Weitere Übungen für die dreistündige Schularbeit der 8Bg, 2013/14

1) Aus: **2. Schularbeit (dreistündig)**

Klasse 8A (Gymnasium), 9. 4. 2013

NACHTRAGSTERMIN FÜR [redacted] ← Datenschutz!

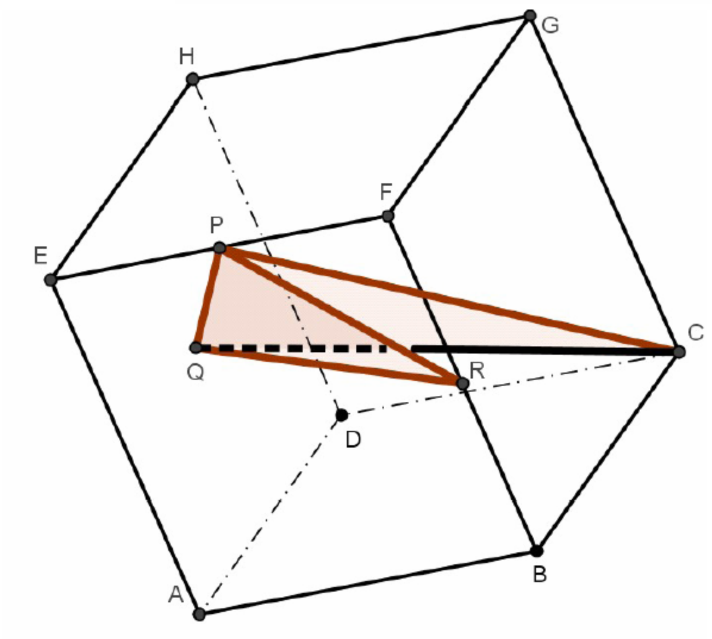
Die linke untere Abbildung zeigt einen Würfel der Seitenlänge 2. Bei P und R handelt es sich um Kantenmittelpunkte, Q ist der Flächenmittelpunkt des Quadrats $ADHE$.

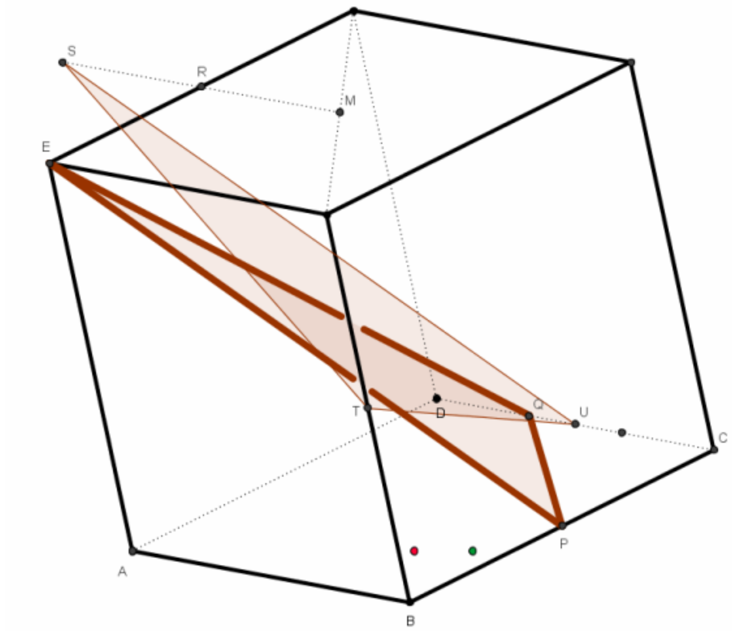
(a) Wähle ein passendes Koordinatensystem und koordinatisiere P, Q und R! **3P**

(b) Zeige, dass die Dreiecke ΔPQR und ΔPQC rechtwinklig sind und gib jeweils die Hypotenuse an! **3P**

(c) Berechne den Schnittwinkel φ zwischen den Dreiecken ΔPQR und ΔPQC! **6P**

(d) Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke ΔPQR und ΔPQC und zeige, dass sie zueinander im Verhältnis des (Co-)Tangens von φ stehen! **2P**





2) Der Würfel in der rechten oberen Abbildung weist eine Kantenlänge von 6 auf. P, und U sind Kantenmittelpunkte, Q entsteht durch Kantendrittelung und ist von D aus betrachtet der erste Teilungspunkt. M ist ein Flächenmittelpunkt und schließlich S der Spiegelpunkt von M an R. Zeige, dass die Ebenen ε_{EPQ} und ε_{STU} zueinander parallel verlaufen und setze die Flächeninhalte der Dreiecke ΔEPQ und ΔSTU in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!
Lösung: Verhältnis F(ΔEPQ): F(ΔSTU)=3:2

3) Aus: **2. Schularbeit (dreistündig)**

Klasse 8A (Gymnasium), 20. 03. 2013

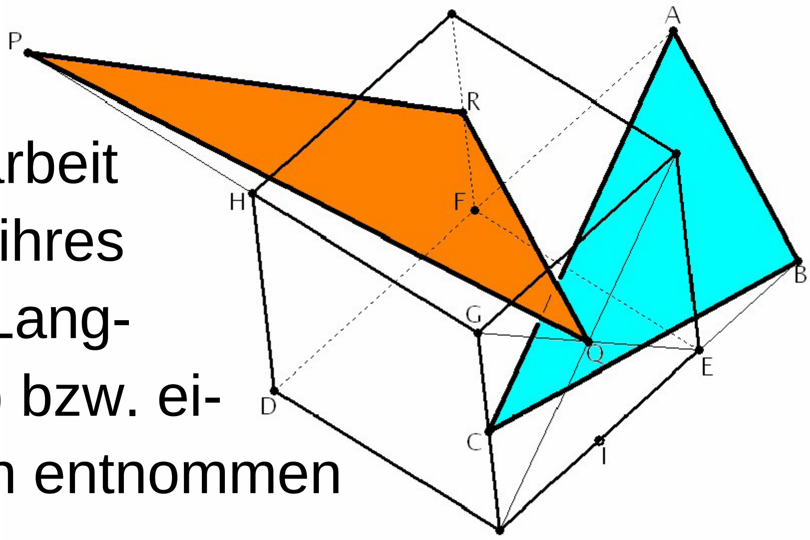
Die untere Abbildung zeigt einen Würfel der Seitenlänge 2. Bei C, I und R handelt es sich um Kantenmittelpunkte, Q ist ein Flächenmittelpunkt. A entsteht durch Spiegelung von D an F, B durch Spiegelung von I an E sowie P durch Spiegelung von G an H.

(a) Wähle ein passendes Koordinatensystem und koordinatisiere A, B, C, P, Q und R! **3P**

(b) Stelle Gleichungen der Ebenen ε_{ABC} und ε_{PQR} auf und begründe, warum sie zueinander parallel verlaufen! **6P**

(c) Setze die Flächeninhalte der Dreiecke ΔABC und ΔPQR in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis! **2P**

Die Aufgaben 4) und 5) sind ebenso der dreistündigen Schularbeit der letztjährigen 8A (ihres Zeichens auch eine Lang-Französisch-Klasse!) bzw. einem Nachtragstermin entnommen



4) "Hello Kitty"-Katzen (HKKen) wie jene in der unteren Abbildung werden bis zu sage und schreibe dreißig Jahre alt! Die stochastisch äußerst firme Veterenärprofessorin Nikki Newhold hat die Lebensdauer von HKKen statistisch analysiert und gelangte zu folgendem Modell: Die in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 3]$ und der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{5}{486}(14x^5 - 63x^4 + 72x^3)$ beschreibt das Alter von HKKen.

(a) Beweise, dass φ wirklich eine Dichtefunktion ist! **5P**

(b) Berechne die durchschnittliche Lebensdauer (μ) in Jahren! **2P**

(c) Um wie viele Jahre (σ) streut diese Lebensdauer im Mittel um μ? **2P**

(d) Bei wie vielen von 128 HKKen weicht daher die Lebensdauer um höchstens σ von μ ab? **3P**

5) Seit der Einführung elektronischer Klassenbücher in vielen Schulen wurde sowohl eine Längs- (über vier Jahre!) als auch Querschnittsuntersuchung (über zwölf Schulstufen hinweg, wobei ingesamt 8192 Schüler beteiligt waren) durchgeführt, welche der Frage nachging, nach welcher Zeitspanne während dieser vier Jahre erstmals eine Klassenbucheintragung erfolgte. Die stochastische Analyse ergab, dass die in Jahren gemessene Zeitspanne bis zur ersten Klassenbucheintragung (BHZ als Kürzel für "Bravheitszeit") als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{2048}(5x^3 - 40x^2 + 152x)$ beschrieben werden kann, wobei jeder dieser 8192 Schüler über mindestens eine Klassenbucheintragung (sic!) verfügt (uns aber nur die erste interessiert!).

(a) Beweise, dass φ wirklich eine Dichtefunktion ist! **5P**

(b) Berechne die durchschnittliche BHZ (μ) in Jahren! **2P**

(c) Um wie viele Jahre (σ) streut die BHZ im Mittel um μ? **3P**

(d) Bei wie vielen Schülern weicht daher die BHZ um höchstens σ von μ ab? **3P**

(e) Wie viele Schüler waren nur ein Jahr lang brav? **2P**

6) Sophie und die anderen Mathematiksüchtigen des F-Teils der 8B („Fans") haben durch empirische Untersuchungen herausgefunden, dass jene Zeitdauer, die ein Schüler ihrer Schule in allen Pausen zusammen (d.h. in insgesamt einer Stunde) der Kommunikation mit Kollegen widmet, als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$ durch die Dichtefunktion φ mit folgender Funktionsgleichung modelliert werden kann:

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{-1}{15} \cdot (6x^2 + 12x - 23)}$$

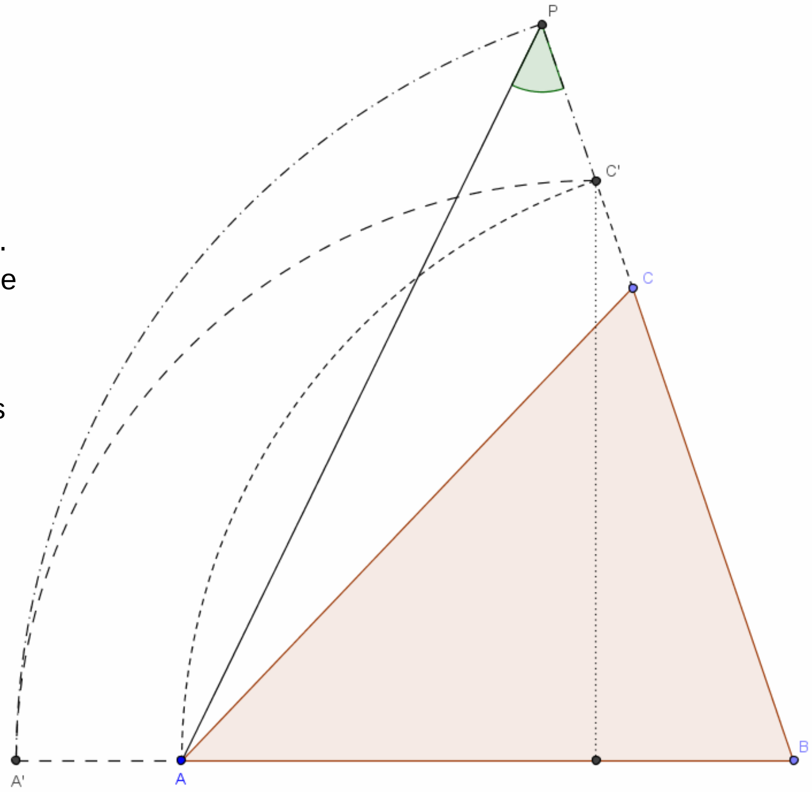
(a) Weise in allen Einzelheiten nach, dass φ in der Tat alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt!

(b) Ermittle die aus den "Fans" Modell resultierende durchschnittliche Gesprächszeit μ auf Minuten genau.

(c) Berechne die Standardabweichung σ von X auf Minuten genau!

(d) Die 5A und die 5B besteht aus insgesamt 51 Schülern. Bei wie vielen dieser Schüler sollte gemäß "Fans" Modell die fürs Plaudern verwendete Zeit um höchstens σ von μ abweichen?

7) Die in nebenstehender Figur abgebildeten "äußeren" Kreisbögen haben B als Mittelpunkt. Der "mittlere" Kreisbogen weist seinen Mittelpunkt in der Normalprojektion von C´ auf AB auf. Ein Satz der Elementargeometrie besagt nun, dass der auf diese Weise generierte Winkel $\sphericalangle APB$ stets 45° misst, was anhand des Dreiecks ΔABC mit den Eckpunkten A(0|0), B(200|0) und C(175|175) durch konkretes Nachrechnen bestätigt werden soll.



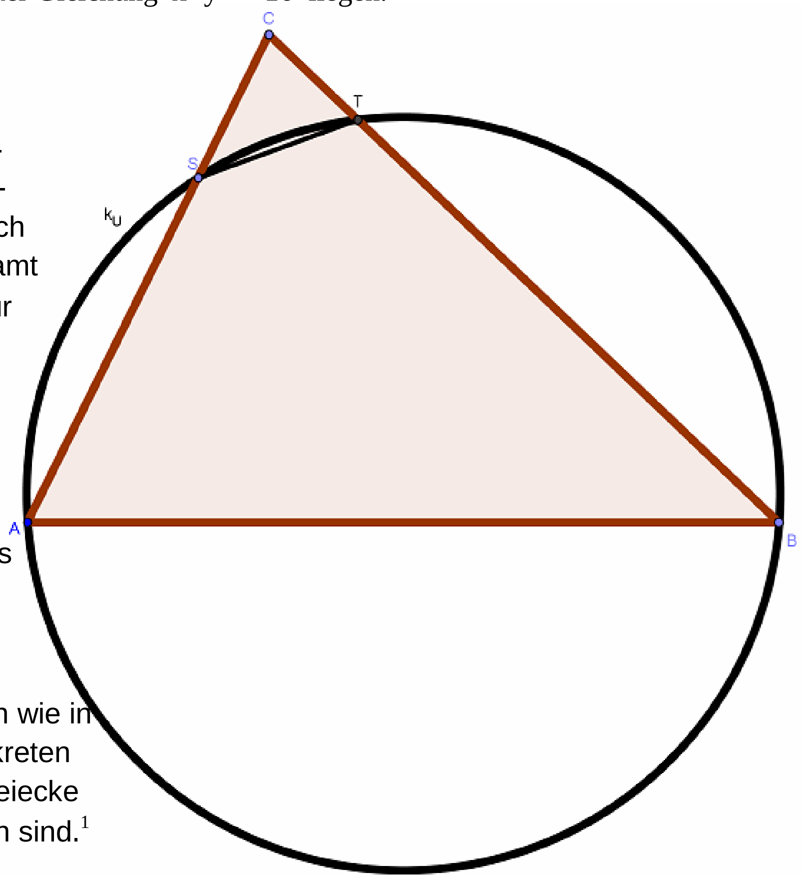
8) Zeige, dass die Extrempunkte der Kurvenschar mit der Schargleichung $(x-t)\cdot(x-4t)^2\cdot y=1$ auf der Quartik mit der Gleichung $x^3\cdot y = 2$ liegen.

9) Zeige, dass die Hochpunkte der Kurvenschar mit der Schargleichung $(x-5t)\cdot(x-2t)^2\cdot y=1$ auf der Quartik mit der Gleichung $x^3\cdot y = -16$ liegen.

10) Legt man durch einen Punkt S der Seite AC eines Dreiecks ΔABC sowie die Eckpunkte A und C den entsprechenden Umkreis k_U, so schneidet dieser die Seite BC neben B auch noch in einem Punkt T, was insgesamt ein neues Dreieck ΔTSC erzeugt, für dessen Flächeninhalt μ' in Relation zum Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔABC die folgende Proportion gilt:

$$\boxed{\mu' : \mu = \overline{SC}^2 : \overline{BC}^2}$$

Verifiziere dies anhand des Dreiecks ΔABC[A(0|0), B(48|0), C(16|32)], und zwar für den Punkt $S(12|y_S)$!



11) Ausgehend von der selben Situation wie in Aufgabe 10) ist nun am selben konkreten Dreieck nachzuweisen, dass die Dreiecke ΔABC und ΔTSC zueinander ähnlich sind.[1]

12) Wie Aufgabe 11) mit den Dreiecken ΔUAS und ΔUTB, wobei $\{U\}=g_{AB} \cap g_{ST}$.

Wien, im Mai 2013. Dr. Robert Resel, eh.

[1]: Für besonders Interessierte (Sophie & co! ☺): Dies lässt sich allgemein recht einfach unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes beweisen, woraus dann fast schon trivialerweise 12) folgt!