Erinnerung und Ergänzung zur Binomialverteilung

- **Erinnerung (6. Klasse):**

Ausgehend vom Verteilungsgesetz

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k},\ \text{wobei } q=1-p \tag{1}$$

der Binomialverteilung haben wir (siehe SÜ-Heft 6. Klasse!) die Rekursionformel (wobei $P(X=k)$ im Folgenden der einfacheren Lesbarkeit wegen mit p_k abgekürzt wird)

$$p_{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot p_k\cdot\frac{p}{q} \tag{2}$$

hergeleitet und dann wie folgt den via

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n}p_k\cdot x_k\ \text{bzw. bei der Biomialverteilung: } E(X)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_k \tag{3}$$

definierten **Erwartungswert** berechnet:

Aus (2) ergibt sich zunächst

$$q\cdot(k+1)\cdot p_{k+1}=np\cdot p_k-kp\cdot p_k. \tag{4}$$

Bilden wir jetzt links und rechts von (4) die Summe von $k=0$ bis $k=n$ und beachten, dass konstante [ergo: vom Summationsindex unabhängige (oder salopp ausgedrückt: unbeeindruckte)] Faktoren aus der jeweiligen Summe herausgehoben werden können, erhalten wir im nächsten Schritt

$$q\cdot\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot p_{k+1}=np\cdot\sum_{k=0}^{n}p_k-p\sum_{k=0}^{n}k\cdot p_k, \tag{5}$$

woraus nun wegen (3) unmittelbar

$$q\cdot E(X)=np-p\cdot E(X) \tag{6}$$

und damit

$$p\cdot E(X)+q\cdot E(X)=np \tag{7}$$

bzw. [Beachte die Bemerkung in (1)!] schlußendlich die abzuleitende Formel

$$E(X)=np \tag{8}$$

folgt, wobei im Schritt von (5) auf (6)

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=1 \tag{9}$$

verwendet wurde (Erinnere dich: Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten ergibt stets 1!) und überdies zu vermerken ist, dass die Summe auf der linken Seite von (5) ja eigentlich [anders als es per definitionem bei $E(X)$ der Fall ist, siehe (3)!] mit $1\cdot p_1$ beginnt und mit $(n+1)\cdot p_{n+1}$ endet, mithin demnach $0\cdot p_0$ fehlt und $(n+1)\cdot p_{n+1}$ zu viel ist, was aber wegen $0\cdot p_0=0$ und $p_{n+1}=0$ (Nota bene: $X=n+1$ ist ein *unmögliches Ereignis*!) keine Rolle spielt [Genau dies ist aber z.B. bei einer mündlichen Prüfung (Matura!!) wichtig zu bemerken, um zu zeigen, dass man weiß, "what´s going on"!].

Soviel zur Erinnerung, widmen wir uns jetzt der Ergänzung:

- **Ergänzung (8. Klasse):**

Ebenfalls in der 6. Klasse haben wir gelernt, dass man die via

$$V(X) = \sum_{k=0}^{n} [x_k - E(X)]^2 \cdot p_k \text{ bzw. bei der Binomialverteilung: } V(X) = \sum_{k=0}^{n} [k - E(X)]^2 \cdot p_k \tag{10}$$

definierte **Varianz** sehr vorteilhaft mit dem $\boxed{\text{Satz von Steiner}}$ berechnen kann, und zwar so:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \tag{11}$$

Um nun für die Binomialverteilung die Varianz $V(X)$ zu berechnen, gehen wir ähnlich wie zuvor bei der Berechnung von $E(X)$ vor, nur mit dem feinen [wegen dem auf der rechten Seite von (11) im Minuenden auftauchenden $E(X^2)$ aber einleuchtenden!] Unterschied, dass wir jetzt (4) vor der Summenbildung links und rechts noch mit $k + 1$ multiplizieren, was uns zunächst

$$q \cdot (k+1)^2 \cdot p_{k+1} = (k+1) \cdot (np \cdot p_k - kp \cdot p_k) \tag{12}$$

beschert, was sich nach Summenbildung (mit den entsprechenden Bemerkungen wie zuvor in der Erinnerung!) zu

$$q \cdot E(X^2) = np \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k + np \cdot \sum_{k=0}^{n} p_k - p \cdot \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot p_k - p \cdot \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k \tag{13}$$

bzw. zu

$$q \cdot E(X^2) = np \cdot E(X) + np - p \cdot E(X^2) - p \cdot E(X) \tag{14}$$

umformen bzw. uminterpretieren [Vieles ergibt sich hier neben den schon auch wichtigen algebraischen Manipulationen durch richtiges Erkennen, was freilich das **Kennen der Begriffe** voraussetzt, **deshalb** auch **Beweise** (im Mathematikunterricht)!] läßt.

Verwendet man jetzt noch das in der Erinnerung (bereits in der 6. Klasse!) erhaltene Resultat $E(X) = np$ und setzt dies in (14) ein, so erhält man zunächst

$$q \cdot E(X^2) = n^2p^2 + np - p \cdot E(X^2) - np^2 \tag{15}$$

bzw. durch weiteres Umformen [vgl. die Schritte von (5) bis (8) unter Beachtung von (9)!]

$$E(X^2) = \overbrace{n^2p^2}^{=(np)^2=[E(X)]^2} + np - np^2, \tag{16}$$

ergo

$$E(X^2) - [E(X)]^2 = np(1-p) \tag{17}$$

bzw. schlußendlich die abzuleitende Formel

$$V(X) = npq. \tag{18}$$

Wien, im August 2008. Dr. Robert Resel, e. h.