§5. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Integralrechnung (Aufgaben S36 bis S50)

8D(Rg), 2009/10

S36) Aus dem Intervall [–16;16] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung $x^2+ax+b=0$ keine reellen Lösungen hat?

S37) Aus dem Intervall [–3;3] werden zwei Zufallszahlen p und q gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ keine reellen Lösungen hat?

S38) Aus dem Intervall [0;1] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die rationale Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung (wobei das Nennerpolynom kein vollständiges Quadrat ist!) ***keine Extremstellen besitzt***?

b) Zeige, dass f ***diesfalls*** keine Polstellen aufweist!

$$\boxed{y=f(x)=\frac{x^3}{x^2+ax+b}}$$

S39) Aus dem Intervall [–1;0] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die rationale Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung keine Extremstellen besitzt?

$$\boxed{y=f(x)=\frac{x^2+b}{x+a}}$$

S40) Aus dem Intervall [0;1] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die rationale Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung nur eine Wendestelle besitzt?

$$\boxed{y=f(x)=\frac{x^3}{x^2+ax+b}}$$

SA-Beispiel der 8C vom 23.12.2008:

S41) Aus dem Intervall [0;12] werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Oberflächeninhalt des Drehkegels mit dem Radius r und der Höhe h größer ist als der Mantelflächeninhalt des entsprechenden Zylinders?

SA-Beispiel der 8B vom 12.1.2009:

S42) Aus dem Intervall [–4;4] werden zwei Zufallszahlen p und q gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung $x^2+px+q=0$ keine reellen Lösungen hat? Fertige eine die Situation illustrierende Skizze an!

S43) a) Zeige, dass die Hyperbel hyp [hyp: xy=1] und die Parabel par [par: $y=ax^2+bx-(a+b-1)$] einander im Punkt P(1|1) schneiden.

b) Nun werden aus dem Intervall [–1;1] zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die hyp und par keine weiteren gemeinsamen Punkte haben?

S44) Aus dem Intervall [–1;1] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Kreis k [k: $x^2+y^2=a^2$] und die Hyperbel hyp [hyp: $xy=b$] keine gemeinsamen Punkte haben?

S45) Aus dem Intervall [0;2] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ drei Extremstellen besitzt?

S46) Aus dem Intervall [0;8] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ nur eine Extremstelle besitzt?

S47) Aus dem Intervall [0;6] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2$ keine Wendestellen besitzt?

S48) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kegel mit dem Radius r und der Höhe h ein größeres Volumen als die Kugel mit dem Radius r hat!

S49) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass das Volumen der Kugelkalotte (r,h) mehr als das doppelte Kegelvolumen (r,h) fasst.

S50) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kegel mit dem Radius r und der Höhe h einen größeren Oberflächeninhalt als die Kugel mit dem Radius r aufweist und nimm überdies Stellung zu Schokos Resultat $p=\frac{3}{17}$!

§5. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Integralrechnung (Aufgaben S51 bis S57)

8D(Rg), 2009/10

S51) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kegel mit dem Radius r und der Höhe h einen größeren Oberflächeninhalt als die Halbkugel mit dem Radius r aufweist. Nimm ferner Stellung zu Windinators Resultat $p = \frac{13}{45}$!

S52) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt. Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Kegel mit dem Radius r und der Höhe h einen größeren Mantelflächeninhalt als die Kugel mit dem Radius r aufweist und nimm überdies Stellung zu Womanizers Resultat $p = \frac{4}{31}$!

S53) Aus dem Intervall [0;t], t>0, werden zwei Zufallszahlen h und r gewählt.
Berechne die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass der Mantelflächeninhalt der Kugelkalotte (r,h) kleiner als der Mantelflächeninhalt des entsprechenden Kegels ist!

S54) Aus dem Intervall [–2,4 ; 2,4] werden zwei Zufallszahlen gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die Hyperbel hyp [hyp: $xy = 1$] und die Gerade g [g: $y = kx + d$] zwei Schnittpunkte aufweisen?

S55) Aus dem Intervall [–36 ; 36] werden zwei Zufallszahlen gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die Hyperbel hyp [hyp: $xy = 1$] und die Gerade g [g: $y = kx + d$] zwei Schnittpunkte aufweisen?

S56) Aus dem Intervall [–12;12] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die Polynomfunktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung keine Extremstellen besitzt? Begründe ferner, warum der Parameter c auf p keinerlei Einfluss ausübt!

$$\boxed{y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c}$$

S57) Aus dem Intervall [–0,9 ; 0,9] werden zwei Zufallszahlen a und b gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass die Polynomfunktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung keine Extremstellen besitzt? Begründe ferner, warum der Parameter c auf p keinerlei Einfluss ausübt!

$$\boxed{y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c}$$

Lösungen der Aufgaben zu §5 (Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Integralrechnung)

Lsg. von S36): $p = \frac{1}{6}$	Lsg. von S37): $p = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$
Lsg. von S38): a) $p = \frac{8}{9}$	Lsg. von S39): $p = \frac{2}{3}$
Lsg. von S40): $p = \frac{1}{12}$	Lsg. von S41): $p = \frac{5}{8}$
Lsg. von S42): $p = \frac{1}{3}$	Lsg. von S43): $p = \frac{1}{3}$
Lsg. von S44): $p = \frac{5}{6}$	Lsg. von S45): $p = \frac{3}{16}$
Lsg. von S46): $p = \frac{4}{9}$	Lsg. von S47): $p = \frac{4}{9}$
Lsg. von S48): $p = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$	Lsg. von S49): $p = \frac{1}{4} = 25\%$
Lsg. von S50): $p = \frac{\sqrt{2}}{8}$	Lsg. von S51): $p = \frac{\sqrt{3}}{6}$
Lsg. von S52): $p = \frac{\sqrt{15}}{30}$	Lsg. von S53): $p = \frac{\sqrt{3}}{6}$
Lsg. von S54): $p = \frac{3}{5} = 60\%$	Lsg. von S55): $p = \frac{8}{9}$
Lsg. von S56): $p = \frac{1}{6}$	Lsg. von S57): $p = 45\%$

Wien, im November 2009. Dr. Robert Resel, e. h.