

- 6) Die Funktion $\varphi(x) = \frac{66}{25} \cdot (39x^{10} - 65x^9 + 30x^8)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$, welche die Lebenserwartung von Barneys in Jahrhunderten misst.
- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
 - Wie alt (μ) wird ein Barney durchschnittlich?
 - Um wie viel Jahre (σ) streut das Todesalter eines Barneys durchschnittlich um μ ?
 - Zeige, dass bei ziemlich genau $\frac{6}{7}$ aller Barneys das Todesalter um höchstens σ von μ abweicht.
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Barney vor seinem 50. Geburtstag stirbt?



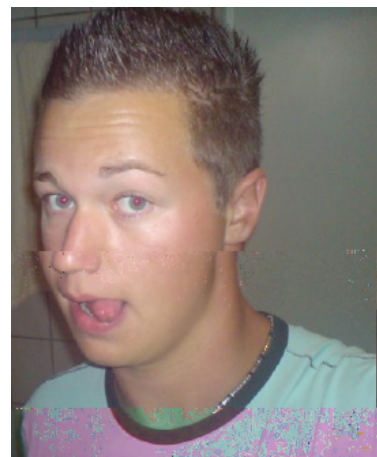
- 7) Bei den ersten [einstündigen (sic!)] Französisch-Schularbeiten der "Langfranzosen" in der dritten Klasse sind teils sehr viele reine Grammatikübungen enthalten, wodurch manch äußerst sprachbegabter Schüler oft schon sehr früh fertig war. Dies wurde nun statistisch untersucht und brachte das folgende stochastische Modell hervor: Die in Stunden gemessene Arbeitszeit kann als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{4} \cdot (10x^3 - 20x^2 + 11x)$ beschrieben werden.
- Weise nach, dass es sich bei φ in der Tat um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion handelt!
 - Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ bei einstündigen Französisch-Schularbeiten!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Bei wie vielen von 80 Schülern aus vier Französisch-Gruppen sollte dem Modell gemäß die Arbeitszeit um maximal σ von μ abweichen?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Schüler länger als 12, aber kürzer als 16 Minuten arbeitet?

SW-W, Ulli! ☺ ☺

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

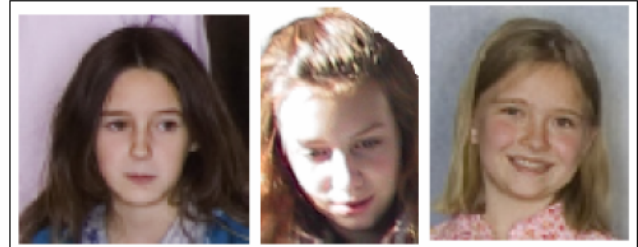
8) **... und wieder einmal eine Übungsaufgabe zur Stochastik aus der 8D(Rg), 2009/10:**

T.\$ neigt neuerdings wie Kuno dazu, zu spät im Unterricht zu erscheinen. Der Hund liegt darin begraben, dass unser Lieblings-Hirschstettener den Wecker für eine Stunde auf Schlummern stellt, was zur Folge hat, dass er manchmal die ganze Stunde ausreizt und dadurch kein Zeitgefühl mehr hat (Noch dazu blödet und trödet er anscheinend im Bad noch eine geraume Zeit herum, wie die nebenstehende Abbildung – Facebook lebe dreimal hoch! ☺ – vermuten lässt!). T.\$s Kumpel Chaos-Chabros hat dieses Phänomen statistisch analysiert und folgendes stochastisches Modell aufgestellt: Jene in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X , welche die Zeit vom ersten Läuten bis zu T.\$s tatsächlicher Erhebung aus den Federn misst, ist nach der Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{5}{6} \cdot x \cdot (x+14) \cdot (x-1)^2$ und dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ verteilt.



- Zeige, dass es sich bei φ tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt.
- Ermittle T.\$s durchschnittliche Schlummerdauer μ nach dem ersten Weckerläuten. Wann tritt dieser Zeitpunkt in Wiener Ortszeit ein, wenn T.\$ seinen Wecker für gewöhnlich auf 6:43 Hirschstettener Zeit stellt und zu bedenken ist, dass die Hirschstettener ihre Wecker immer um drei Sekunden vorstellen, um nicht wie T.\$ zu spät von zuhause wegzufahren?
- Chaos-Chabros behauptet gemäß seinem Modell, dass die Standardabweichung σ von X (welche natürlich mit dem Satz von \$ berechnet wird – "Eh kloar! ", wie Windi sagen würde) ziemlich genau zwölf Minuten beträgt. Kontrolliere dies und rechne in d) mit Chaos-Chabros gerundetem Wert weiter!
- An wie vielen von 83 Tagen (in etwa das "zweite Semester" der 8D) weicht T.\$s Schlummerdauer nach dem ersten Weckerläuten im höchstens σ von μ ab?
- Von Freitag, den 9. April 2010 (erster Freitag nach den Osterferien) bis zum letzten Schultag aller achten Klassen (Freitag, der 7. Mai 2010) sind es noch ... Schultage (Sehr schwer! ☺). An wie vielen dieser ... Schultage wird sich T.\$ überdurchschnittlich [gemessen am in b) berechneten Durchschnittswert!] verspäten?

- 9) Wie empirische Untersuchungen ergaben, lässt sich das Alter von AHS-Direktoren bei ihrem Dienstantritt als in Dekaden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[4;6]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{3}{20} \cdot (x-4) \cdot (x-6) \cdot (15-2x)$ beschreiben.
- Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt!
 - Berechne das Durchschnittsalter μ eines Direktors bei Dienstantritt!
 - Um wieviel (σ) streut das Antrittsalter im Schnitt um das in b) berechnete Durchschnittsalter?
 - Bei wie vielen von 31 Direktoren weicht das Alter bei Dienstantritt um maximal σ von μ ab?



10) Anna, Anna, Anna und ihre DVD-Player, Teil 2:

Die drei Annas sahen sich bei "Anna Br" (kurz: "ABR(A)") am **Freitag, den 13.** April 2012 auf ABR(A)s $3\frac{1}{2}$ Jahre alten DVD-Player den Film "Anna-Der Film" an. Plötzlich streikte der DVD-Player, was ABR(A) (aber auch "AB(B)A" und "AK(A)") äußerst stutzig machte. In der Gebrauchsanweisung ihres Geräts (Marke *Shiplip* ©) fand ABR(A) überraschenderweise die Information, dass abseits der zweijährigen Garantie die Lebensdauer dieser Geräte als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[2;4]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{3}{32} \cdot (5x^2-30x+38)$ modelliert werden kann.

- Keine der Annas vertraute dieser Gebrauchsanweisung zu 100%, weshalb sie ϕ erst einmal auf ihre typischen Eigenschaften überprüften. Stimme mit den drei Damen ein!
- Welche durchschnittliche Lebensdauer μ ergibt sich? Hatte ABR(A)s DVD-Player dieses Alter schon erreicht?
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- ABR(A)s DVD-Player stammte aus einer 256er-Palette. Bei wie vielen dieser Geräte sollte die Lebensdauer um höchstens σ von μ abweichen? Fiel ABR(A)s Gerät auch in diesen Bereich?
- Wie viele Geräte aus der Palette aus d) werden zwischen 2 und $2\frac{1}{2}$ Jahre alt? (Die Frage, ob ABR(A)s DVD-Player in diesen Bereich fiel, wäre eine Beleidigung euer aller Intelligenz und soll daher an dieser Stelle entfallen! ☺)



- 11) Bei den ersten [einstündigen (sic!)] Latein-Schularbeiten der "Langlateiner" in der dritten Klasse sind teils sehr viele reine Grammatikübungen enthalten, wodurch manch äußerst sprachbegabter Schüler oft schon sehr früh fertig war. Dies wurde nun statistisch untersucht und brachte das folgende stochastische Modell hervor: Die in Stunden gemessene Arbeitszeit kann als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{1}{60} \cdot (-105x^4 + 156x^2 + 29)$ beschrieben werden.
- Weise nach, dass es sich bei ϕ in der Tat um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion handelt!
 - Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ bei einstündigen Latein-Schularbeiten!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Bei wie vielen von 50 Schülern aus zwei Latein-Gruppen sollte dem Modell gemäß die Arbeitszeit um maximal σ von μ abweichen?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Schüler höchstens so lange arbeitet wie die durchschnittliche Arbeitszeit?

- 12) Bei den ersten [einstündigen (sic!)] Italienisch-Schularbeiten in der fünften Klasse sind teils sehr viele reine Grammatikübungen enthalten, wodurch manch äußerst sprachbegabter Schüler oft schon sehr früh fertig war. Dies wurde nun statistisch untersucht und brachte das folgende stochastische Modell hervor: Die in Stunden gemessene Arbeitszeit kann als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{4}{3} \cdot (25x^3 - 30x^2 + 9x)$ beschrieben werden.
- Weise nach, dass es sich bei ϕ in der Tat um eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion handelt!
 - Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ bei einstündigen Italienisch-Schularbeiten!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Bei wie vielen von 29 Schülern aus zwei Italienisch-Gruppen sollte dem Modell gemäß die Arbeitszeit um maximal σ von μ abweichen?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffener Schüler spätestens vier Minuten vor Ablauf der durchschnittlichen Arbeitszeit abgibt?

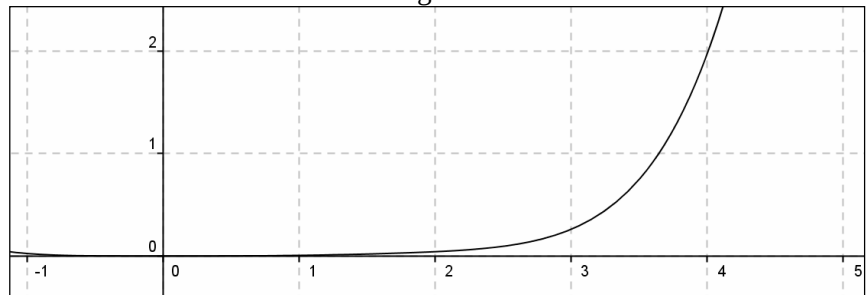
- 13) Gegeben ist die Polynomfunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $y=\phi(x)=\frac{12}{823543} \cdot (8x^5 - 455x^3 + 7546x)$.

a) Zeige, dass ϕ über $\Omega=[0;7]$ Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist.

b) Ermittle den Erwartungswert μ sowie die Standardabweichung σ von X !

c) Nimm Stellung zur

σ -Regel $P(|X-\mu|<\sigma)=\frac{19}{35}$!



- 14) Die rechte obere Abbildung zeigt den Graphen der Funktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{21}{32768} \cdot (3x^6 - 14x^5 + 20x^4)$, welche jene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;4]$ beschreibt, die das Dienstalster von AHS-Professoren bei Beendigung ihrer Lehrtätigkeit (sei es durch Pensionierung oder aus anderen Gründen) in Dekaden angibt.

- Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt und begründe auch die Richtigkeit des Funktionsgraphenverlaufs in der Abbildung ! Welche Rückschlüsse kannst du aus der Abbildung ziehen?
- Berechne die durchschnittliche Beschäftigungsdauer μ österreichischer AHS-Lehrer!
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Bei wie vielen von 15 AHS-Lehrern sollte daher dem Modell gemäß die Beschäftigungsdauer um höchstens σ von μ abweichen?

- 15) Die Funktion $\phi(x)=\frac{1}{15} \cdot (165x^8 - 112x^5 + 46x^2)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$, welche das Lebensalter von Algebranerinnen in Jahrhunderten misst.

- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
- Wie alt (μ) wird eine Algebranerin durchschnittlich?
- Um wie viel Jahre (σ) streut das Lebensalter einer Algebranerin durchschnittlich um μ ?
- Ergänze: ... von 40 Algebranerinnen weisen ein Lebensalter auf, das um höchstens σ von μ abweicht.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Algebranerin älter als 21,5 Jahre wird?

- 16) Bora-Bora-Noras (siehe Abbildung rechts!) pflegen äußerst alt zu werden, was nun auch stochastisch analysiert wurde: Die Funktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x)=\frac{3}{800} \cdot (21593x^{10} - 31845x^8 + 12894x^6)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$, welche die Lebenserwartung von Bora-Bora-Noras in Jahrhunderten misst.

- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
- Wie alt (μ) wird eine Bora-Bora-Nora durchschnittlich?
- Um wie viel Jahre (σ) streut das Todesalter einer Bora-Bora-Nora durchschnittlich um μ ?
- Ergänze: Bei ... von 95 Bora-Bora-Noras weicht das Todesalter um höchstens σ von μ ab.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bora-Bora-Nora älter als 56 Jahre wird?



- 17) Die Pinnie Winpin – Plüschbälle sind äußerst robust und werden deshalb auch (fast! ☺¹) so alt wie Bora-Bora-Noras [vgl. mit Aufgabe 16)!], was mittlerweile ebenso einer eingehenden stochastischen Analyse unterzogen wurde: Die Funktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{2}{19683} \cdot (20x^3 - 135x^2 + 243x)$ ist Dichtefunktion je-
ner stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0;9]$, welche die Lebenserwartung dieser Plüschbälle in Jahren misst.
- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
 - Wie alt (μ) wird ein Plüschball durchschnittlich?
 - Um wie viel Jahre (σ) streut das Todesalter eines Plüschballs durchschnittlich um μ ?
 - Ergänze: Bei ... von 243 Plüschbällen weicht das Todesalter um höchstens σ von μ ab.



18) **Anna, Anna, Anna und ihre DVD-Player, Teil 3:**

Die drei Annas sahen sich bei "Anna K" (kurz: "AK(A)") am **Freitag, den 13.** Juli 2012 auf AK(A)s 2 $\frac{3}{4}$ Jahre alten DVD-Player den Film "Anna & the king" an. Plötzlich streikte der DVD-Player, was AK(A) (aber auch "AB(B)A" und "ABR(A)") äußerst stutzig machte. In der Gebrauchsanweisung ihres Geräts (Marke *Sag Sun M* ☺) fand AK(A) überraschenderweise die Information, dass abseits der zweijährigen Garantie die Lebensdauer dieser Geräte als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [2;5]$ durch die Dichtefunktion ϕ mit der Funktionsgleichung $\phi(x) = \frac{1}{27} \cdot (10x^2 - 76x + 145)$ modelliert werden kann.

- Keine der Annas vertraute dieser Gebrauchsanweisung zu 100%, weshalb sie ϕ erst einmal auf ihre typischen Eigenschaften überprüften. Stimme mit den drei Damen ein!
- Welche durchschnittliche Lebensdauer μ ergibt sich? Hatte AK(A)s DVD-Player dieses Alter schon erreicht?
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- AK(A)s DVD-Player stammte aus einer 324er-Palette. Bei wie vielen dieser Geräte sollte die Lebensdauer um höchstens σ von μ abweichen? Fiel AK(A)s Gerät auch in diesen Bereich?
- Wie viele Geräte aus der Palette aus d) werden älter als 4 $\frac{1}{2}$ Jahre? (Die Frage, ob AK(A)s DVD-Player in diesen Bereich fiel, wäre eine Beleidigung euer aller Intelligenz und soll daher an dieser Stelle entfallen! ☺)



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Dezember 2012.

Dr. Robert Resel, e. h.

P.S.: ... und wie schon bemerkt: Nach der dreistündigen Schularbeit folgen dann noch 17 abschließende Übungsbeispiele zur Stochastik stetiger Zufallsvariabler!

