Weitere Übungen zur ebenen analytischen Geometrie für die dreistündige Schularbeit

8D(Rg), 2009/10

1) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt für den $\boxed{\text{geralmten Term } T(z)}$ $\boxed{T(z)=z^3-2sz^2+(s^2+\rho^2+4\rho r)z-4s\rho r}$ die Gleichungskette $\boxed{T(a)=T(b)=T(c)=0}$. Bestätige diesen Lehrsatz für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(168|0), C(120|90)].

2) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt stets die $\boxed{\text{schöne geralmte Gleichung}}$ $\boxed{a^2+b^2+c^2=2(s^2-\rho^2-4\rho r)}$. Bestätige dies für das Dreieck ΔABC[A(–10|8), B(14|0), C(20|18)]!

3) Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks, s sein halber Umfang sowie ρ bzw. r sein In- bzw. Umkreisradius, so gilt stets die $\boxed{\text{schöne geralmte Gleichung}}$ $\boxed{a^3+b^3+c^3=2s(s^2-3\rho^2-6\rho r)}$. Bestätige dies für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(112|0), C(40|96)]!

4) Ist s der halbe Umfang eines Dreiecks mit dem Höhenschnittpunkt H, dem Umkreismittelpunkt U sowie dem In- bzw. Umkreisradius ρ bzw. r, so gilt stets die $\boxed{\text{schöne geralmte Gleichung}}$ $\boxed{\overline{HU}^2=9r^2+2\rho^2+8\rho r-2s^2}$. Bestätige dies für das Dreieck ΔABC[A(0|0), B(168|0), C(120|64)]!

Lösungen dazu:

1) U(84|13), r=85, I(108|36), ρ=36 (sic!), $z^3-420z^2+57636z-42570400=0$
2) U(5|13)=M_{AC}, r=5√10, I(108|36), ρ=2√10, s=12√10
3) U(56|33), r=65, I(48|32), ρ=32 (sic!), s=168
4) U(84|–13), r=85, I(112|28), ρ=28 (sic!), s=192, H(120|90)

5) Im rechtwinkligen Dreieck ΔABC ist D der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse AB. E ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ACB$ mit der Hypotenuse, P ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle BDC$ mit der Kathete BC und Q ist der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des Winkels $\angle CDA$ mit der Kathete AC. Beweise, dass das Viereck $EPCQ$ ein Quadrat ist.
Die Richtigkeit dieser besonders schönen Mathematikolympiadeaufgabe soll lediglich am konkreten Beispiel des Dreiecks ΔABC[A(525|0), B(0|700), C(0|0)] verifiziert werden!

Lsg.: *E(300/300),* D(336|252), P(0|300), Q(300|0)

6) w_α bezeichne die Winkelsymmetrale des Winkels $\alpha = \angle BAC$ eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC mit der Hypotenuse AB. Ferner sei D bzw. E der Schnittpunkt von w_α mit der Kathete BC bzw. dem Umkreis des Dreiecks. Dann gilt stets $\boxed{\overline{AD}\cdot\overline{AE} = \overline{AB}\cdot\overline{AC}}$ (*).

Dies soll nun am konkreten Beispiel des Dreiecks $\Delta ABC[A(6|0), B(0|8), C(0|0)]$ schrittweise verifiziert werden:

- Berechne die Koordinaten von D!
- Zeige, dass der Punkt $E(-2|4)$ sowohl auf w_α als auch auf dem Umkreis liegt!
- Verifiziere die Produktgleichung (*)!

Lösung: D(0|3)

7) Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ACB = 90°$. Die Winkelsymmetralen der Winkel BAC bzw. ABC schneidet BC im Punkt P bzw. AC im Punkt Q. Es seien M bzw. N die Fußpunkte der Normalen durch P bzw. Q auf die Seite AB. Bestimme den Winkel MCN!

Es kommt zwar nicht auf die Proportionen des in Rede stehenden rechtwinkligen Dreiecks an (d.h. der gesuchte Winkel hat für alle rechtwinkligen Dreiecke das gleiche Maß!), dennoch soll es hier genügen, das Maß des gesuchten Winkels am konkreten Beispiel des Dreieck $\Delta ABC[A(120|0), B(0|90), C(0|0)]$ zu berechnen. Dafür ist aber darüber hinaus zusätzlich noch zu verifizieren, dass g_{CM} bzw. g_{CN} auf die Winkelsymmetrale von BAC bzw. ABC normal steht!

Lösung: P(0|40), Q(45|0), M(24|72), N(72|36)

8) Für jedes Dreieck gilt folgender

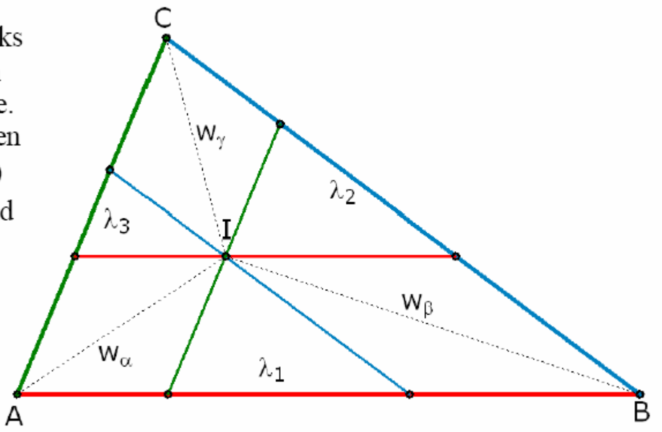
Satz. Der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ist auch der Inkreismittelpunkt jenes Dreiecks, das von den Höhenfußpunkten gebildet wird.

Überprüfe diesen Satz für das Dreieck $\Delta ABC[A(125|-50), B(-50|125), C(-50|-75)]$!

9) *Ist P der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale w_α eines Dreiecks ΔABC mit der Seite BC, I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks sowie (wie üblich)* $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ sowie $c = \overline{AB}$, *dann gilt* $\overline{IP} = \dfrac{2abc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{(a+b+c)\cdot(b+c)}$. *Verifiziere dies für das konkrete $\Delta ABC[A(0/0), B(252/0), C(72/135)]$!*

10) Für den Abstand d des Inkreismittelpunkts I eines Dreiecks ΔABC vom Eckpunkt C gilt (unter Verwendung der üblichen Beschriftungen $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$) die allgemeingültige Formel $d = \sqrt{ab - \frac{2abc}{a+b+c}}$. Überprüfe dies anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(42|0), C(12|16)]$!

11) Legt man durch den Inkreismittelpunkt eines Dreiecks ΔABC Parallele zu den Dreieckseiten, so unterteilen diese das Dreieck in drei Rauten sowie drei Dreiecke. Für die auf den Seiten des Ausgangsdreieck liegenden Seitenlängen λ_1, λ_2 und λ_3 (siehe Abbildung rechts!) gilt dann (wobei – wie üblich – $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Seitenlängen des Dreiecks bezeichnet) die Summenformel $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}}$. Verifiziere diese Formel anhand des konkreten Dreiecks $\Delta ABC[A(0|0), B(1134|0), C(270|648)]$!



12) – ...): *Übungsaufgaben für die 4. Schularbeit aus der 5D (Frühling 2007)!*