

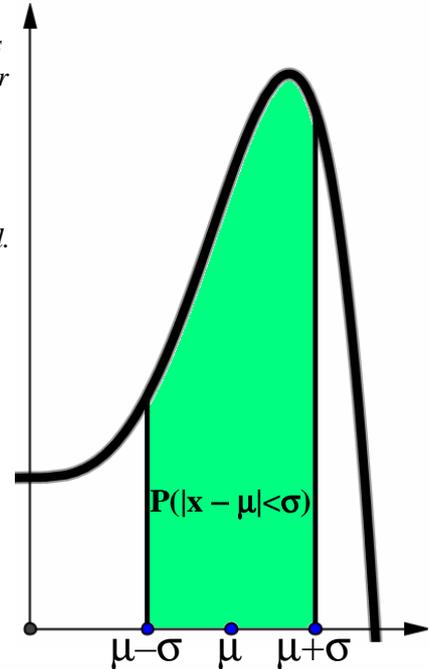
Übungsbeispiele für die drei- stündige Schularbeit (prin- zipiell auch für die schrift- liche Matura* geeignet!)

(8A, Gymnasium, 2012/13)



Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Stochastik stetiger Zufallsvariabler** (speziell: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen) ein Kapitel der 8. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für **Maturabeispiele** sind.

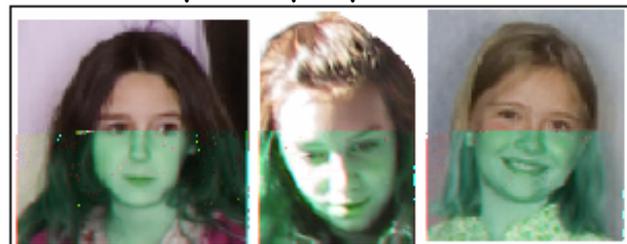
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



1) Anna, Anna, Anna und ihre DVD-Player, Teil 1:

Die drei Annas sahen sich bei "Anna Ba" (kurz: "AB(B)A") am **Freitag, den 13.** Jänner 2012 auf AB(B)As exakt zwei Jahre alten DVD-Player den Film "An(n)anas Express" an. Plötzlich streikte der DVD-Player, was AB(B)A (aber auch "ABR(A)" und "AK(A)") äußerst stutzig machte. In der Gebrauchsanweisung ihres Geräts (Marke *Nasopanic* ☺) fand AB(B)A überraschenderweise die Information, dass abseits der einjährigen Garantie die Lebensdauer dieser Geräte als stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[1;5]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{3}{4096} \cdot (115x^2-562x+839)$ modelliert werden kann.

- Keine der Annas vertraute dieser Gebrauchsanweisung zu 100%, weshalb sie φ erst einmal auf ihre typischen Eigenschaften überprüften. Stimme mit den drei Damen ein!
- Welche durchschnittliche Lebensdauer μ ergibt sich? Hatte AB(B)As DVD-Player dieses Alter schon erreicht?
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- AB(B)As DVD-Player stammte aus einer 295er-Palette. Bei wie vielen dieser Geräte sollte die Lebensdauer um höchstens σ von μ abweichen? Fiel AB(B)As Gerät auch in diesen Bereich?
- Wie viele Geräte aus der Palette aus d) werden älter als $4\frac{3}{4}$ Jahre? (Die Frage, ob AB(B)As DVD-Player in diesen Bereich fiel, wäre eine Beleidigung eurer aller Intelligenz und soll daher an dieser Stelle entfallen! ☺)

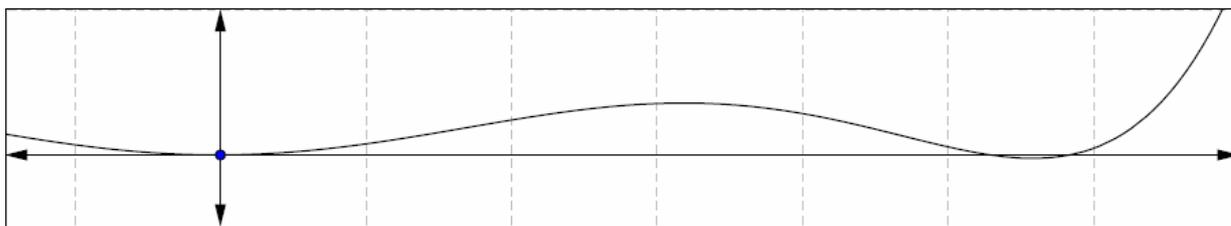


*: Zum Üben für die Klausur folgen noch einmal 17 separate Beispiele zur Stochastik! ☺

- 2) Letztes Jahr im Frühling nahmen 1296 Schüler am Pilotprojekt der standardisierten Reifeprüfung aus Mathematik (auch unter dem Schlagwort *Zentralmatura* bekannt) teil, worüber nunmehr auch schon ein stochastisches Modell vorliegt, dessen Zufallsvariable X die in Stunden angegebene Arbeitszeit misst. Dabei wird der Ereignisraum $\Omega=[0;2]$ sowie die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{1}{96} \cdot (25x^3-60x^2+78x)$ zugrundegelegt.
- Begründe detailliert, dass φ in der Tat Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit $\Omega=[0;2]$ ist!
 - Berechne die sich aus dem in Rede stehenden stochastischen Modell resultierende durchschnittliche Arbeitszeit μ auf Minuten genau!
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Bei wie vielen Teilnehmern wick demnach die Arbeitszeit um maximal σ von μ ab?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig herausgriffener Teilnehmer bereits innerhalb der ersten 48 Minuten abgegeben? Zeige, dass sich diese Wahrscheinlichkeit nach 24 weiteren Minuten bereits verdoppelt hat!

- 3) Die Polynomfunktion φ mit der Funktionsgleichung $\varphi(x)=\frac{3}{8192} \cdot (7x^5 - 80x^3 + 384x)$ ist Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;4]$, welche die Arbeitszeit bei der vierstündigen Klausur aus Latein misst.

- Zeige, dass φ tatsächlich eine Dichtefunktion ist!
- Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ !
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Wie viele der 256 Teilnehmer weisen daher eine Arbeitszeit auf, die um höchstens σ von μ abweicht?



- 4) Die reelle Funktion φ mit der Funktionsgleichung $y=\varphi(x)=\frac{3}{1562500} \cdot (42x^6-2625x^4+40625x^2)$ ist Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;5]$.
- Zeige, dass diese Funktion jene wesentlichen Eigenschaften (welche auch in der obigen Abbildung zu erkennen sind) aufweist, welche eine Dichtefunktion haben muss!
- X beschreibt die Arbeitszeit bei fünfstündigen Deutsch-Klausuren.
- Berechne die durchschnittliche Arbeitszeit μ !
 - Ermittle die Standardabweichung σ von X !
 - Bei wie vielen der 14 Teilnehmer (einer kleinen achten Klasse) sollte dem Modell gemäß die Arbeitszeit um maximal σ von μ abweichen?

- 5) Das Alter von Mathematikern kann als in Jahrhunderten gemessene stetige Zufallsvariable X mit dem Ereignisraum $\Omega=[0;1]$ durch die Dichtefunktion φ mit der Funktionsgleichung $y=\varphi(x)=\frac{9}{6400} \cdot (-7865x^8+7910x^4+3)$ beschrieben werden.

- Zeige, dass diese Funktion jene wesentlichen Eigenschaften aufweist, welche eine Dichtefunktion haben muss!
- Berechne das durchschnittliche Alter μ eines Mathematikers!
- Ermittle die Standardabweichung σ von X !
- Bei wie vielen von 87 Mathematikern sollte dem Modell gemäß das Lebensalter um maximal σ von μ abweichen?
- Wie viele von 41 Mathematikern werden vor Ablauf leben länger als das durchschnittliche Lebensalter μ angibt?