHS Heustadelgasse
BG-BRG-BORG

Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 1. Schularbeit (zweistündig)

(6X, Realgymnasium, 2008/09)

18a) $\overline{DT} : \overline{TS} = 13 : 12$

32) **Brutus hat NICHT Recht! φ=60° ist falsch, es gilt φ=30°!**

40) $\angle SQR = 150°$

41) $\angle SQR = 60°$

42) $\angle TSU \approx 77°$

45) $\overline{PQ} = \frac{1}{7} \cdot \overline{CE}$

47) $\overline{VW} : \overline{AG} = 1 : 3$

48) 1352

49) 935

50) 82800

51) $\overline{AR} : \overline{RG} = 2 : 3$

52) $\overline{DR} : \overline{RF} = 2 : 1$

53) $\overline{AR} : \overline{RG} = 3 : 1$

54) $\varphi = 30°$

55) $\varphi = 45°$

56) $\varphi = 60°$

57) $\varphi = 30°$

58) $\varphi = 30°$

59) $\varphi = 45°$

60) $\varphi = 60°$

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.