Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 1 bis 4

Nomen est omen, oder nicht? (Für die Italiener unter euch: Walkt zu Walk und fragt ihn, was das heißt!)

1. Die Stummerin schweigt jedenfalls nicht, wenn sie etwas entdeckt hat, nämlich den folgenden "SMS"[1]:

Sind ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ die konjugiert-komplexen Lösungspaare der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq 3$ sowie $|{}_1x_2| = \alpha$ und $|{}_3x_4| = \beta$, so gilt $a_2 = \alpha^2+\beta^2+(x_1+x_2)(x_3+x_4)$. Kontrolliere die Gültigkeit dieses SMS anhand von $x^4 + 4x^3 + 18x^2 - 20x + a_0 = 0$, wobei $1 + 2i$ *eine* Lösung ist. (Kontrolliere $a_0 = 125$!)

2. Auch Lekha hat etwas herausgefunden (PLS[2]), nämlich: Sind ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ die konjugiert-komplexen Lösungspaare der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq 3$ sowie $|{}_1x_2| = |{}_3x_4| = K$, so gilt $a_1 = K^2 \cdot a_3$. Kontrolliere die Gültigkeit von PLS anhand von $x^4 - 2x^3 - 94x^2 + a_1x + 4225 = 0$, wobei $8 + i$ *eine* Lösung ist. (Kontrolliere $a_1 = -130$!)

3. Auch Daniel hat **scharf** über algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen nachgedacht, Resultat: ResT![3]

Sind ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ die konjugiert-komplexen Lösungspaare der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq 3$ sowie $|{}_1x_2| = |{}_3x_4|$, so gilt $a_0 = \frac{1}{4} \cdot [a_2 - (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)]^2$. Verifiziere dies für $x^4 - 24x^3 + a_2x^2 - 1200x + 2500 = 0$, wobei $7 + i$ *eine* Lösung ist. (Kontrolliere $a_2 = 240$!)

4. **Sch**ließlich hat auch **Sch**wab **sch**wer ge**sch**uftet und ist dadurch auf folgenden Sachverhalt gestoßen ($\rightarrow$ SumpF[4]): Sind ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ die konjugiert-komplexen Lösungspaare der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ für $0 \leq k \leq 3$ sowie $|{}_1x_2| = \alpha$ und $|{}_3x_4| = \beta$, so gilt $a_1 = -[(x_1 + x_2)\beta^2 + (x_3 + x_4)\alpha^2]$. Bestätige die Gültigkeit von Schwabs Erkenntnis am konkreten Beispiel der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 26x^2 - 88x + 793 = 0$, wobei $2 + 3i$ *eine* Lösung ist. (Kontrolliere $a_3 = 8$!)

---

[1] Satz Marlene Stummers

[2] Steht sowohl für Pytagoreischer Lehrsatz als auch für Pezhumkattil Lehkas Satz!

[3] Roman erhält scharfes Theorem (griechische Bezeichnung für einen Lehrsatz.)

[4] Schwab und "Mexx" prüfen "Ferl"!

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 5 bis 7

5. $4+i$ ist eine Lösung der Gleichung $x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 76x + a_0 = 0$.

   (a) Berechne a_0 (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 17$.) sowie die restlichen Lösungen.
   (b) Welches besondere Viereck entsteht, wenn man die Bildpunkte der Lösungen miteinander verbindet? Begründe deine Antwort auf zwei Arten!
   (c) Verifiziere ferner folgenden Satz (**grausam** wirkende, aber durchaus schöne Formel!): Sind ${}_1x_2$ echt-komplexe sowie ${}_3x_4$ reelle Lösungen einer *normierten* algebraischen Gleichung vierten Grades (*das heißt*, dass $a_4 = 1$ in $\sum\limits_{k=0}^{4} a_k \cdot x^k = 0$ gilt), dann besteht zwischen a_0 und a_1 sowie den Lösungen die Beziehung $(x_1 + x_2)a_0 + x_1x_2a_1 + (x_3 + x_4)x_1^2x_2^2 = 0$.

6. $9 + 2i$ ist eine Lösung der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 489x^2 - 2970x + 6800 = 0$.
   (a) Berechne a_3 (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -36$.) sowie die restlichen Lösungen.
   (b) Welches besondere Viereck entsteht, wenn man die Bildpunkte der Lösungen miteinander verbindet? Begründe deine Antwort auf zwei Arten!
   (c) Verifiziere ferner folgenden Satz (von Fräulein Black River): Sind ${}_1x_2$ echt-komplexe sowie ${}_3x_4$ reelle Lösungen einer normierten algebraischen Gleichung vierten Grades mit der zusätzlichen Eigenschaft $\boxed{x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \ (*)}$, dann ist der gemeinsame Realteil $\Re(x_1) = \Re(x_2)$ *eine* Lösung der quadratischen Gleichung $2a_3y^2 + 2a_2y + a_1 = 0$ (#).
   (d) Erläutere, wie $(*)$ mit (b) zusammenhängt! (Tip: Division durch 2!)

7. Bernie hat Frl. Black Rivers Forschung noch durch folgenden Satz ergänzt: Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (#) lautet $y_2 = \frac{x_1x_2 + x_3x_4}{4 \cdot \Re({}_1x_2)}$. Checke dies anhand der Gleichung $x^4 - 8x^3 - 11x^2 + a_1x - 160 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2 + i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = 108$.).

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen Aufgaben 8 bis 11 [in denen die "Gang" (mit special guest star Jake Harper!) algebraische Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten untersucht hat, deren echt-komplexe Lösungen gemeinsame Imaginärteile aufweisen]

8. FB (steht nicht für Facebook, sondern für Fabios Beitrag):
   (a) Die Gleichung $x^4 - 4x^3 + a_2x^2 - 4x + 65 = 0$ besitzt die Lösung $x_1 = 3 + 2i$. Berechne a_2 und die restlichen Lösungen (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 6$.)!
   (b) Zeige, dass die Lösungen gemeinsame Imaginärteile haben (*). Durch Verbindung der Bildpunkte entsteht ein Viereck. Welche besonderen Viereckstypen kommen daher wegen (*) prinzipiell in Frage (Begründung!). Zeige, dass im konkreten Fall ein Quadrat vorliegt!
   (c) Fabio behauptet, dass für normierte algebraische Gleichungen vierten Grades, deren echt-komplexe Lösungen gemeinsame Imaginärteile aufweisen und ein Quadrat erzeugen, die Gleichung $a_1a_3 + 4\mathcal{A}^2 = 16a_0$ gilt, wobei $\mathcal{A}$ den Flächeninhalt des Quadrats bezeichnet. Überprüfe seine Behauptung an der obigen Gleichung!

9. PLUS (Phil Lehners unglaublicher Satz): Wie Aufgabe 8 mit $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + a_0 = 0$ und $x_1 = 4 - i$, wobei die Formel aus (c) durch $9a_1a_3 = 4a_2^2$ ersetzt wird (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 85$.).

10. ARG (Amir Ratheisers Gleichung): Wie Aufgabe 8 mit $x^4+8x^3+24x^2+a_1x+340 = 0$ und $x_1 = -5+3i$, wobei die Formel aus (c) durch $3a_3^5 = 128a_1a_2$ ersetzt wird (Kontrolliere das Resultat $a_1 = 32$.).

11. Auch ARG (Alexander Rubiks Gleichung): Wie Aufgabe 8 mit $x^4 - 8x^3 + a_2x^2 - 152x + 425 = 0$ und $x_1 = 3 - 4i$, wobei die Formel aus (c) durch $\boxed{a_2 = |{}_1x_2|^2 + |{}_3x_4|^2 - 4 \cdot \Im^2({}_{1,2}x_{3,4})^2 + 4 \cdot \frac{a_1}{a_3}}$ ersetzt wird, wobei $\Im^2({}_{1,2}x_{3,4})$ das gemeinsame Imaginärteilquadrat der vier Lösungen bezeichnet (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 54$.). Xandl behauptet außerdem, dass $\boxed{\text{seine Gleichung}}$ nicht nur für Quadrate gilt. Untersuche dies am vorliegenden Beispiel!

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen

Aufgaben 12 bis 16

12. "O.K." hat (ebenso wie Wolverine in der nächsten Aufgabe sowie Oli2, Elez und Φl S. in den darauffolgenden drei Übungsbeispielen) normierte algebraische Gleichungen vierten Grades mit zwei rein-imaginären Lösungen ${}_1x_2$ sowie zwei echt-komplexen Lösungen ${}_3x_4$ ("Typ O.K.") untersucht und prahlt mit folgender Erkenntnis herum (von welcher er sogar seinen Unterstufenpatenkindern berichtet, die ihn aber - wie üblich - nicht verstehen): Für Gleichungen vom Typ O.K. gilt, dass a_3 eine Lösung der quadratischen Gleichung $\boxed{a_0y^2 - a_1a_2y + a_1^2 = 0}$ ist. Gehe auf Nummer sicher und kontrolliere dies anhand der konkreten Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 41x^2 - 48x + 148 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 6 - i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -12$.)!

13. Auch der Wolfman hat geforscht und schloss eine von O.K. hinterlassene Lücke, nämlich die Darstellung der zweiten Lösung y_2 von $\boxed{\text{O.Ks Gleichung}}$: $y_2 = \frac{x_1x_2(x_3+x_4)}{|x_3|\cdot|x_4|}$ Verifiziere Logans Darstellung von y_2 anhand der Gleichung $x^4 - 4x^3 + 30x^2 - 4x + a_0 =$ mit der Lösung $x_1 = 2 - 5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 29$.)!

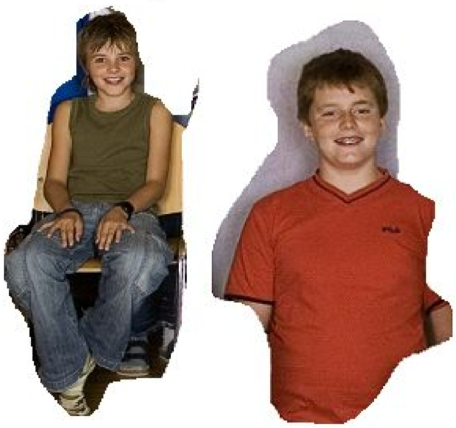
Auch Oli 2, Elez und Φl S. haben eine Theorie (Binder-Eljezi-Schiffert-Theorie aka "BEST") zu Gleichungen vom O.K.-Typ entworfen, die in den Aufgaben 14 bis 16 vorgestellt wird.

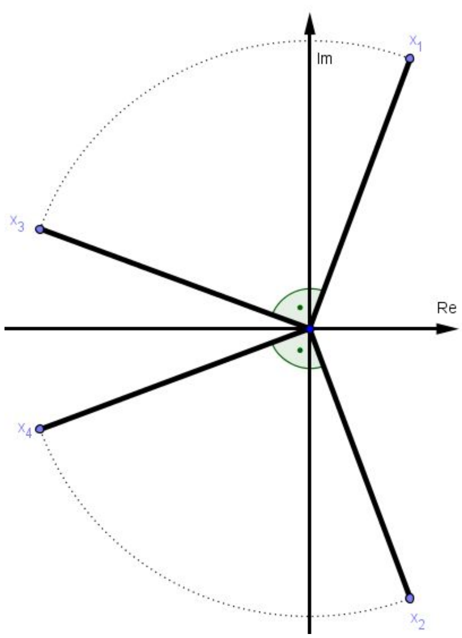
14. Satz von Binder: a_1 ist eine Lösung der quadratischen Gleichung $\boxed{y^2 - a_2a_3y + a_0a_3^2 = 0}$. Überprüfe dies anhand der konkreten Gleichung $x^4 - 2x^3 + 26x^2 + a_1x + 153 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 1-4i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = -18$.)!

15. Satz von El(j)ez(i): Für die zweite Lösung y_2 der $\boxed{\text{Binder-Gleichung}}$ gilt $y_2 = -(x_3 + x_4) \cdot |x_3| \cdot |x_4|$. Verifiziere dies anhand der konkreten Gleichung $x^4 - 14x^3 + a_2x^2 - 14x + 50 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 7 - i$ (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 51$.)!

16. Satz von Schiffert: $a_1 + a_3 = -(x_3 + x_4)|{}_1x_2 \pm 1|^2$
Exemplarischer Check anhand der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 22x^2 - 54x + 117 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 3 - 2i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -6$.) erbeten!

					N	M
	M				A	E
M	A		B		S	N
A	**L**	**G**	**E**	**B**	**R**	**A**
N	U	R	T	I	A	
U	E	A	T	N	L	
E	N	U	I	D	L	
L	D	S	N	E	A	
	A	A	A	R		
		M				





17. Die oberen 60% der links abgebildeten ALGEBRA-Gruppe beschäftigen sich mit normierten algebraischen Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Lösungen als Bildpunkte in der Gaussschen Zahlenebene Deltoide mit genau zwei rechten Winkeln bilden, wobei ${}_1x_2$ die reellen und ${}_3x_4$ die echt-komplexen Lösungen bezeichnet, Manuel macht den Beginn: Seinen Forschungsresultaten zufolge besteht zwischen dem Koeffizient a_2 und den oben angeführten Lösungen die Beziehung $a_2 = \frac{3}{2} \cdot (x_1 + x_2) \cdot (x_3 + x_4)$. Verifiziere dies anhand der Gleichung $x^4 - 25x^3 + 231x^2 - 919x + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 7 - 2i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 1272$.)!

18. Weiter mit Bettina, deren Formel $a_0 = x_1 \cdot x_2 \cdot [(x_1 + x_2) \cdot \frac{x_3+x_4}{2} - x_1 \cdot x_2]$ anhand der konkreten Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 30x^2 + 172x - 816 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 5 - 3i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -12$.) verifiziert werden soll!

19. Schließlich noch Mena, dessen Formel $a_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot [(x_1 + x_2) + \frac{x_3+x_4}{2}] - \frac{x_3+x_4}{2} \cdot (x_1 + x_2)^2$ anhand der konkreten Gleichung $x^4 - 17x^3 + a_2x^2 + 1072x - 5760 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 8 - 4i$ (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 24$.) verifiziert werden soll!

20. Die unteren 40% der ALGEBRA-Gruppe beschäftigen sich wiederum mit normierten algebraischen Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Lösungen als Bildpunkte wie in der untersten Abbildung liegen, wobei zwischen den Koeffizienten dann die Grausam-Gleichung $a_0 = \left(\frac{a_1}{a_3}\right)^2$ gilt, was am Beispiel der Gleichung $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + a_1x + 841 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2+5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = 174$.) überprüft werden soll, wobei auch die Orthogonalität(en) nachzuweisen ist (sind)!

21. Abschluss mit der Binder-Formel $a_2 = \frac{a_3^2}{2}$, welche [wieder inkl. der nachzuweisenden Orthogonalität(en)!] am Beispiel der konkreten Gleichung $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 390x + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 4+7i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 4225$.) nachgewiesen werden soll!

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 22 bis 23

22. Bei mathematischen Problemen kann man sich nicht nur an die ALGEBRA-Gruppe aus den Aufgaben 17 bis 21, sondern auch an das "RALPH[5]"-Team wenden, welches sich mit normierten algebraischen Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten beschäftigt, dessen Bildpunkte **spezielle** Trapeze erzeugen. Dabei behandelt Φl L. Trapeze, deren Diagonalen aufeinander normal stehen und stieß dabei auf den interessanten Sachverhalt, dass ausgehend von den Lösungen $x_1 = a+bi$, $x_2 = a-bi$, $x_3 = c+di$ und $x_4 = c-di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ sowie $a < c$ und $b < d$ der Koeffizient a_2 sich stets als Summe dreier Quadratzahlen darstellen lässt, und zwar so:
$a_2 = (a+c)^2 + (a+b)^2 + (b-c)^2$
Verifiziere dies am Beispiel der folgenden konkreten Gleichung: $x^4 - 12x^3 + a_2x^2 - 88x + 68 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 1+i$ (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 56$.)!

23. Amiratheiser untersucht hingegen Trapeze, deren Seiten ausschließlich 45°- sowie 135°-Winkel einschließen und stieß unter den selben Voraussetzungen wie sein RALPH-Kollege auf die folgende Quadratsummendarstellung von a_2: $a_2 = (a+c)^2+(a-b)^2+(b+c)^2$
Verifiziere dies am Beispiel der folgenden konkreten Gleichung $x^4+a_3x^3+146x^2-522x+793 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 3+2i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -18$.)!

[5]Ratheiser Amir (und) Lehner Philipps Hilfe

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 24 bis 26

24. Ähnlich wie zuvor beim RALPH-Team (Aufgaben 22 und 23) beschäftigt sich auch die "WIRTITSCHIFFERT"-Gruppe mit Vierecken, deren Eckpunkte Bildpunkte der Lösungen normierter algebraischer Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten sind, wobei in diesen Vierecken rechte Winkel auftauchen.

Φl S. focussiert dabei auf Trapeze mit Diagonalen, die normal auf die Trapezschenkel stehen und erhielt ausgehenden von den konjugiert komplexen Lösungspaaren ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ (wobei die rechten Winkel in ${}_1x_2$ gemessen werden) folgendes Resultat:
Sind ${}_1x_2$ und ${}_3x_4$ die konjugiert-komplexen Lösungspaare, so gilt für den Koeffizienten a_2 die Darstellung $a_2 = |{}_1x_2|^2 + |{}_3x_4|^2 + \Re({}_1x_2) \cdot \Re({}_3x_4) - \Im^2({}_3x_4)$. Verifiziere dies am Beispiel der Gleichung $x^4 - 10x^3 + 74x^2 + a_1x + 697 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 1 + 4i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = -218$.)!

25. Fabio widmet seine Aufmerksamkeit (in diesem Fall nicht den Gästen beim Eingang als Türsteher, sondern) Deltoiden mit genau einem rechten Winkel, wobei von den beiden reellen Lösungen ${}_3x_4$ der rechte Winkel in x_3 gemessen wird und f die Länge der zur Symmetrieachse normalen Diagonalen bezeichnet und erhielt für den Koeffizienten a_3 die Darstellung $a_3 = -(3x_3 + x_4 + f)$. Verifiziere dies am Beispiel der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 21x^2 + 19x - 348 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2 - 5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -5$.)!

26. And now **he** walks in ... ;-)
... und erfreut uns mit zahlentheoretischen Querverbindungen, da (Walk)**er** sich mit speziellen normierten algebraischen Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten beschäftigt hat, welche ein paar konjugiert-komplexer Lösungen ${}_1x_2$ und zwei reelle Lösungen ${}_3x_4$ und aufweisen. Dabei handelt es sich bei den reellen Lösungen um die Summe zweier Quadratzahlen und es gilt ferner $x_1x_2 = x_3x_4$, wobei das genaue Konstruktionsprinzip folgendermaßen lautet:
Man generiert ausgehend von zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 via $x_1 = \Re(z_1z_2) + \Im(z_1z_2) \cdot i$, $x_2 = \overline{x_1}$, $x_3 = |z_1|^2$ sowie $x_4 = |z_2|^2$ die Lösungen $x_{1,2,3,4}$. Dann besagt Walk(er)s Satz, dass auch $-a_3$ als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar ist, und zwar in der Form $a_3 = -[(\Re(z_1) + \Re(z_2))^2 + (\Im(z_1) - \Im(z_2))^2]$. Verifiziere dies am Beispiel der Gleichung $x^4 - 26x^3 + a_2x^2 - 1690x + 4225 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 4 + 7i$ (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 274$.).
Zeige, dass von $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = -2 - 3i$ ausgegangen wurde!

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 27 bis 29

27. Die "MAD[6]"-Gruppe besinnt sich wieder mehr allgemeiner Strukturen und untersucht normierte algebraische Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Lösungsmengen aus zwei Paaren konjugiert-komplexer Zahlen bestehen.

Den Anfang macht Xandl mit seiner Darstellung
$a_2 = 2\cdot\Re({}_1x_2)\cdot\Re({}_3x_4)+\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\sum_{k=1}^{4} x_k\right)^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{4}\left(\Im(x_k)\right)^2\right]$,
welche anhand der Gleichung $x^4+8x^3+46x^2+a_1x+1073=0$ mit der Lösung $x_1 = 1-6i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = 312$.) verifiziert werden soll!

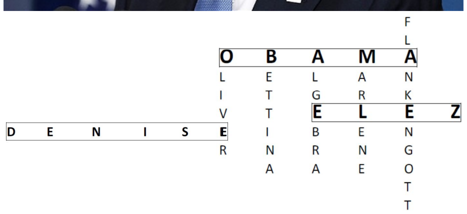
28. Schwab (in der Abbildung: Wos is?) gelangte zur Darstellung
$a_1 = (-2)\cdot[\Re({}_1x_2)\cdot\Re({}_3x_4)\cdot(\Re({}_1x_2)+\Re({}_3x_4))+\Im^2({}_1x_2)\cdot\Re({}_3x_4)+\Im^2({}_3x_4)\cdot\Re({}_1x_2)]$,
welche anhand der Gleichung $x^4+2x^3+7x^2+30x+a_0=0$ mit der Lösung $x_1 = -2-i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 50$.) verifiziert werden soll!

29. Auf eine nicht minder scharfe Formel für a_1 stieß Dan:

$$a_1 = (-2)\cdot[\Re({}_1x_2\cdot{}_3x_4)\cdot\Re({}_1x_2+{}_3x_4)+\Im({}_1x_2\cdot{}_3x_4)\cdot\Im({}_1x_2+{}_3x_4)]$$

Verifiziere diese scharfe Formel **für alle vier möglichen Kombinationen** anhand der Gleichung $x^4-4x^3+39x^2-34x+a_0=0$ mit der Lösung $x_1 = 3-5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 578$.)!

[6] Mexx, Alex und Dan



30. Die OBAMA-Forschungsgruppe [mit Abteilungsleiter O.K. Flankengott, was Obama sichtlich nicht besonders begeistert ;-)] erforscht normierte algebraische Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Lösungen (zwei davon reell, zwei davon echt-komplex) als Bildpunkte in der Gaussschen Zahlenebene Quadrate bilden, das erste Forschungsergebnis geht auf den Flankengott Numero uno höchstpersönlich zurück:
Satz von Kastner: Für die Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 gilt $a_1 = \frac{a_2 a_3}{6}$.
Begründe, warum die Lösungen der Gleichung $x^4 - 4x^3 + a_2x^2 - 4x - 2400 = 0$ (von der mit $x_1 = 1-7i$ eine Lösung bekannt ist) als Bildpunkte in der Gaussschen Zahlenebene tatsächlich ein Quadrat bilden (Kontrolliere das Resultat $a_2 = 6$.) und verifiziere den Satz von Kastner!

31. **D**(iskriminanten) **e**(rgeben) **n**(icht) **i**(mmer) **s**(chöne) **E**(rgebnisse) **hat Folgendes entdeckt**:
Bezeichnet $\mathcal{A}$ den Flächeninhalt des Quadrats, so gilt die "Karajordanovormel" $a_0 = \frac{a_1 a_3 - \mathcal{A}^2}{16}$.
Verfahre wie in Aufgabe 30, und zwar anhand der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 24x^2 - 32x - 65 = 0$ (von der mit $x_1 = 2 + 3i$ eine Lösung bekannt ist). Kontrolliere das Resultat $a_3 = -8$!

32. **Fräulein V**(ariable) **o**(der) **c**(hillige) **K**(onstante) **hat Folgendes entdeckt**:
Bezeichnet $\mathcal{A}$ den Flächeninhalt des Quadrats sowie $\Re({}_1x_2)$ den gemeinsamen Realteil der beiden echt-komplexen Lösungen, so gilt die Darstellung $12a_0a_3 = 2a_1a_2 + 3 \cdot \mathcal{A}^2 \cdot \Re({}_1x_2)$.
Verfahre wie in Aufgabe 30, und zwar anhand der Gleichung $x^4 - 12x^3 + 54x^2 + a_1x - 544 = 0$ (von der mit $x_1 = 3 - 5i$ eine Lösung bekannt ist). Kontrolliere das Resultat $a_1 = -108$!

33. Auf **E**(r) **l**(ogarithmiert) **e**(xtrem) **z**(uverlässig) geht die Beziehung $2a_2^3 = 27a_1^2$ zurück. Verfahre wie in Aufgabe 30, und zwar anhand der Gleichung $x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + a_0 = 0$ (von der mit $x_1 = -4 + 9i$ eine Lösung bekannt ist). Kontrolliere das Resultat $a_0 = -6405$!

34. Auf **M**(orgens) **a**(rbeitet) **r**(atheiser) **l**(eider) **e**(rst) **n**(ach) **e**(lf) geht schließlich die Beziehung $16a_1 = a_3^3$ zurück. Verfahre wie in Aufgabe 30, und zwar anhand der Gleichung $x^4 - 20x^3 + a_2x^2 - 250x - 1776 = 0$ (von der mit $x_1 = 5 - 7i$ eine Lösung bekannt ist). Kontrolliere das Resultat $a_2 = 150$!

Klasse: 8C(Rg) **Schuljahr 2013/14**

Übungen für die dreistündige Schularbeit und für die vierstündige Klausur aus Mathematik

Themengebiet: Algebraische Gleichungen und komplexe Zahlen
Aufgaben 35 bis 39

35. Anders als der Name vermuten lässt, betreibt die Gruppe "WAPPLA" Forschung auf höchstem Niveau: Sie untersucht normierte algebraische Gleichungen vierten Grades mit reellen Koeffizienten, deren Lösungsmengen aus einem Paar konjugiert-komplexer Zahlen ${}_1x_2$ sowie einer Doppellösung ${}_3x_4$ bestehen, deren Bildpunkte in der Gaussschen Zahlenebene kollinear liegen. Den Anfang macht Xandl mit seiner Darstellung $\Im^2({}_1x_2) = a_2 - \frac{3a_3^2}{8}$, welche anhand der Gleichung $x^4 + a_3x^3 + 121x^2 - 456x + 656 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 4 - 5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_3 = -16$.) verifiziert werden soll!

W	A	P	P	L	A
O	L	H	E	E	L
L	E	I	Z	K	G
F	X	L	H	H	E
	A	I	U	A	B
	N	P	M		R
	D	P	K		A
	E		A		
	R		T		
			T		
			I		
			L		

36. Lekha gelangte zur Darstellung $a_1 = \frac{a_3}{8} \cdot (4a_2 - a_3^2)$, welche anhand der Gleichung $x^4 - 4x^3 + 31x^2 + a_1x + 26 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 1 - 5i$ (Kontrolliere das Resultat $a_1 = -54$.) nachgewiesen werden soll!

37. Wolverine gelangte schließlich zur Darstellung $a_0 = \frac{a_3^2}{256} \cdot (16a_2 - 5a_3^2)$, welche anhand der Gleichung $x^4 - 20x^3 + 159x^2 - 590x + a_0 = 0$ mit der Lösung $x_1 = 5 - 3i$ (Kontrolliere das Resultat $a_0 = 850$.) nachgewiesen werden soll (bzw. muss, denn ... wehe, wenn der Wolf sauer ist, dann haben die anderen [aus der 8C!]) wirklich nichts mehr zu lachen)!

38. Challenge I: Checke an den obigen drei Beispielen (bzw. versuche allgemein zu beweisen), dass die nebst $x = a$ (Begründe!) verbleibenden Extremstellen der hinter den linken Seiten der algebraischen Gleichungen steckenden Polynomfunktionen echt-komplex sind. Es gilt nämlich ausgehend von den konjugiert-komplexen Nullstellen ${}_1x_2 = a \pm bi$ die Darstellung ${}_5x_6 = a \pm \frac{b\sqrt{2}}{2} \cdot i$.

39. Challenge II: Checke an den obigen drei Beispielen (bzw. versuche allgemein zu beweisen), dass die Wendestellen der hinter den linken Seiten der algebraischen Gleichungen steckenden Polynomfunktionen echt-komplex sind. Es gilt nämlich ausgehend von den konjugiert-komplexen Nullstellen ${}_1x_2 = a \pm bi$ die Darstellung ${}_7x_8 = a \pm \frac{b\sqrt{6}}{6} \cdot i$.

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juli 2013. Dr. Robert Resel, e. h.