

5* zusätzliche Übungsaufgaben für die Mathematik-Klausur der 8D(Rg) im Sommertermin 2010:

- A) "NLOW!"
 Ein Naturgesetz für Womanizer (nature law of womanizers, kurz: NLOW!) besagt, dass ein echter Womanizer spätestens 39 Tage nach einem Erstdate wieder mit einem neuen Erstdate beginnt – es kann aber auch früher (in exotischen Fällen noch während des ursprünglichen Erstdates!) passieren. Amir und Aziz haben empirische Untersuchungen angestellt (brother & friends aus dem "wcds", also womanizer-club donaustadt!) und das folgende stochastische Modell entwickelt: Die in Tagen gemessene Zeitspanne zwischen aufeinanderfolgenden Erstdates ist als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;39]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=600 \cdot 39^{-25} \cdot (39x^{23}-x^{24})$ verteilt.
- Zeige, dass Karim's brothers nicht gefuscht haben und wirklich eine Dichtefunktion vorliegt!
 - Berechne die mittlere Zeitspanne μ zwischen zwei Erstdates, also $E(X)$!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Zeige, dass ziemlich genau die σ -Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=5/7$ gilt!
- B)
 - Begründe (Hinweis: elementare Flächeninhaltsformel für Dreiecke): Besteht zwischen den Seiten eines Dreiecks die Ordnungskette $a < c < b$, dann gilt zwischen den entsprechenden Höhen automatisch die Ordnungskette $h_a > h_c > h_b$.
 - Genauer gilt der folgende Satz:
 Satz. Ist c das harmonische Mittel aus a und b , dann ist h_c das arithmetische Mittel aus h_a und h_b .
 Verifiziere diesen Lehrsatz am Dreieck $\triangle ABC[A(0|0), B(32|0), C(43|\sqrt{455})]$.
 Es ist mit Wurzelausdrücken (und nicht mit Dezimalzahlen, Schoko!!) zu rechnen!
- C) Fortsetzung von Aufgabe A): Karim ist fuchsteufelswild, weil seine brothers ihm mit obigem Modell unterstellen, dass er sich überhaupt nicht zurückhalten kann, was seiner Meinung nach (zumindest im Ausmaß des obig propagierten Modells) nicht stimmt. Also kreiert Karim sein eigenes stochastisches Modell, welches da folgendermaßen aussieht: Die in Tagen gemessene Zeitspanne zwischen aufeinanderfolgenden Erstdates ist als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;76]$ nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=3/219488 \cdot (76x-x^2)$ verteilt.
- Zeige, dass Karim himself nicht gefuscht hat und tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt!
 - Berechne die mittlere Zeitspanne μ zwischen zwei Erstdates, also $E(X)$!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X (Runde auf ganze Tage!).
 - Bei vielen seiner letzten 99(!) Erstdates wich die Zeitspanne bis zum nächsten Erstdate um höchstens σ von μ ab? (Vernachlässigen wir die Tatsache, dass Karim dazu schon Mitte dreißig sein müsste und akzeptieren wir einfach seine Womanizer-Superkräfte, ohne gleich vor lauter Neid zu erblassen!)
- D) ... und noch ein wunderschöner Lehrsatz aus der ebenen Elementargeometrie, alsdann:
 Satz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines Dreiecks $\triangle ABC$ mit den Innenwinkeln α , β und γ sowie F' den Flächeninhalt seines Höhenfußpunktdreiecks, so gilt die Gleichung $F' = 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot F$.
 Verifiziere diesen Lehrsatz anhand des Dreiecks $\triangle ABC[A(0|0), B(140|0), C(120|60)]$!
- E) Zweite (und letzte!) Fortsetzung von Aufgabe A, also Fortsetzung von Aufgabe C:
 Der wcds hält sowohl das Modell von Karims Brüdern als auch jenes vom Womanizer höchstpersönlich für unzutreffend und geht diffiziler vor: Er misst die verstrichene Zeitspanne zwischen aufeinanderfolgenden Erstdates in Stunden und beschreibt diese Größe als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1875]$ und der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\sqrt{3}/93750 \cdot \sqrt{x}$.
- Zeige, dass der wcds nicht gefuscht hat und tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt!
 - Berechne die mittlere Zeitspanne μ zwischen zwei Erstdates, also $E(X)$!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X (Runde auf ganze Stunden!).
 - Bei vielen seiner letzten 58 Erstdates wich die Zeitspanne bis zum nächsten Erstdate um höchstens σ von μ ab?

Lösungen:

A) b) $\mu=36$
c) $\sigma=2$

C) b) $\mu=38$
c) $\sigma\approx 17$
d) 62

E) b) $\mu=1125$
c) $\sigma\approx 491$
d) 35