

Übungen sowohl für die 3. Schularbeit (dreistündig) ...
... als auch die schriftliche Reifeprüfung (vierstündig) ...
Stochastik: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (21 Aufgaben)
Aufgaben 1 bis 4

1. (a) Zeige, dass $\forall a \in \mathbb{R}$ die durch $\varphi(x) = x^a + x^{\frac{1}{a}}$ definierte Funktion φ Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$ ist.
- (b) Die φ zugeordnete Zufallsvariable X beschreibe die in Stunden gemessene Arbeitszeit bei einer einstündigen Schularbeit (50 Minuten und die darauffolgende zehnminütige Pause). Die durchschnittliche Arbeitszeit ist bekannt, nämlich 34 Minuten und 40 Sekunden. Berechne den zugehörigen Parameter a (Zeige, dass $a = 7$ gilt.)!
- (c) Wie viele von insgesamt 32 Schülern einer großen Klasse sollten gemäß dem Modell den Erwartungswert unterschreiten?
- (d) Bei wie vielen von 47 Schülern eines Jahrgangs sollte die Arbeitszeit höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen?

2. Wenn man in Hirschstetten beim Andreaskreuz wieder einmal durch den heruntergefahrenen Bahnschranken am Weiterfahren gehindert wird und sich aufgrund einer lange (angekündigten!) Versubkolonne die Pause über ganze fünf Minuten erstreckt, läßt sich bei den wartenden Autofahrern so einiges beobachten. Der Hirschstettener Aborigine T. Steiner hat nun statistisch jene (von ihm in Minuten gemessene) Zufallsvariable untersucht, welche jene Zeitdauer angibt, die ein wartender Autofahrer seinem Handy widmet (sei es, um zu spielen, zu smsen oder eben zu telefonieren). Die Quintessenz seiner empirischen Forschungen führte ihn zur via $\varphi(x) = \frac{42}{2940625} \cdot x^4 \cdot (5 - x) \cdot (38 - x)$ definierten Dichtefunktion mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 5]$.
 - (a) Überprüfe zunächst, dass es sich bei Steiners φ tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
 - (b) Berechne die durchschnittliche Handynutzungszeit μ auf Sekunden genau!
 - (c) Zeige, dass die zugehörige Standardabweichung σ ziemlich genau 0,8 beträgt!
 - (d) Bei wie vielen von 68 Autofahrern sollte die Handynutzungszeit um maximal σ von μ abweichen?

3. "Was Steiner kann, schaffe ich auch!", denkt sich Karim und führt eine entsprechende Studie in Womanizerwiesen durch (um zu zeigen, dass er nicht nur ein bzw. **DER** Womanizer ist), was ihn seinerseits zur via $\varphi(x) = \frac{168}{9765625} \cdot x^5 \cdot (5 - x) \cdot (35 - x)$ definierten Dichtefunktion mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 5]$ führt.
 - (a) Überprüfe zunächst, dass es sich bei Karims φ tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
 - (b) Berechne die durchschnittliche Handynutzungszeit μ auf Sekunden genau!
 - (c) Zeige, dass die zugehörige Standardabweichung σ ziemlich genau $\frac{8}{11}$ beträgt!
 - (d) Bei wie vielen von 154 Autofahrern sollte die Handynutzungszeit um maximal σ von μ abweichen?

4. Kriss-Kross Chabros hat durch empirische Untersuchungen herausgefunden, dass jene Zeitdauer, die ein Schüler seiner Schule in seiner 45-Minuten-Pause zwischen Vormittags- und nachmittagsunterricht der Kommunikation mit Kollegen widmet, als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 45]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{8}{45^8} \cdot x^3 \cdot (45^4 - x^4)$ modelliert werden kann:

- (a) Weise nach, dass φ in der Tat alle Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt! **Führe dies durch geschicktes Herausheben und der Beibehaltung der Potenzen von 45 so weit als möglich ohne Taschenrechner aus!**
- (b) Ermittle die aus Chabros Modell resultierende durchschnittliche Gesprächszeit μ , und zwar **ebenso wie in (a)!**.
- (c) Berechne die Standardabweichung σ von X ! Bei wie vielen von 963 Schülern einer (mittel)großen Schule sollte die Gesprächszeit daher um höchstens σ von μ abweichen?
- (d) Wie viele von 65 Schülern aus insgesamt drei Klassen sollten nach Chabros Modell ihren verbalen Interaktionen überdurchschnittlich viel Zeit [gemessen am in (b) berechneten Wert] widmen?

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Dezember 2009.

Dr. Robert Resel, e. h.