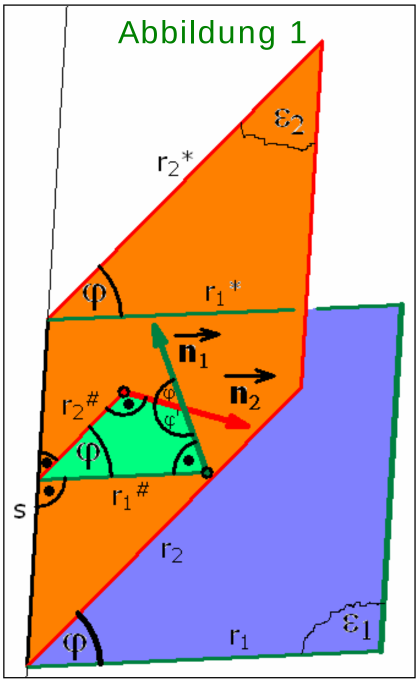
Flächeninhalt eines Dreiecks im Raum – Winkel zwischen zwei Ebenen – Betrag des vektoriellen Produkts



Ausgehend von Abbildung 1 stellen wir uns die Aufgabe, das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen zwei Ebenen ε_1 und ε_2 zu ermitteln, wozu wir lediglich die folgenden Überlegungen durchzuführen haben, die da wären:

- Um den Begriff "Winkelmaß zwischen zwei Ebenen" sinnvoll auf den Begriff "Winkelmaß zwischen zwei Geraden" zurückführen zu können[1], erweist es sich zunächst als nützlich, in einem Punkt der Schnittgerade s der beiden Ebenen je eine Gerade r_1 bzw. r_2 aus ε_1 bzw. ε_2 auszuwählen, welche mit s jeweils <u>den gleichen Winkel</u> einschließt. Dabei wird dieser Winkel selbstverständlich jeweils in ε_1 bzw. ε_2 gemessen! Da je nach Wahl der Richtung auf s somit schon alleine für den spitzen Schnittwinkel φ bereits vier verschiedene Schnittwinkel entstehen würden, führt nur ein Maß <u>für diesen Winkel</u> zum Ziel, nämlich 90°. Denn nur dann ist in jedem auf s liegenden Punkt sowohl die in ε_1 als auch jene in ε_2 gewählte Gerade r_1 bzw. r_2 ("Repräsentantengerade/n") eindeutig. In Abbildung 1 wurde der Deutlichkeit wegen in drei verschiedenen Punkten von s der spitze Schnittwinkel mit Hilfe der jeweiligen Repräsentantengeraden eingezeichnet.

- Im nächsten Schritt konstatieren wir zunächst die scheinbar(!) triviale Eigenschaft, dass s aufgrund der Tatsache, dass es sich bei ihr um die Schnittgerade von ε_1 und ε_2 handelt, sowohl in ε_1 als auch in ε_2 liegt. Dies hat wiederum zur Folge, dass jeder Richtungsvektor von s sowohl ein Stellungsvektor von ε_1 als auch von ε_2 ist, *womit also jeder Richtungsvektor von s sowohl auf jeden Normalvektor* $\vec{n}_1$ *von* $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ *als auch auf jeden Normalvektor* $\vec{n}_2$ *von* $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ *normal steht.*[2]

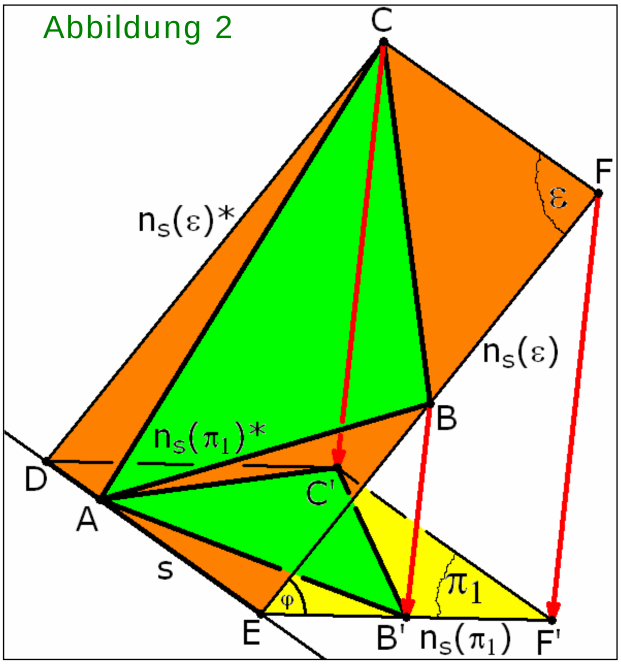
- Außerdem erinnern wir noch einmal an die (auch in Abbildung 1 eingezeichnete) Eigenschaft, dass auch $r_1^{\#}$ und $r_2^{\#}$ auf s normal stehen, womit also ...

- ... insgesamt jeder Richtungsvektor von $r_1^{\#}$ und $r_2^{\#}$ als auch jeder Normalvektor $\vec{n}_1$ von ε_1 sowie jeder Normalvektor $\vec{n}_2$ von ε_2 auf s normal steht und somit diese vier Vektoren eine (Normal-)Ebene (auf s) aufspannen, von der in Abbildung 1 ein türkis gefärbter Teil in Form eines Vierecks mit zwei rechten Winkeln eingezeichnet ist.[3]

- Da die Summe der Innenwinkel in jedem Viereck 360° ergibt, muss somit $\varphi+\varphi'=180°$ gelten, woraus schließlich folgt, dass ε_1 und ε_2 aufgrund der oben vereinbarten Rückführung des Begriffs "Winkelmaß zwischen zwei Ebenen" auf den Begriff "Winkelmaß zwischen zwei Geraden" die gleichen Winkel φ und φ' einschließen als zwei Normalvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ von ε_1 und ε_2.

- Fassen wir dieser Erkenntnis in folgender Definition[4] zusammen:
  DEFINITION. Sind $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ Normalvektoren zweier Ebenen $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ und $\boldsymbol{\varepsilon_2}$, so versteht man unter den Schnittwinkeln von $\boldsymbol{\varepsilon_1}$ und $\boldsymbol{\varepsilon_2}$ die Winkel $\boldsymbol{\varphi=\sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}$ sowie $\boldsymbol{\varphi'=180°-\varphi}$.

Ausgehend von Abbildung 2 stellen wir uns nun die Aufgabe, den Flächeninhalt eines Dreiecks *im Raum* zu berechnen. *Damit* ist gemeint, dass das Dreieck in den $\mathbb{R}^3$ "eingebettet" ist, also seine drei Eckpunkte jeweils durch drei Koordinaten lokalisiert werden. Da sich der Flächeninhalt nicht ändert, wenn wir das Dreieck derart verschieben, dass ein Eckpunkt (in der Abbildung: A) auf der Schnittgerade s der Trägerebene ε des Dreiecks mit π_1 (xy- oder Grundrissebene) zu liegen kommt[5], können wir somit unser Hauptaugenmerk auf die Situation in Abbildung 2 legen, wozu wir diese analysieren:



- Die natürlich in ε liegenden Normalen $n_s(\varepsilon)$ und $n_s(\varepsilon)^*$ auf s durch die Eckpunkte B und C des nunmehr verschobenen Dreiecks ΔABC sowie die Parallele zu s durch C begrenzen zusammen mit s ein Rechteck DEFC.
- Mit Hilfe dieses Rechtecks kann der Flächeninhalt $\boldsymbol{A}_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ΔABC wie folgt berechnet werden: $\boldsymbol{A}_{\Delta ABC} = \boldsymbol{A}_{DEFC} - \boxed{(\boldsymbol{A}_{\Delta AEB} + \boldsymbol{A}_{\Delta BFC} + \boldsymbol{A}_{\Delta CDA})}$ (*)
- Die Breitseiten DE und FC bzw. die Längsseiten EF und DC verlaufen parallel zu s und somit auch zu π_1 bzw. normal zu s, was auch für die Katheten aller drei in obiger Klammer auftauchender Dreiecke gilt. Da zum Beispiel[6] $\overline{EB'} : \overline{EB} = \cos\varphi$ gilt, verzerren sich somit die Grundrisse aller in ε liegenden und zu s normalen Strecken mit dem Faktor $\cos\varphi$ sowie alle parallel zu s und somit auch zu π_1 liegenden Strecken aus ε überhaupt nicht (also mit dem Faktor 1).
- Nun läßt sich aber jedes in ε liegende Vieleck in Dreiecke zerlegen[7] und der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke läßt sich wie oben in (*) berechnen, woraus sich folgender Satz ergibt[8]: SATZ ("Flächenprojektionssatz"): Bezeichnet F_1 den Flächeninhalt eines in einer Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ liegenden Vielecks sowie F_2 den Flächeninhalt der Normalprojektion dieses Vielecks in eine Ebene $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, so gilt $F_2 = F_1 \cdot \cos\boldsymbol{\varphi}$, wobei $\boldsymbol{\varphi}$ den spitzen Schnittwinkel zwischen $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ bezeichnet.
- Jetzt wenden wir den Flächenprojektionssatz auf Abbildung 2 an, wozu wir zunächst von den Vektoren $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ ausgehen und dann zu deren Grundrissen übergehen: $\overrightarrow{AB'} = \vec{v}_1{}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC'} = \vec{v}_2{}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

  Entsprechend bezeichnen wir mit F bzw. F' den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC bzw. $\Delta AB'C'$. Für F' erhalten wir $F' = \frac{1}{2} \cdot \left|\det\left(\vec{v}_1{}', \vec{v}_2{}'\right)\right| = \frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ (**).
- Um den Cosinus des spitzen Schnittwinkels φ zwischen der Ebene ε durch die Punkte A, B und C und π_1 zu berechnen, wenden wir die Definition der letzten Seite an und beachten (**) sowie, dass wir im Zähler der VW-Formel Betragsstriche setzen, um die Positivität des Cosinus und somit die Spitzwinkligkeit des Winkels zu sichern:

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}_\varepsilon \cdot \vec{n}_{\pi_1}\right|}{\left|\vec{n}_\varepsilon\right| \cdot \left|\vec{n}_{\pi_1}\right|}, \vec{n}_\varepsilon = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ -(x_1 z_2 - x_2 z_1) \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}, \vec{n}_{\pi_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{|x_1 y_2 - x_2 y_1|}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right| \cdot 1} = \frac{2F'}{\left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{F'}{\cos\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$ einerseits und wegen $F' = F \cdot \cos\varphi$ $\Rightarrow$ $\frac{F'}{\cos\varphi} = F$ andererseits $\Rightarrow$ $\boxed{F = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right|}$

Fußnoten:

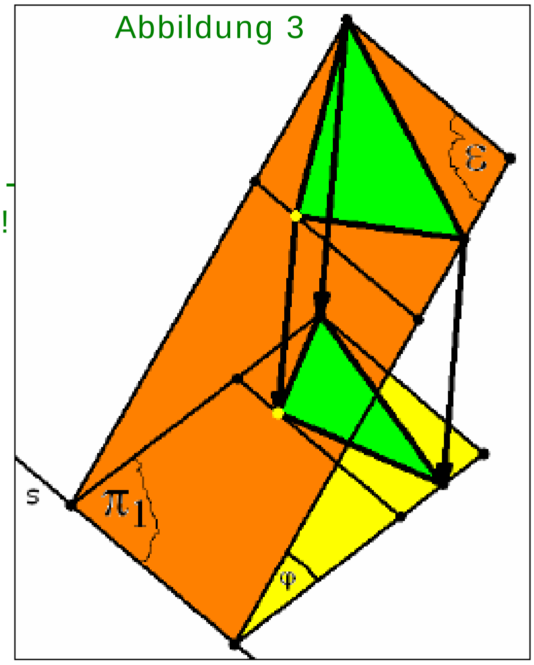


Abbildung 3

____

[1]: Dies stellt einmal mehr eine typische mathematische Denkweise dar, nämlich das Zurückführen einer neuartigen Problemstellung auf eine bereits bekannte (und vor allem schon erfolgreich gelöste) verwandte Problemstellung!

[2]: *Diese zentrale Eigenschaft* wird uns später beim Schnitt zweier Ebenen eine wesentliche Hilfestellung sein, wenn es darum gehen wird, einen Richtungsvektor für die Schnittgerade zweier Ebenen aufzustellen!

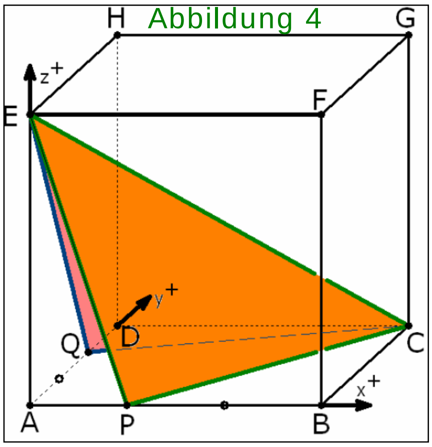
[3]: Dabei liegt zwischen $r_1^{\#}$ und $\overrightarrow{n_1}$ bzw. zwischen $r_2^{\#}$ und $\overrightarrow{n_2}$ deshalb ein rechter Winkel vor, weil ja jeder Richtungsvektor von $r_1^{\#}$ bzw. $r_2^{\#}$ ein Stellungsvektor von ε_1 bzw. ε_2 ist und somit auf $\overrightarrow{n_1}$ bzw. $\overrightarrow{n_2}$ normal steht!

[4]: Es gilt hier zu beachten, dass trotz des Argumentationscharakters einer Herleitung kein Satz, sondern lediglich eine Definition vorliegt, da wir ja *angenommen* bzw. vereinbart haben, das Winkelmaß zwischen zwei Ebenen auf die gerade durch(ge)dachte Art und Weise auf das Winkelmaß zweier Geraden zurückzuführen, also eine Konvention getroffen haben!

[5]: Nota bene: Ohne die (nicht unbedingt notwendige) Verschiebung ergäbe sich eine Anordnung wie in Abbildung 3, welche den Grad der Anschauung gegenüber Abbildung 1 wohl eher weniger erhöht.

[6]: Selbiges gilt natürlich auch für die Quotienten $\overline{DC'}:\overline{DC}$ sowie $\overline{B'F'}:\overline{BF}$!

[7]: Diesen Vorgang bezeichnet man in der angewandten Geometrie (→ Geodäsie) als Triangulierung, wie es auch sehr schön in Daniel Kehlmanns Roman "Die Vermessung der Welt" beschrieben wird, wo niemand Geringerer als der große C.F. GAUSS (1777-1855) weite Teile Deutschlands vermisst.



BEISPIEL zur Anwendung:

In Abbildung 4 ist ein Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 3 zusammen mit zwei Dreiecken ΔPCE und ΔQCE illustriert, wobei die Eckpunkte P und Q durch Kantendrittelung entstanden sind.

Berechne das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen den Trägerebenen der beiden Dreiecke!

Lösung: ε_1 ... Ebene durch P(1|0|0), C(3|3|0) und E
ε_2 ... Ebene durch Q(0|2|0), C und E(0|0|3)

$$\overrightarrow{CE}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{CP}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\right|}=\frac{|-3-6+2|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=60^\circ$$