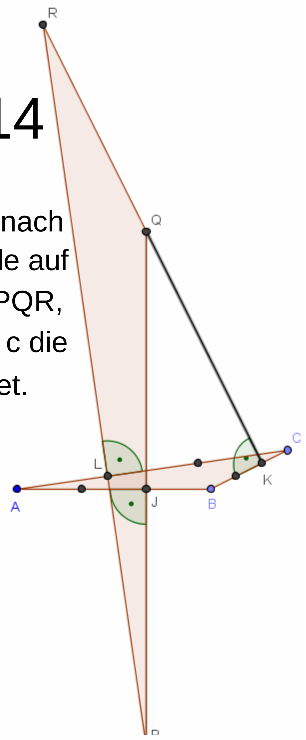
Weitere Übungen für die Klausurarbeit aus Mathematik der 8Bg, 2013/14

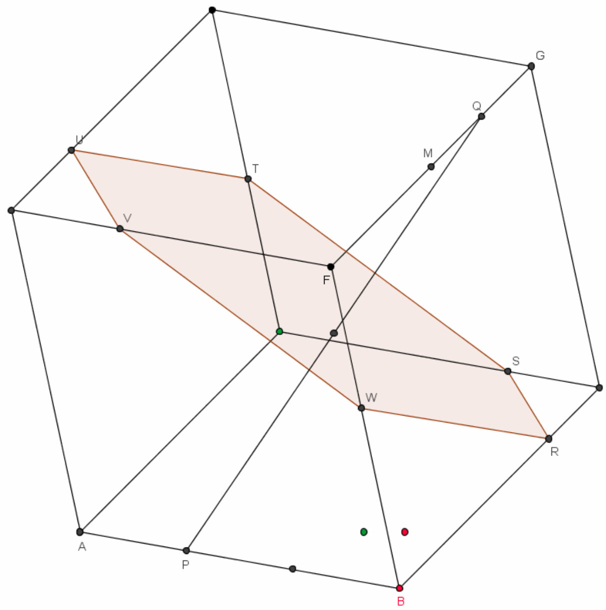


1) Werden die Seiten eines Dreiecks in drei gleich lange Teile geteilt und hernach durch entsprechende Teilungspunkte (J, K und L in der Abbildung) Normale auf die jeweilige Seite gelegt, so erzeugen diese drei Normalen ein Dreieck ΔPQR, für dessen Flächeninhalt μ' die untenstehende Formel gilt, wobei a, b und c die Seitenlängen des Dreiecks ΔABC sowie μ dessen Flächeninhalt bezeichnet. Verifiziere diese Formel für das Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(15|0), C(21|3)]$!

$$\boxed{\mu' = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{12}\right)^2}$$

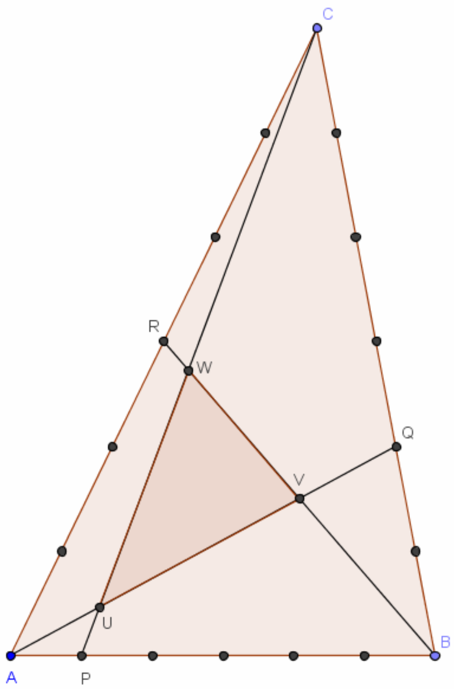
2) Der unmittelbar rechts abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 1728 auf. P entsteht durch Kantendrittelung, M ist der Mittelpunkt der Kante FG, Q der Mittelpunkt der Strecke MG. Zeige, dass die Symmetrieebene der Strecke PQ sechs der zwölf Würfelkanten schneidet, berechne in einem passenden Koordinatensystem die Lage der Eckpunkte R, S, T, U V und W des Schnittsechsecks sowie dessen Flächeninhalt.

Lösung: 3860394

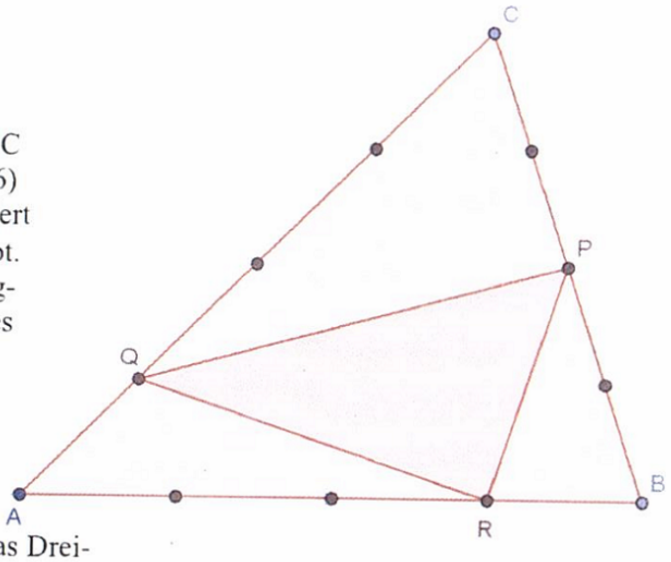


3) Im unmittelbar rechts abgebildeten Dreieck ΔABC wurde jede Seite in sechs gleich lange Teile geteilt, woraus das Dreieck ΔUVW hervorgeht. Verifiziere am Dreieck $\Delta ABC[A(0|0), B(216|0), C(36|1716)]$, dass das Dreieck ΔUVW ca. 1/7 des Dreiecks ΔABC einnimmt, gib auch den exakten Bruchteil b an und begründe ohne TR, dass die Differenz zwischen b und 1/7 zwischen einem und zwei Promille liegt!
Achtung: Abbildung nicht maßstabsgetreu!!

Lösung: 81/572



4) In der oberen rechten Figur ist das Dreieck ΔABC mit den Eckpunkten $A(0|0)$, $B(64|0)$ und $C(36|36)$ abgebildet, aus dem sich wie in der Figur illustriert durch Kantenviertelung das Dreieck ΔPQR ergibt. Kontrolliere am vorliegenden Beispiel die Gültigkeit des Satzes, demzufolge der Flächeninhalt des Dreiecks ΔPQR exakt $\frac{5}{16}$ des Flächeninhalts des Dreiecks ΔABC beträgt.

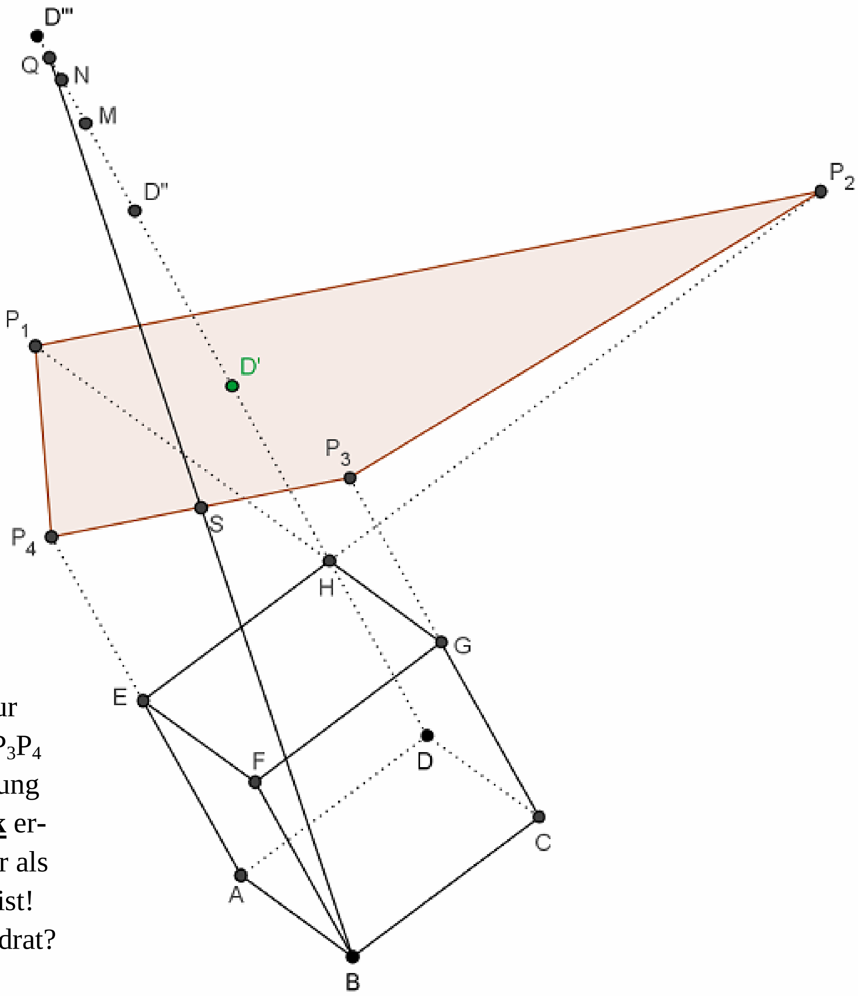


5) Fortsetzung von Aufgabe 4):

a) Ändere die x-Koordinate von B derart, dass das Dreieck ΔPQR rechtwinklig mit der Hypotenuse PQ wird!

b) Verifiziere am konkreten Beispiel, dass ΔPQR genau dann rechtwinklig mit der Hypotenuse PQ ist, wenn für die Seitenlängen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Gleichung $7a^2 = 3b^2+c^2$ gilt!

6) In nebenstehender Figur ist ein Würfel ABCDEFGH der Seitenlänge 128 abgebildet. D´ ist der Spiegelpunkt von D an H, D´´ jener von H an D´ sowie D´´´ jener von D´ nach D´´. M ist der Mittelpunkt der Strecke D´´D´´´, N jener von MD´´´ sowie Q jener von ND´´´.
σ bezeichnet die Symmetrieebene der Strecke BQ. Wie sich zeigen lässt, schneidet σ nur die Verlängerungen der Würfelkanten, nicht aber die Würfelkanten selbst. Konzentrieren wir uns auf die Geraden g_{AE}, g_{CG}, g_{EH} und g_{GH}, so ist zu zeigen, dass als Schnittfigur ein **<u>gleichschenkliges</u>** Trapez $P_1P_2P_3P_4$ entsteht (**<u>was</u>** aufgrund der Verzerrung in der Figur **<u>nicht diesen Eindruck</u>** erweckt), dessen Flächeninhalt größer als der Oberflächeninhalt des Würfels ist! Reicht es für ein siebtes Mantelquadrat?



7) Die Franzosen der 8B haben in einem Projekt [Wow! Es gibt nichts Besseres als ein saftiges Projekt, um Schule einen Sinn zu geben! :-P] die Lebenserwartung von Donaustädtern untersucht, was **<u>"McDonalD´S"</u>** (**<u>M</u>**athe**<u>c</u>**hefin **<u>D</u>**amaris **<u>o</u>**rganisiert **<u>n</u>**euerdings **<u>a</u>**uch **<u>l</u>**eiwande **<u>D</u>**onaustadt-**<u>S</u>**tochastik) zu folgendem mathematischen Modell führte: Die Lebenserwartung von Donaustädtern ist als in Jahrhunderten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ nach der Dichtefunktion φ mit der untenstehenden Funktionsgleichung verteilt. $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{25}\cdot\left(-245x^4 + 270x^3 + 13x\right)}$

a) Berechne die durchschnittliche Lebenserwartung (μ) der Donaustädter in Jahren!

b) Um wie viele Jahre (σ) streut die Lebenserwartung im Schnitt um μ?

c) Bei wie vielen der 23 Schüler der gesamten 8B sollte dem Modell gemäß die Lebenserwartung um maximal σ von μ abweichen?

8) Zeige, dass die Hochpunkte der Kurvenschar mit der Schargleichung $(x+t)\cdot(x-3t)\cdot y=4$ auf der Kubik mit der Gleichung $x^2\cdot y=-1$ liegen.

9) Zeige, dass die Hochpunkte der Kurvenschar mit der Schargleichung $(x-2t)\cdot(x-4t)\cdot y=4$ auf der Kubik mit der Gleichung $x^2\cdot y=-9$ liegen.

10) Aus:

Klausurarbeit aus Mathematik

Klasse 8A (Gymnasium), Haupttermin 2012/13, Prüfer: Dr. Robert Resel

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

Dem Chefmathematiker eines Großkonzerns wurde der Auftrag erteilt, die Beschäftigungsdauer der Mitarbeiter durch ein mathematisches Modell zu beschreiben. Nach ausführlicher Datenanalyse kam er zu dem Schluss, dass die Beschäftigungsdauer als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ergebnisraum $\Omega = [0;4]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{15}{8192}(21x^4 - 112x^3 + 160x^2)$ beschrieben werden kann.

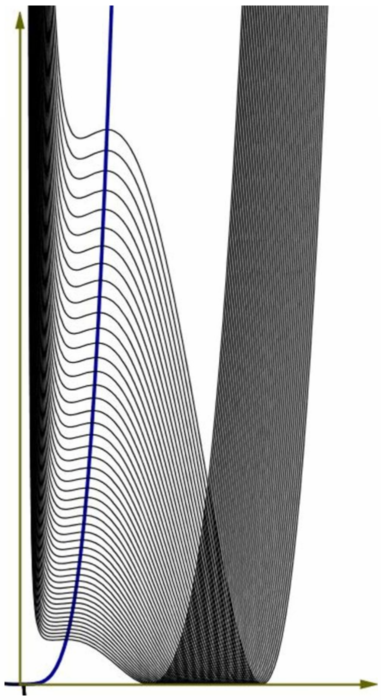
(a) Begründe, warum eine Dichtefunktion vorliegt! **5P**

(b) Berechne die durchschnittliche Beschäftigungsdauer μ in Jahren! **3P**

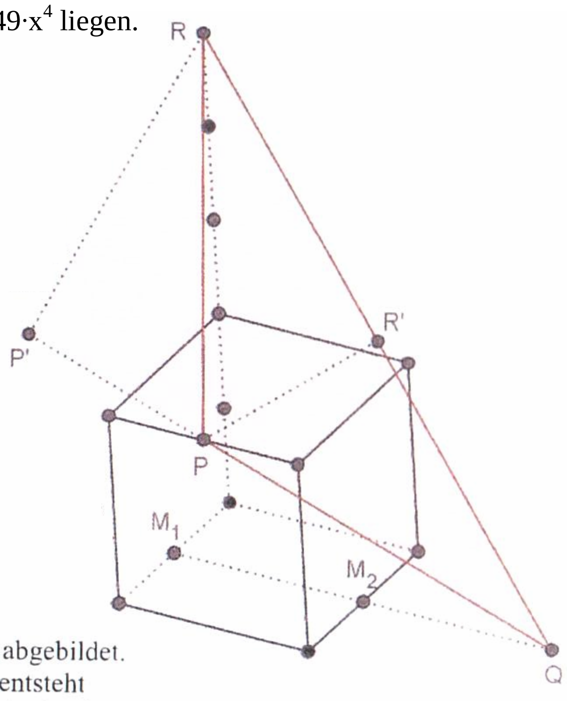
(c) Um wie viele Jahre (σ) streut die Beschäftigungsdauer im Mittel um μ? **4P**

(d) Bei wie vielen von 8192 derzeit beschäftigten Mitarbeitern sollte daher die Beschäftigungsdauer um höchstens σ von μ abweichen? **3P**

11)



Zeige, dass jene Extrempunkte der Kurvenschar mit der Schargleichung $(x-4t)^7\cdot y=8192x^9\cdot(x-100t)^2$, welche den betragsgrößeren Extremstellen entsprechen, die nicht auch Nullstellen sind, auf der Kurve mit der Gleichung $y=59049\cdot x^4$ liegen.



12) In der rechten Figur ist ein Würfel der Kantenlänge 4 abgebildet. M_1, M_2 und P sind Kantenmittelpunkte. Der Punkt Q entsteht durch Spiegelung von M_1 an M_2. Der Punkt R geht durch fortlaufende Kantenhalbierung hervor.

a) Ermittle ohne Taschenrechner das Maß des Winkels $\angle PQR$!

b) Bestimme die Lage jenes Punkts R´ auf g_{QR} derart, dass $\angle QR'P = 90°$ gilt, und zwar unabhängig vom gewählten Koordinatensystem!

c) Wie b), nur mit dem Punkt P´ auf g_{PQ}!

d) Die Ebene ε_{PQR} schneidet offensichtlich eine der zwölf Würfelkanten, und zwar im Punkt P. Wie viele weitere der verbleibenden elf Kanten werden noch von ε_{PQR} geschnitten? Berechne den Flächeninhalt des Schnittpolygons!

Wien, im Mai 2013. Dr. Robert Resel, eh.