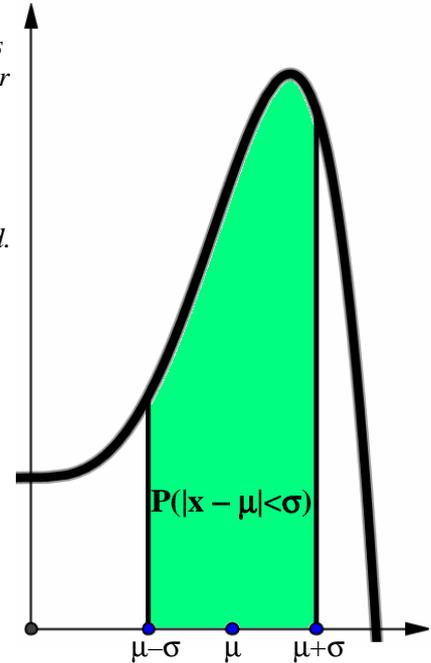


Übungsbeispiele für die schriftliche Matura (8A, Gymnasium, 2012/13)



Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Stochastik stetiger Zufallsvariabler** (speziell: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) ein Kapitel der 8. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für Maturabeispiele sind.

ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



- 19) Die reelle Funktion φ mit der Funktionsgleichung $y = \varphi(x) = \frac{5}{1296} \cdot (77x^4 - 372x^3 + 450x^2)$ ist Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 3]$.

a) Zeige, dass diese Funktion jene wesentlichen Eigenschaften (welche auch in der rechten Abbildung zu erkennen sind) aufweist, welche eine Dichtefunktion haben muss!

X beschreibt die Arbeitszeit bei dreistündigen Mathematikschularbeiten.

b) Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ !

c) Ermittle die Standardabweichung σ von X !

d) Bei wie vielen der 31 Teilnehmer (zweier kleiner achter Klassen!) sollte dem Modell gemäß die Arbeitszeit um maximal σ von μ abweichen?

Zum Beispiel für das Sprach-MODUL(!) der obigen Plüschente!
 $\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow$

- 20) Die Lebensdauer einer Batterie kann als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 90]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{1}{196 \cdot 830 \cdot 000} \cdot x^2 \cdot (x - 90)^2$ beschrieben werden.

(a) Begründe ausführlich, warum φ tatsächlich Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X ist!

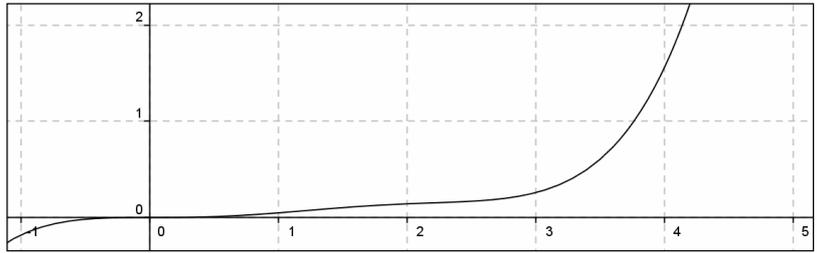
(b) Berechne die durchschnittliche Lebensdauer μ ! Begründe, warum μ zugleich auch Median und Modus von X ist!

(c) Zeige, dass die Standardabweichung σ von X ziemlich genau 17 beträgt! Bei wie vielen von 73 Batterien sollte die Lebensdauer demnach um höchstens σ von μ abweichen?

(d) Wie viele der 73 Batterien halten dem stochastischen Modell nach länger als 67 Stunden?



- 21) Die rechte Abbildung zeigt den Graphen der Funktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{12800} \cdot (49x^5 - 280x^4 + 440x^3)$, welche jene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$ beschreibt, die das Dienstalter von HTL-Professoren bei Beendigung ihrer Lehrtätigkeit (sei es durch Pensionierung oder aus anderen Gründen) in Dekaden angibt.

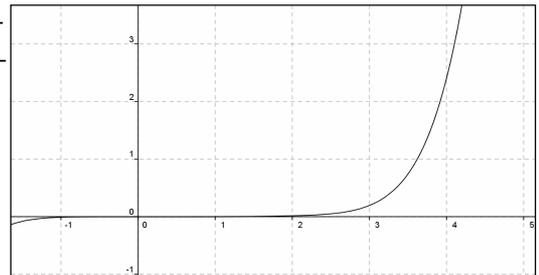


- Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt und begründe auch die Richtigkeit des Funktionsgraphenverlaufs in der Abbildung! Welche Rückschlüsse kannst du aus der Abbildung ziehen?
- Berechne die durchschnittliche Beschäftigungsdauer μ österreichischer HTL-Lehrer!
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Bei wie vielen von 17 HTL-Professoren sollte daher dem Modell gemäß die Beschäftigungsdauer um höchstens σ von μ abweichen?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit (auf Promille genau) hat ein zufällig herausgegriffener HTL-Professor maximal 20 Jahre unterrichtet?

- 22) Die Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{60} \cdot (84x^6 + 20x^3 + 43)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$, welche das Lebensalter von männlichen Algebranern in Jahrhunderten misst.

- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
- Wie alt (μ) wird ein männlicher Algebraner durchschnittlich?
- Um wie viel Jahre (σ) streut das Lebensalter eines männlichen Algebraners durchschnittlich um μ ?
- Ergänze: ... von 88 männlichen Algebranern weisen ein Lebensalter auf, das um höchstens σ von μ abweicht.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein männlicher Algebraner nicht älter als 1,4 Jahre wird?

- 23) Die rechte Abbildung zeigt den Graphen der Funktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{40960} \cdot (9x^7 - 42x^6 + 56x^5)$, welche jene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 4]$ beschreibt, die das Dienstalter von HAK-Professoren bei Beendigung ihrer Lehrtätigkeit (sei es durch Pensionierung oder aus anderen Gründen) in Dekaden angibt.



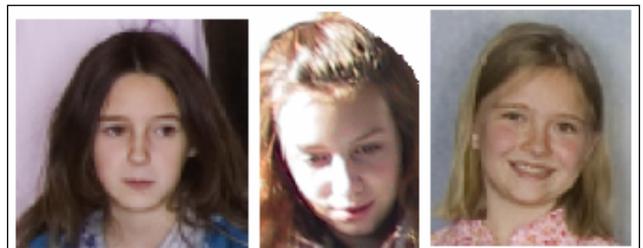
- Zeige, dass tatsächlich eine Dichtefunktion vorliegt und begründe auch die Richtigkeit des Funktionsgraphenverlaufs in der Abbildung! Welche Rückschlüsse kannst du aus der Abbildung ziehen?
- Berechne die durchschnittliche Beschäftigungsdauer μ österreichischer HAK-Professoren!
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Zeige, dass ziemlich genau die „ σ -Regel“ $P(|X - \mu| < \sigma) = 87\%$ gilt!
- Ergänze: ...% der HAK-Professoren unterrichten höchstens 32 Jahre.

- 24) Die Funktion $\varphi(x) = \frac{3}{10} \cdot (220x^9 - 420x^7 + 203x^5)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$, welche das Lebensalter von Algebranern beliebigen Geschlechts in Jahrhunderten misst.

- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
- Wie alt (μ) wird ein Algebraner durchschnittlich?
- Um wie viel Jahre (σ) streut das Lebensalter einer Algebraners durchschnittlich um μ ?
- Zeige, dass bei ziemlich genau 67% aller Algebraner das Lebensalter um höchstens σ von μ abweicht.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Algebraner älter als 32,5 Jahre wird?

- 25) Die Funktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{62500} \cdot (-203918x^{10} + 199766x^5 + 6077)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$, welche die Lebenserwartung von Annas in Jahrhunderten misst.

- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
- Wie alt (μ) wird eine Anna durchschnittlich?
- Um wie viel Jahre (σ) streut das Todesalter einer Anna durchschnittlich um μ ?



- Zeige, dass bei ca. 75% aller Annas das Todesalter um höchstens σ von μ abweicht und ergänze: Bei ... von 790 Annas weicht das Todesalter um höchstens σ von μ ab.
- Zeige: Mit ziemlich genau 96,5%iger Wahrscheinlichkeit wird eine Anna älter als 12 Jahre.

- 26) Wenn man seine BP-Klassenente gut pflegt (z.B. im breiten Sommer 2011 ☺), so verfügt sie über eine überaus hohe Lebenserwartung, die mathematischen Details dazu lauten wie folgt: Die Funktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{40000} \cdot (14685x^8 - 55608x^6 - 35105x^4)$ ist Dichtefunktion jener stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$, welche die Lebenserwartung einer BP-Ente [welche sogar ihre eigene E(nten)-Card, siehe Abbildung rechts! ☺] in Jahrhunderten misst.
- Zeige, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt!
 - Wie alt (μ) wird eine BP-Ente durchschnittlich?
 - Um wie viel Jahre (σ) streut das Todesalter einer BP-Ente durchschnittlich um μ ?
 - Ergänze: Bei ... von 53 BP-Enten weicht das Todesalter um höchstens σ von μ ab.



Quelle von 27):

Klausurarbeit aus Mathematik

Klasse 8D (Realgymnasium), Haupttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

- 27) Die Arbeitsdauer bei einstündigen Mathematikschularbeiten (50 Minuten sowie die darauf folgende zehnminütige Pause) läßt sich aufgrund empirischer Untersuchungen als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 1]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = 14x^6(1 - x^7)$ beschreiben.
- Begründe, warum es sich bei φ tatsächlich um die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable handelt!
 - Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ in Minuten!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X in Minuten! Bei wie vielen von 23 Schülern einer Klasse sollte daher gemäß dem vorliegenden stochastischen Modell die Arbeitszeit um höchstens σ von μ abweichen?
 - Wie viele von 54 Schülern zweier Klassen sollten überdurchschnittlich lange arbeiten?

- 28) Nachdem M. Night Shyamalan, der Schöpfer von Mystery-Hits wie *The sixth sense*, *Unbreakable*, *Signs* und *The village*, die Idee zum im Jänner 2011 im deutschen Sprachraum erschienenen **DEVIL** lieferte und Diagonal-D. von diesem Film sichtlich beeindruckt (und erschrocken?!?) war, schuf er mit

DAVEL einen noch viel furchteinflößenderen Schokker, der Hammy, Lemmy & co regelrecht das Blut in den Adern gefrieren ließ. Ein statistisch firmer Filmtheoretiker hat in einer breit (☺) angelegten Studie untersucht, wie lange die Zuschauer im Kino den Film aushielten (der von der ersten Sekunde an immens an die Substanz geht!). Mit Daves ("Davels", seit Freddy Krueger, Jason Vorhees, Michael Myers und Dr. Hannibal Lecter gab es keinen furchteinflößenderen Maniac mehr! ☺) Unterstützung erstellte er das folgende stochastische Modell [wobei die Verweildauer als "Masochismus-Index" (kurz: M-I) titulierte wurde]:

Der M-I läßt sich als in Stunden gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega = [0; 2]^2$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x) = \frac{3}{256} \cdot (105x^4 - 280x^3 + 200x^2)$ beschreiben.

- Kontrolliere zunächst (ohne Angst vor DAVEL zu haben! ☺), dass φ tatsächlich eine Dichtefunktion ist!
- Berechne den durchschnittlichen M-I μ sowie die Standardabweichung σ von X !
- Dave zeigt seinen Film einer achten Klasse mit 29 Schülern anlässlich der Maturafeier. Bei wie vielen Schülern sollte der M-I dem Modell nach um höchstens σ von μ abweichen?
- Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zuseher höchstens 49 bzw. 74 bzw. 91 Minuten durchhält!

¹: Damit assoziiert man auch "Mission: Impossible" bzw. [siehe Aufgabe 29)!] "Moritz: Insidious" (Insidious 2)! ☺

²: D A V E L h a t e i n e L ä n g e v o n 1 2 0 M i n u t e n ! ! ! !

