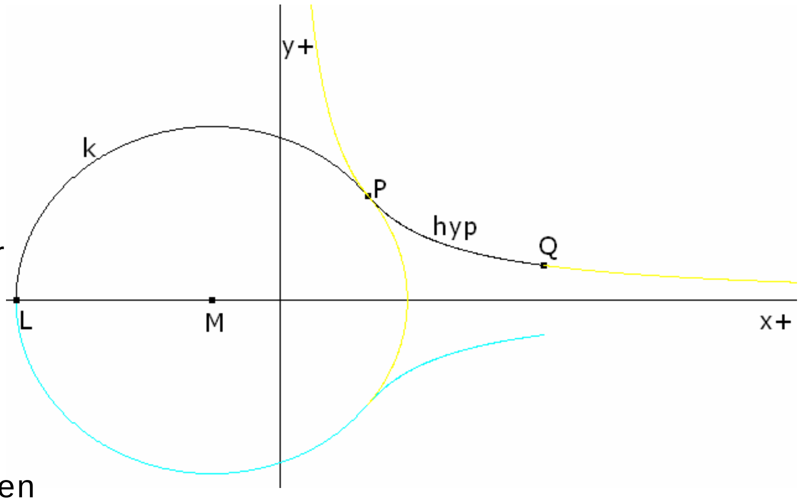
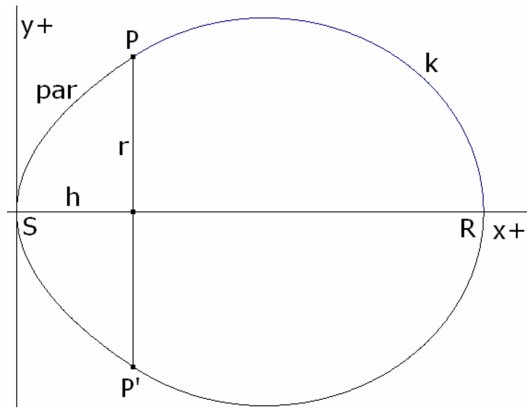
Übungen zum Wiederholungskapitel INTEGRALRECHUNG
(inbesondere Volumsberechungen), Teil 3
8D(Rg)
Februar 2010
(Dr. R. Resel)

7) In nebenstehender Abbildung ist hyp jene gleichseitige Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten, welche durch den Punkt P(9/12) verläuft. k ist jener auf der x-Achse zentrierte Kreis, welcher hyp in P berührt. Rotiert der kürzere Kreisbogen LP sowie der Hyperbelbogen PQ [mit $Q(27/y_Q)$] um die x-Achse, so entsteht ein glühbirnenförmigen Drehkörper, der sich aus einer Kugelkalotte mit dem Volumen V_K und einer spindelförmigen Hyperboloidzone mit dem Volumen V_H zusammensetzt. Berechne das Volumen dieser Glühbirne und kontrolliere, dass $V_K:V_H=12:1$ gilt! (Arbeite notwendigenfalls mit dem Zwischenergebnis M(–7/0), wobei dann die Berührung zwischen k und hyp aber nachzuweisen ist!)



8) Nebenstehend ist der Meridianschnitt eines Drehkörpers zu sehen, welcher durch Rotation eines Parabelbogens SP und eines in P tangentiell anschließenden Kreisbogens PR um die x-Achse entsteht, wobei k auf der Drehachse zentriert ist. Gilt das Verhältnis r:h=3:2, so ergibt sich das Volumen V des gesamten Drehkörpers via $V=4\pi r^2 h$. Rechne dies für (h/r)=(8/12) nach!

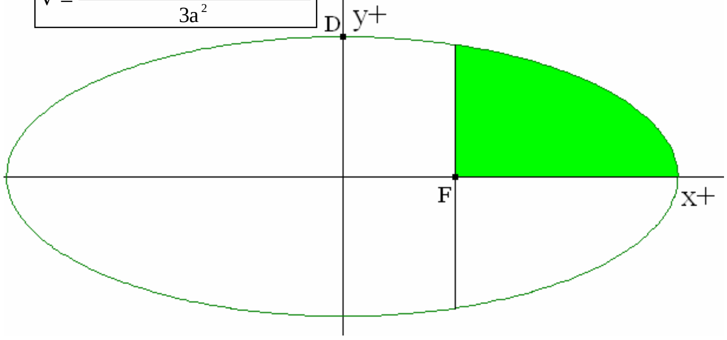


9) **Gegeben sind die Parabel par (par:$y^2 = 32x$) und die Hyperbel hyp (hyp:$xy = 2$).**

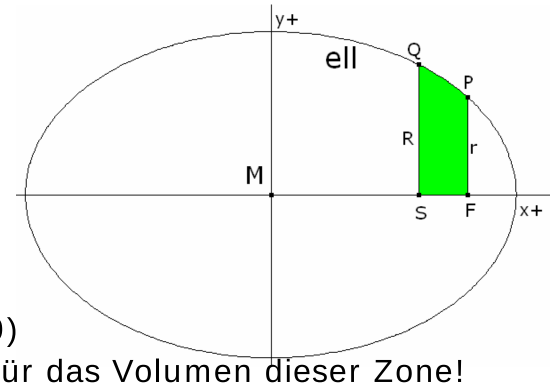
Rotiert das nach rechts offene von hyp und par begrenzte Flächenstück um die x–Achse, so entsteht ein Drehkörper $\mathcal{D}$. Beweise, dass sich die Teilvolumina der Paraboloidkalotte und der unendlichen Hyperboloidspindel wie 1 : 2 verhalten.

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot (a+e) \cdot (2a+e) \cdot (a-e)^3}{3a^2}}$$

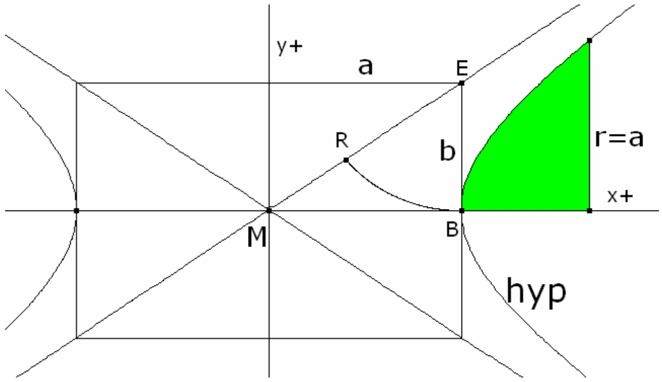
10) Von einer Ellipse ell in erster Hauptlage kennt man den rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) sowie den oberen Nebenscheitel D(0|15). Rotiert der markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine eiförmige Drehellipsoidkalotte. Verifiziere für deren Volumen V die nebenstehende Formel!



11) In nebenstehender Abbildung gilt $\overline{MS} = b$ (halbe Nebenachsenlänge von ell), F ist der rechtsseitige Brennpunkt von ell. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehellipsoidzone der Höhe h mit dem Basiskreisradius r und dem Deckkreisradius R. Verifiziere anhand der konkreten Ellipse mit dem Hauptscheitel B(25|0) und dem rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) die allgemeingültige Volumsformel $V = \frac{h\pi}{3} \cdot \left(2b^2 - rR\right)$ für das Volumen dieser Zone!



12) In nebenstehender Abbildung ist RB ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt E. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehhyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius r=a. Verifiziere anhand der konkreten Hyperbel mit dem Hauptscheitel B(12|0) und dem rechtsseitigen Brennpunkt F(15|0) die allgemeingültige Formel $V = \frac{\pi}{3} \cdot \overline{MR}^2 \cdot \left(h + 3r\right)$ für das Volumen V dieser Drehhyperboloidkalotte!



13) In nebenstehender Abbildung ist F der rechtsseitige Brennpunkt von hyp. Rotiert der grün markierte Bereich um die x-Achse, so entsteht eine Drehhyperboloidkalotte der Höhe h mit dem Basiskreisradius r. Verifiziere anhand der konkreten Hyperbel mit der Asymptotengleichung as : 4y = 3x sowie dem rechtsseitigen Brennpunkt F(20|0) die allgemeingültige Formel $V = \frac{h^2\pi}{3} \cdot \left(3r - k^2h\right)$ für das Volumen V dieser Drehhyperboloidkalotte, worin k die Steigung von as bezeichnet.