

# 49. Österreichische Mathematische Olympiade

## Gemischter Vorbereitungskurs

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Schuljahr: 2017/18

Kursort: AHS Heustadelgasse

## Übungsbeispiele zu Ungleichungen

1.  $a$  und  $b$  seien reelle Zahlen mit  $0 < a < b$ .

$$\text{Beweise: } \frac{2a}{a+2b} + \frac{2b}{b+2a} < \frac{2b}{b-a}$$

2. Für  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \mathbb{R}^+$  und  $z \in \mathbb{R}$  beweise man die Ungleichung

$$\frac{1}{x+2y} + \frac{1}{2x+y} > \frac{1}{ax+by} \quad \text{mit } a = 2z^2 + (z+1)^2 \quad \text{und } b = z^2 + 2(z+1)^2.$$

3.  $a$  und  $b$  seien die Katheten,  $c$  sei die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} > \frac{c}{a+b}.$$

4.  $a$  und  $b$  seien die Katheten,  $c$  sei die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} < \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

5.  $a$  und  $b$  seien die Katheten,  $c$  sei die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Man beweise die Ungleichung

$$a(b+c) + b(a+c) < 2c(a+b)$$

auf zwei Arten, nämlich

- (I) mit

bzw.

- (II) ohne

Verwendung des harmonischen Mittels.