Auszüge aus dem Kapitel 4 des Buchs „WEGE ZUR MATHEMATIK“ von Reichel/Windischbacher/Resel/Lautscham/Götz (Cover: siehe Stochastik-Seite 6E!)

4 Beispiele aktueller Maturaarbeiten

Bei diesem Buch handelt es sich nicht um eine Sammlung von Maturaaufgaben. Hier soll keine spezielle Vorbereitung für die Matura angeboten werden. Die Aufgaben bei den jeweiligen Reifeprüfungen werden im vorangehenden Unterricht entsprechend vorbereitet. Deshalb kann es prinzipiell kein allgemeingültiges Muster für einer Reifeprüfung geben.
Auch die beiden folgenden Beispiele von Reifeprüfungen haben daher nicht den Charakter eines besonders gelungenen Mustervorschlags. Andererseits mag es interessant sein, ein konkretes Beispiel einer Reifeprüfung zu sehen. Überdies sind beide Beispiele auch in dem Sinn besonders interessant, dass sie die Ziele des Lehrplans gut widerspiegeln und von der Themenstellung interessante Beispiele bieten.
Das Folgende soll daher nur als Angebot interessanter (und dennoch nicht allzu schwieriger) Beispiele gesehen werden. Es ist ausdrücklich kein Mustervorschlag für die Stellung von Reifeprüfungsaufgaben.
Die nun folgende erste Maturaarbeit wurde hier nicht im Originaltext übernommen, sondern leicht modifiziert, um sie einem größeren Leserkreis besser zugänglich zu machen.

Reifeprüfungsaufgaben aus Mathematik – Haupttermin 1997

GRG Kalksburg, Wien, Realgymnasium, Prüfer: Peter Hirner

1) a) Leite für den Ausdruck $1+2p+3p^2+\ldots$ eine Summenformel her, wobei $|p|<1$ (3P.).
In einer fiktiven Gesellschaft herrsche das strikt eingehaltene (und von der Natur unterstützte) Prinzip nach so vielen Kindern, bis erstmalig mindestens je ein Knabe und ein Mädchen geboren sind. Wie groß ist die durchschnittliche Anzahl der Kinder pro Familie, wenn Knaben- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich sind?
b) Berechne den Erwartungswert definitionsgemäß (5 P.).
c) Worin besteht der überraschende Zusammenhang zwischen der Aufgabe 1a) und der Aufforderung in 1b)?
d) Ermittle den Erwartungswert durch Simulation (Programmprotokoll, Testlauf) (5P.).

2) Im folgenden Beispiel bezeichnen $\vec{c}$, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Richtungsvektoren der Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks ABC, wobei $\vec{c}$, $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ in Richtung der Strecken $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ bzw. $\overrightarrow{CA}$ orientiert sind.
Es ist nun ausgehend vom Eckpunkt $A(-190/-20)$ mit den Seitenvektoren
$\vec{c}=\begin{pmatrix}18\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-6\\-17\end{pmatrix}$ ein Dreieck ABC minimalen Umfangs zu errichten, dessen Eckpunkte allesamt Gitterpunkte sind.
a) Ermittle die Koordinaten von B und C (4P.).
b) Bestimme die Gleichung des Inkreises des Dreiecks ABC (4P.).
c) Berechne den Inhalt des von den Seiten c und a, sowie dem kürzeren Kreisbogen des Inkreises begrenzten Bereichs (4P.).
d) Erläutere die Rolle des Kreuzprodukts zur Berechnung der Koordinaten von B und C (3P.).

3) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-x^2 + 9x - 5\right) \cdot e^{-x/3}$

a) Ermittle aus der Menge aller Stammfunktionen jene mit $f(0) = -3$ (3P.).

b) Berechne die Extrema ${}_1E_2$, die Wendepunkte ${}_1W_2$ und zeichne den Graphen von f (6P.).

c) Integriere f zwischen den Nullstellen (Ansatz) (3P.).

4) Jemand plant, von seinen Ersparnissen in der Höhe von 1 000 000.–, die zu 5,4% p.a. angelegt sind, jährlich 120 000.– zu beheben.

Berechne die Anzahl der vollen Abhebungen, sowie den Restbetrag, mit welchem das Konto schließlich geleert wird.

a) Elementar (4P.).

b) Durch Simulation am Taschenrechner (4P.).

Lösungen:

1) a) Wir schreiben folgende geometrischen Reihen untereinander, wobei stets $|p| < 1$ gelten muss:

$$1 + p + p^2 + p^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-p}$$

$$p + p^2 + p^3 + \ldots\ldots = \frac{p}{1-p}$$

$$p^2 + p^3 + \ldots = \frac{p^2}{1-p}$$

usw.

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-p}\left(1 + p + p^2 + \ldots\right) = \frac{1}{(1-p)^2}$$

b) Aufgrund der ersten und der zweiten Pfadregel (vgl. LB 7. Kl. Kap. 7.2 bzw. 7.3) erhalten wir für die Wahrscheinlichkeiten $P(X = k)$ der Zufallsvariablen X, welche die Anzahl der Kinder angibt, folgende Ausdrücke, wobei p und q die Wahrscheinlichkeiten einer Mädchen- bzw. einer Knabengeburt bezeichnen:

$P(X = 1) = 0$ (Begründe!)

$P(X = 2) = pq + qp$

$P(X = 3) = p^2q + q^2p$

$P(X = 4) = p^3q + q^3p$

usw.

$P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$

Der mathematische Hintergrund dessen ist die sogenannte geometrische Verteilung, deren zugehörige Zufallsvariable X zählt, wann ein bestimmtes Ereignis (hier: Geburt des ersten Knaben nach bereits (zahlreich) erfolgten Mädchengeburten oder umgekehrt), welches bei jeder Versuchswiederholung (also unabhängig von der letzten) mit gleicher Wahrscheinlichkeit p eintritt, zum ersten Mal eintritt. Eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X besitzt somit die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$.

Setzen wir nun in die Defintion $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i\cdot P(X=x_i)$ des Erwartungswertes ein, so erhalten wir:

$$E(X)=\left(2pq+3p^2q+4p^3q+\ldots\right)+\left(2qp+3q^2p+4q^3p+\ldots\right)=$$

$$=q\cdot\left(2p+3p^2+4p^3+\ldots\right)+p\cdot\left(2q+3q^2+4q^3+\ldots\right)$$

Aufgrund unserer in 1a) erarbeiteten Formel ergibt sich somit für den Erwartungswert:

$$E(X)=q\cdot\left[\frac{1}{(1-p)^2}-1\right]+p\cdot\left[\frac{1}{(1-q)^2}-1\right]$$

Wegen $p=q=\frac{1}{2}$ und $p+q=1$ lautet E(X) schließlich:

$$E(X)=\frac{q}{q^2}-q+\frac{p}{p^2}-p=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-(p+q)=2+2-1=3$$

Bemerkungen:

*) Betrachtet man (was in der Schulmathematik meist der Fall ist) eine diskrete Zufallsvariable X mit einem endlichen Wertevorrat $W_X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, so ist der Erwartungswert E(X) von X durch $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot P(X=x_i)$ definiert (vgl. LB 7. Kl. S. 255).

Bei unserem Beispiel kann es aber nun passieren, dass die Anzahl n der Kinder einer Familie, welche (außer den Eltern natürlich!) nur aus Mädchen oder Knaben besteht, ins Aberwitzige wächst. Somit müssen wir also auch den (prinzipiell nicht unmöglichen) Fall einer Familie mit – sagen wir – dreizehn Kindern einkalkulieren, von denen alle Mädchen oder Knaben sind! Dies äußert sich nun darin, dass wir in der Summendarstellung des Erwartungswertes statt n ∞ geschrieben haben, um „alle künftigen Rekorde" miteinzubeziehen.
Hier wird wieder einmal deutlich, dass es sich um ein mathematisches Modell handelt, welches bestimmten Idealisierungen unterworfen ist, welche uns das Rechnen erleichtern.
Natürlich wird keine noch so gebärfreudige Frau in ihrem ganzen Leben – sagen wir – 400 Kindern das Leben schenken, trotzdem weist das mathematische Modell diesem Ereignis eine (wenn auch noch so geringe) Wahrscheinlichkeit zu.
Entscheidend ist, dass sich bei dieser (anderen) Definition (man bezeichnet diesen Vorgang als „erweiterndes Umdefinieren") des Erwartungswertes der Erwartungswert eo ipso nicht ändert, ihm also nach wie vor die gleiche Bedeutung zukommt wie bisher.

Genauso geschieht es in der 6. Klasse mit den Winkelfunktionen, welche zuerst im rechtwinkeligen Dreieck, dann am Einheitskreis und schließlich für beliebige reelle Argumente definiert werden.
Verwenden wir etwa für eine diskrete Zufallsvariable X mit einem endlichen Wertevorrat

$W_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ statt der bisher benutzten „alten" Definition

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$ des Erwartungswertes die „neue" Definition

$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$, so ändert sich an seinem Wert nichts, da alle Summanden

$x_k \cdot P(X = x_k)$ für $k > n$ verschwinden, da es sich ja bei all diesen x_k um unmögliche Ereignisse (vgl. LB 7. Kl. S. 236) handelt, wie etwa dem Werfen der Augenzahl 7 bei einem „gewöhnlichen" Würfel und demnach $P(X = x_k) = 0 \; \forall k > n$.

*) Die Anwendung unserer in 1a) entwickelten Formel ist nur wegen $|p| < 1$ und $|q| < 1$ gestattet!

*) Besagte Formel kann man auf eine andere Weise rascher gewinnen, wenn man weiß, dass man eine Potenzreihe (vgl. Abschnitt 3.1!) in ihrem Konvergenzintervall gliedweise differenzieren darf und so eine neue Potenzreihe mit dem selben Konvergenzintervall erhält.

Somit erhält man wegen $\frac{d}{dp}\left(1 + p + p^2 + p^3 + p^4 \ldots\right) = 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots$ und

$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}, \; |p| < 1$:

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p^{i-1} = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{(1-p)^2}$$

c) Der Zusammenhang zwischen 1a) und 1b) liegt schlicht darin, dass wir die in 1a) gefundene Formel für die Berechnung des Erwartungswertes in 1b) benötigen.

Bemerkung:

Durch die Aufforderung zur Erstellung dieser Formel in 1a) hat der/die Maturant/in dann zur Berechnung des Erwartungswertes ein „Werkzeug" zur Verfügung, welches er/sie ohne die dezitierte Aufforderung in 1a) vielleicht nicht abgeleitet hätte.
Aufgrund dieses Arbeitsauftrages in 1a) operiert der/die Kandidat/in dann mit einer Formel, von der er/sie dann sogar behaupten kann, sie selbst gefunden (oder zumindest eine bereits im vorangegangenen Unterricht hergeleitete Formel nochmals selbst „bewiesen") zu haben.