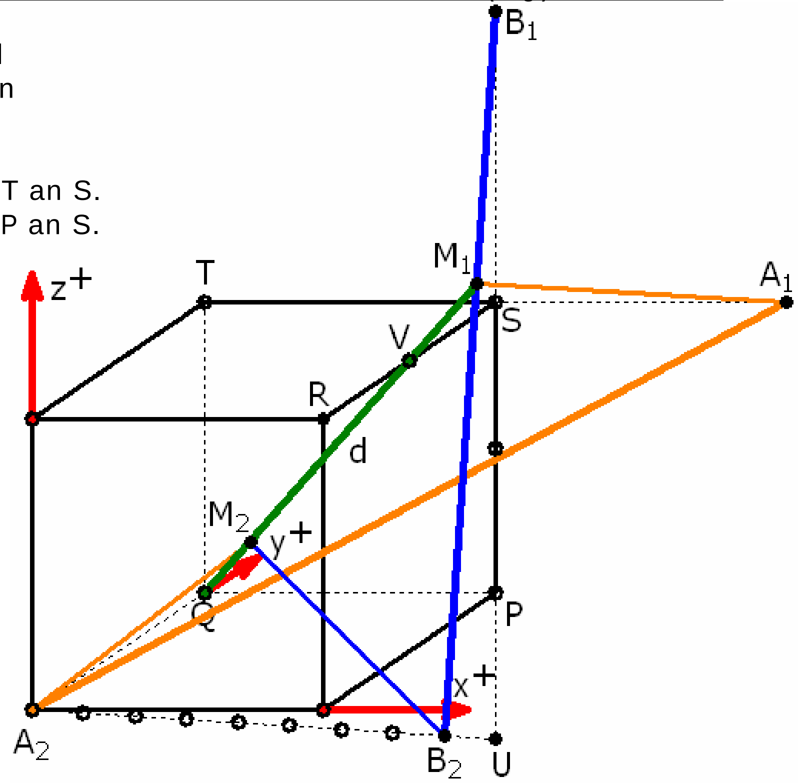
1) In der nebenstehenden Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 18 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:

- A_1 ist der Spiegelpunkt der Würfelecke T an S.
- B_1 ist der Spiegelpunkt der Würfelecke P an S.
- U entsteht durch fortlaufende Halbierung der Würfelkante SP.
- B_2 geht durch Neuntelung der Strecke A_2U hervor.

a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

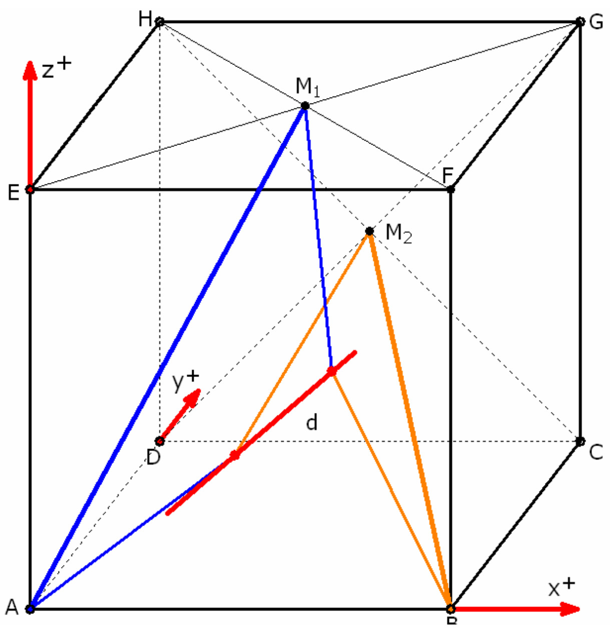
b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke Q als auch der Mittelpunkt V der Würfelkante RS auf d liegt.



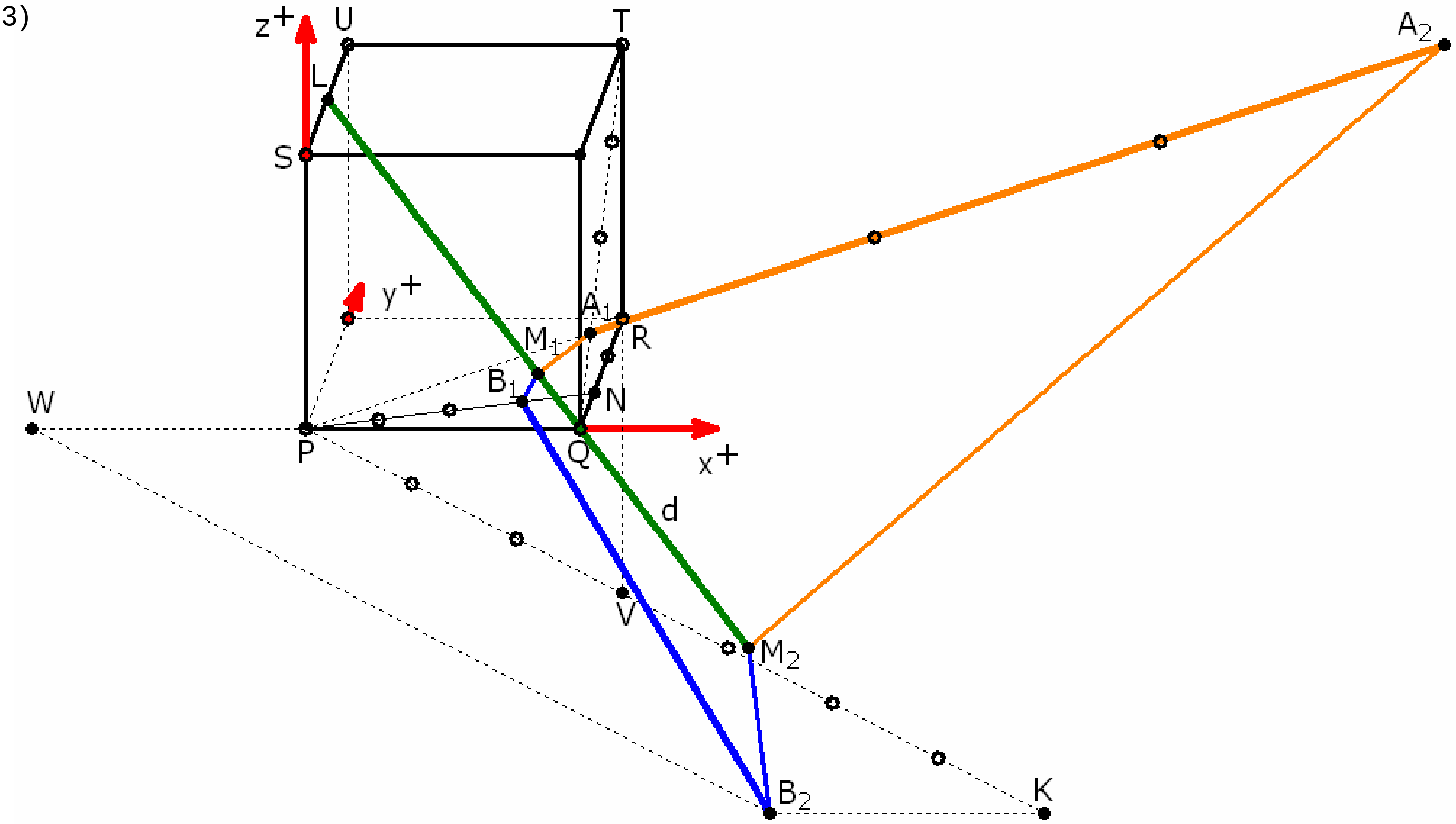
c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und zeige, dass die Bahnkreisradien der Würfelkantenlänge bzw. $\frac{2}{3}$ jeder Flächendiagonalen entsprechen.

2) Die Strecke AM_1 soll durch Drehung um eine Achse d in die Strecke BM_2 gedreht werden.

Wähle als Seitenlänge des Würfels 12, ermittle eine Parameterdarstellung von d samt Drehwinkel und Radien (für beide Drehungen!). Zeige insbesondere, dass alle vier(!) Radien gleich groß sind, kontrolliere, dass der Drehwinkel dem Winkel $\sphericalangle PAQ$ im Dreieck $\Delta APQ[A(0|0|0), P(-2|-2|0), Q(9|4|1)]$ entspricht und berechne auch das Maß des Winkels $\sphericalangle APQ$! Zeige ferner, dass d parallel zur Raumdiagionale DF verläuft!



3)



In der oberen Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 36 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:

- A_1 entsteht durch Viertelung der Diagonale QT.
- N geht durch Drittelung der Würfelkante QR und B_1 durch Viertelung der Strecke PN hervor.
- A_2 entsteht durch fortlaufende Spiegelung von P an A_1.
- V ist der Spiegelpunkt der Würfelecke T an R.
- K entsteht durch fortlaufende Drittelung der Strecke PV.
- W ist der Spiegelpunkt der Würfelecke Q an P.
- B_2 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $KPWB_2$.

a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

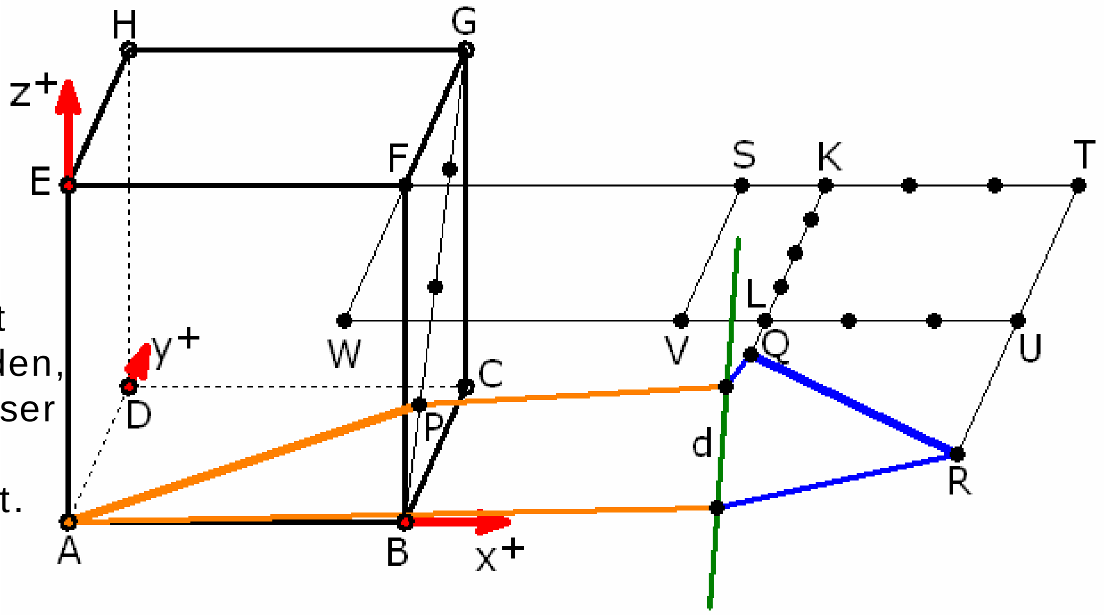
b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke Q als auch der Mittelpunkt L der Würfelkante SU auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und zeige, dass das Verhältnis der Bahnkreisradien ca. 3:38 beträgt. Gib auch das exakte Verhältnis unter Verwendung der Quadratwurzel von 10 an!

4) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 20) entsteht P durch Viertelung der Flächendiagonale BG. Das Quadrat WVSF geht aus Spiegelung des Quadrats EFGH an F hervor, das Quadrat VUTS ergibt sich durch Spiegelung des Quadrats WVSF an VS. K, L und Q entstehen durch fortlaufende Viertelung und R schließlich durch Spiegelung von T an U.

a) Zeige, dass die Strecken AP und QR gleich lang sind.

Wegen a) kann AP durch Drehung um eine Achse d derart in QR gedreht werden, dass im Zuge d dieser Drehung A in R sowie P in Q übergeht.

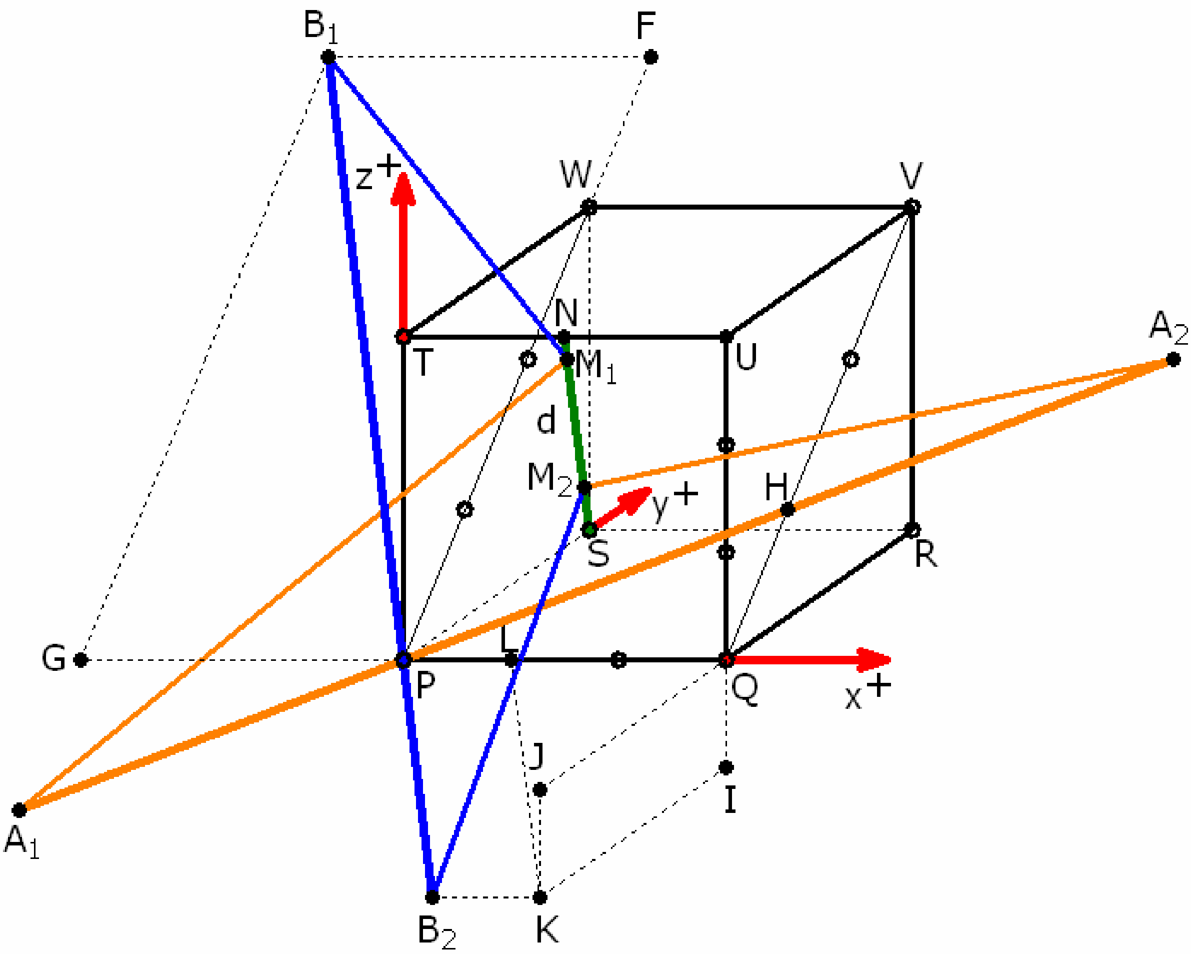


b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Sind die Radien für die beiden Drehungen gleich groß?

c) Zeige, dass d zur Gerade durch A und M_{EH} parallel verläuft!

d) Es sei N der Spiegelpunkt von C an G sowie M der Mittelpunkt des Quadrats EFGH. Kontrolliere, dass der zur Drehung zugehörige Drehwinkel zum Winkel ∢BMN kongruent ist!

5)



In obiger Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 18 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:

- H entsteht durch Drittelung der Strecke QV.
- A_2 ist der Spiegelpunkt der Würfelecke P an H.
- A_1 ist der Spiegelpunkt von H an der Würfelecke P.
- F entsteht durch fortlaufende Drittelung der Flächendiagonale PW.
- G ist der Spiegelpunkt der Würfelecke Q an P.
- B_1 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $GPFB_1$.
- J ist der Spiegelpunkt der Würfelecke R an Q.
- I entsteht durch fortlaufende Drittelung der Würfelkante UQ.
- K ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms IQJK.
- L geht durch Drittelung der Würfelkante PQ hervor.
- B_2 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms $KLPB_2$.

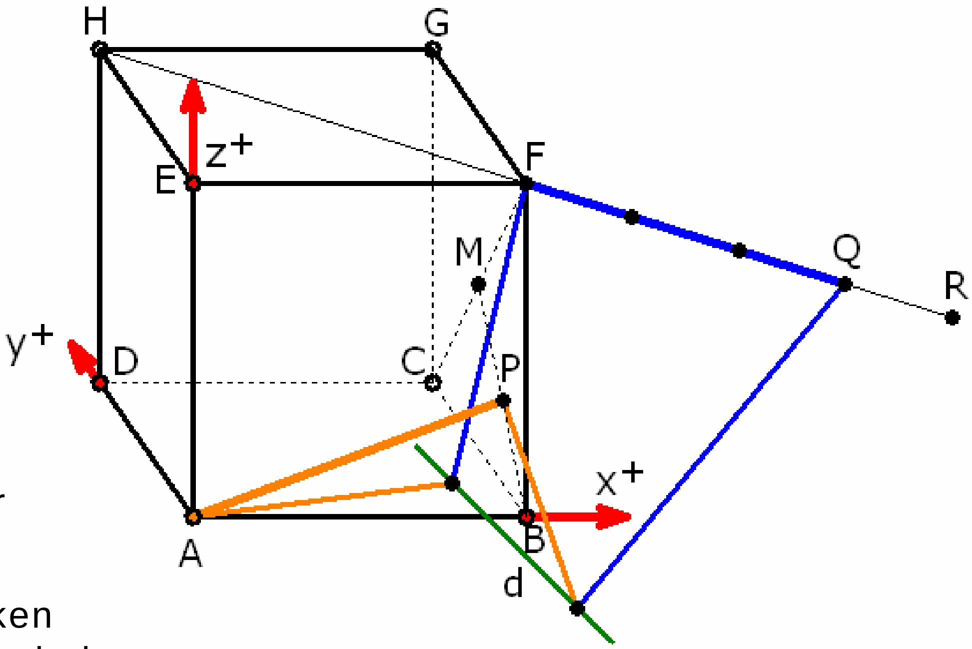
a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke S als auch der Mittelpunkt N der Würfelkante TU auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und zeige, dass die Bahnkreisradien gleich groß sind!

6) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 8) ist M der Mittelpunkt der Flächendiagonale BG und P der Mittelpunkt der Strecke BM. R ist der Spiegelpunkt von H an F und Q geht durch Viertelung der Strecke FR hervor.



a) Zeige, dass die Strecken AP und FQ gleich lang sind.

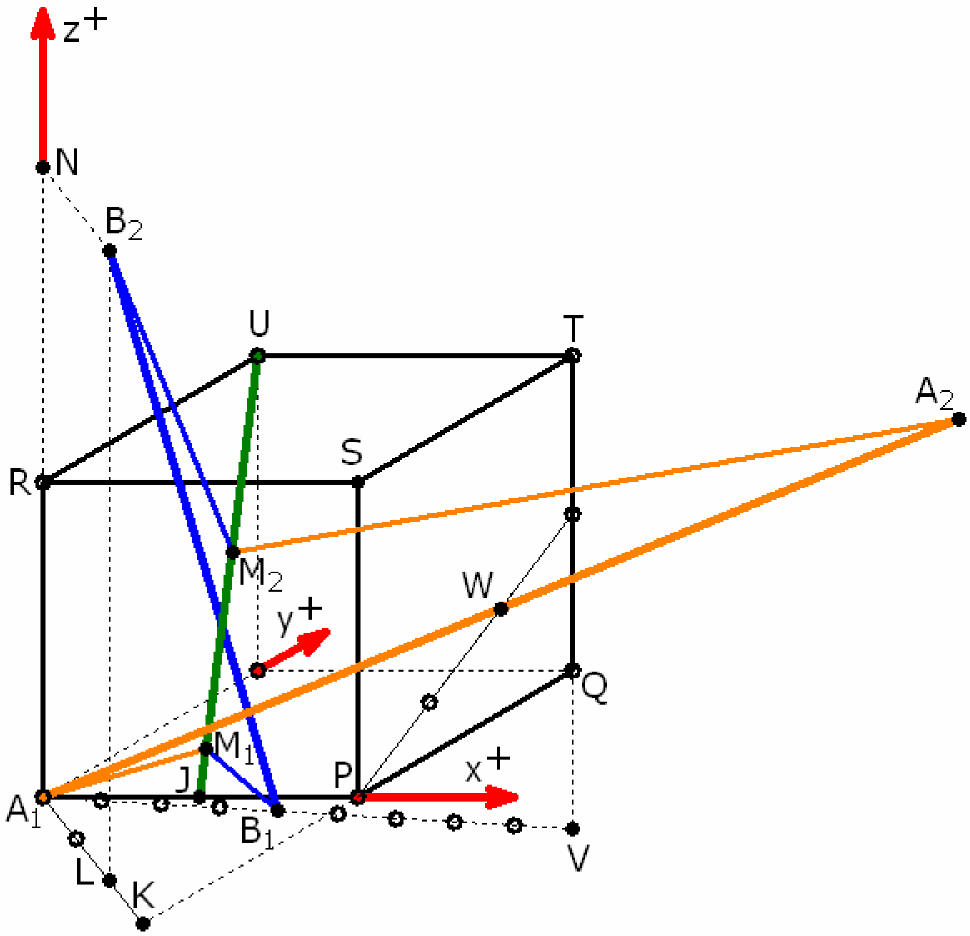
Wegen a) kann AP durch Drehung um eine Achse d derart in FQ gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung A in F sowie P in Q übergeht.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Begründe, warum die Bahnkreisradien fast gleich groß (ca.10) sind!

c) Zeige, dass d zur Gerade durch B und E parallel verläuft!

d) Zeige, dass der zur Drehung zugehörige Drehwinkel dem spitzen Schnittwinkel zweier Würfelraumdiagonalen entspricht!

7) In nebenstehender Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 18 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:



- W entsteht durch Drittelung der Verbindungsstrecke der Würfelecke P mit dem Mittelpunkt der Würfelkante QT. Spiegelt man letzteren an der Würfelecke Q, erhält man V, aus dem dann B_1 durch Neuntelung der Strecke A_1V hervorgeht.
- A_2 ist der Spiegelpunkt der Würfelecke A_1 an W.
- A_1 ist der Spiegelpunkt der Würfelecke Q an der Würfelecke Q.
- K ist der Spiegelpunkt der Würfelecke Q an P.
- L entsteht durch Drittelung der Strecke A_1K.
- N ist der Spiegelpunkt der Würfelecke A_1 an der Würfelecke R.
- B_2 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms NA_1LB_2.

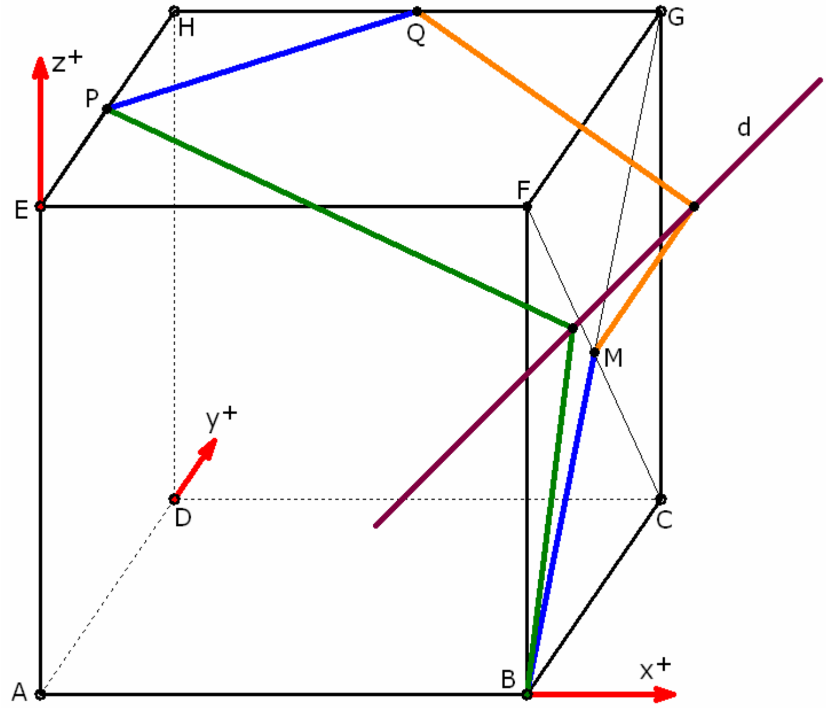
a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke U als auch der Mittelpunkt J der Würfelkante A_1P auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und zeige, dass das sich die Bahnkreisradien wie $1:\sqrt{17}$ verhalten!

8) In nebenstehender Abbildung sind P und Q Mittelpunkte entsprechender Würfelkanten, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 4 aufweist.



a) Zeige, dass die Strecken BM und PQ gleich lang sind.

Wegen a) kann die Strecke BM durch Drehung um eine Achse d derart in PQ gedreht werden, dass B auf P und M auf Q abgebildet wird.

b) Bestimme eine Parameterdarstellung von d. Zeige, dass d parallel zu einer Flächendiagonale des Würfels (Welcher?) ist.

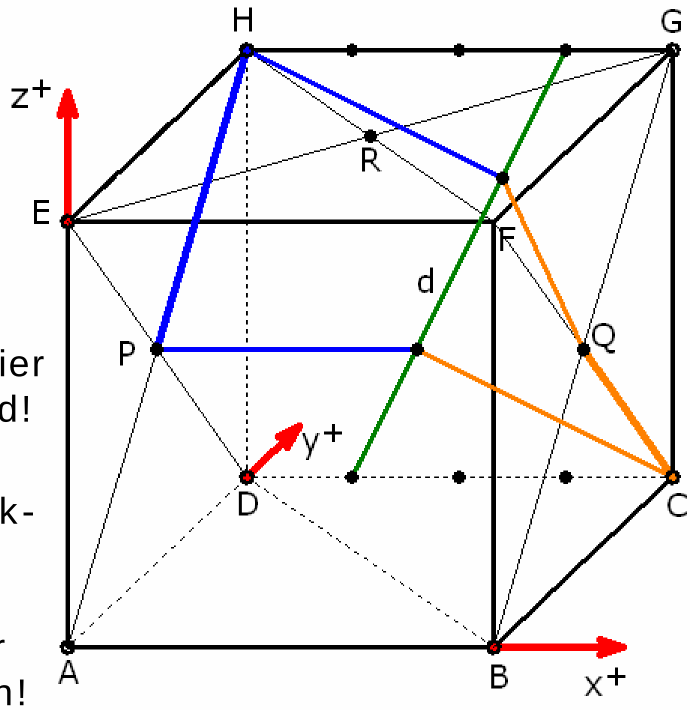
c) Ermittle sowohl für die Drehung von B nach P als auch für jene von M nach Q die Koordinaten des entsprechenden Bahnkreismittelpunkts, sowie den zugehörigen Bahnkreisradius und den Drehwinkel.

d) Kontrolliere, dass die Radien der beiden Drehungen einander wie $\sqrt{3}$: 1 verhalten und der Drehwinkel dem spitzen Schnittwinkel zweier Raumdiagonalen des Würfels gleicht.
Zeige ferner, dass einer der vier Radien spezielle Lage (Welche?) aufweist!

9) Gehe für den nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH von einer Seitenlänge von 20 aus und bearbeite die folgenden Aufgabenstellungen:

a) Zeige, dass die Strecken PH und CQ gleich lang sind.

Wegen a) kann PH durch Drehung um eine Achse d derart in CQ gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung P in C sowie H in Q übergeht.

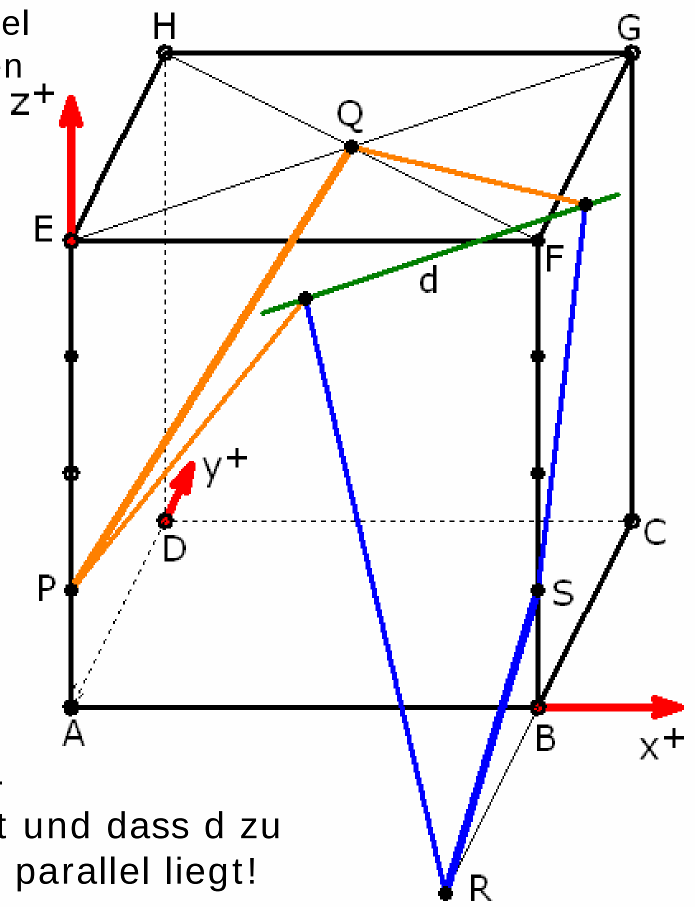


b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Besttätige, dass die vier Bahnkreisradien alle gleich groß sind!

c) Zeige, dass d die Würfelkanten CD und GH in den eingezeichneten Punkten schneidet, welche durch Viertelung der beiden Kanten entstehen! Verifiziere ferner, dass zwei der vier Radien zueinander parallel verlaufen!

d) Es sei S der Spiegelpunkt von C an G. Kontrolliere, dass der zur Drehung zugehörige Drehwinkel zum Winkel ∢BRS kongruent ist!

10) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 8) entstehen P und S durch Viertelung entsprechender Würfelkanten. R ist der Spiegelpunkt von C an B.

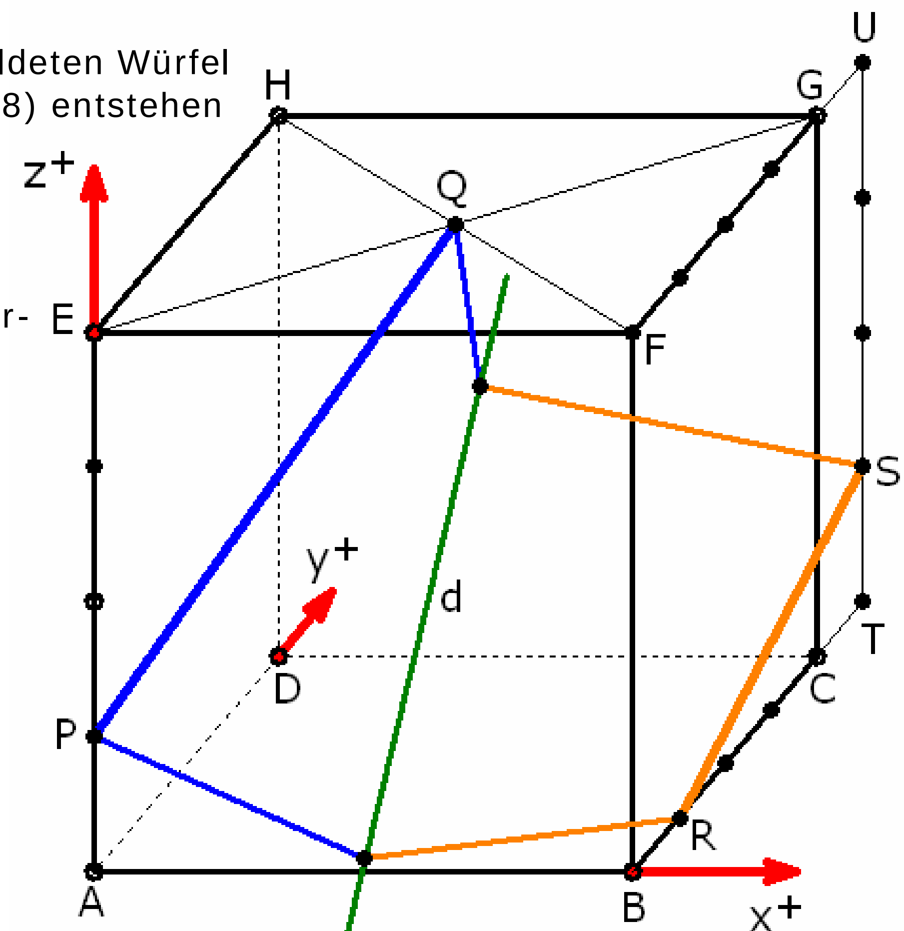


a) Zeige, dass die Strecken PQ und RS gleich lang sind.

Wegen a) kann PQ durch Drehung um eine Achse d derart in RS gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung P in R sowie Q in S übergeht.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Zeige ferner, dass der zugehörige Drehwinkel dem spitzen Schnittwinkel zweier Würfelraumdiagonalen entspricht und dass d zu zwei Flächendiagonalen (Welchen?) parallel liegt!

11) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 8) entstehen P und R durch Viertelung bzw. T und U durch fortlaufende Viertelung entsprechender Würfelkanten. S entsteht durch Viertelung der Strecke TU.



a) Zeige, dass die Strecken PQ und RS gleich lang sind.

Wegen a) kann PQ durch Drehung um eine Achse d derart in RS gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung P in R sowie Q in S übergeht.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Zeige ferner, dass der zugehörige Drehwinkel dem stumpfen Schnittwinkel zweier Würfelraumdiagonalen entspricht. Bestätige schließlich auch noch, dass d zu zwei Flächendiagonalen (Welchen?) parallel liegt und dass einer der vier Bahnkreisradien (Welcher?) zu einer Raumdiagonale (Welcher?) parallel liegt!

12) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 12) ist R der Spiegelpunkt von F an G. Ferner ist Q der Mittelpunkt von GR.

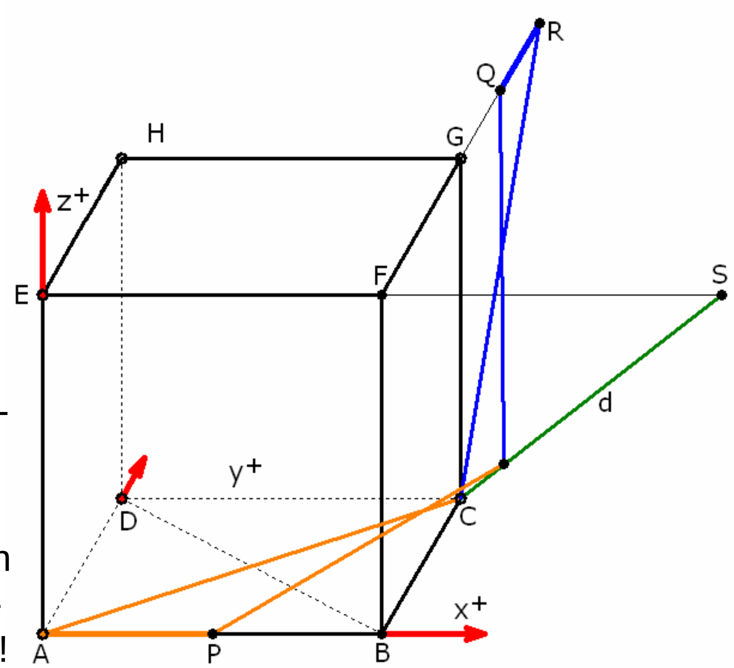
a) Zeige, dass die Strecken AP und QR gleich lang sind.

Wegen a) kann AP durch Drehung um eine Achse d derart in QR gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung A in R sowie P in Q übergeht.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Sind die Radien für beide Drehungen gleich groß?

c) Zeige, dass der Spiegelpunkt S von E an F auf d liegt und dass d zu einer Raumdiagonle parallel verläuft!

d) Zeige ohne Taschenrechner, dass der Drehwinkel exakt 120° beträgt!



13) Im nebenstehend abgebildeten Würfel ABCDEFGH (Seitenlänge 12) ist R der Mittelpunkt der Kante FG und Q der Spiegelpunkt von R an F.

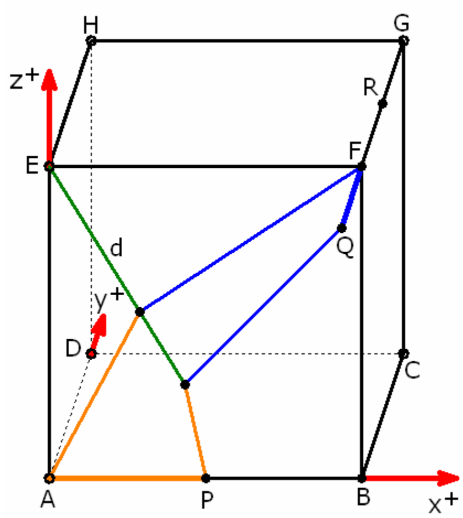
a) Zeige, dass die Strecken AP und QF gleich lang sind.

Wegen a) kann AP durch Drehung um eine Achse d derart in QF gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung A in F sowie P in Q übergeht.

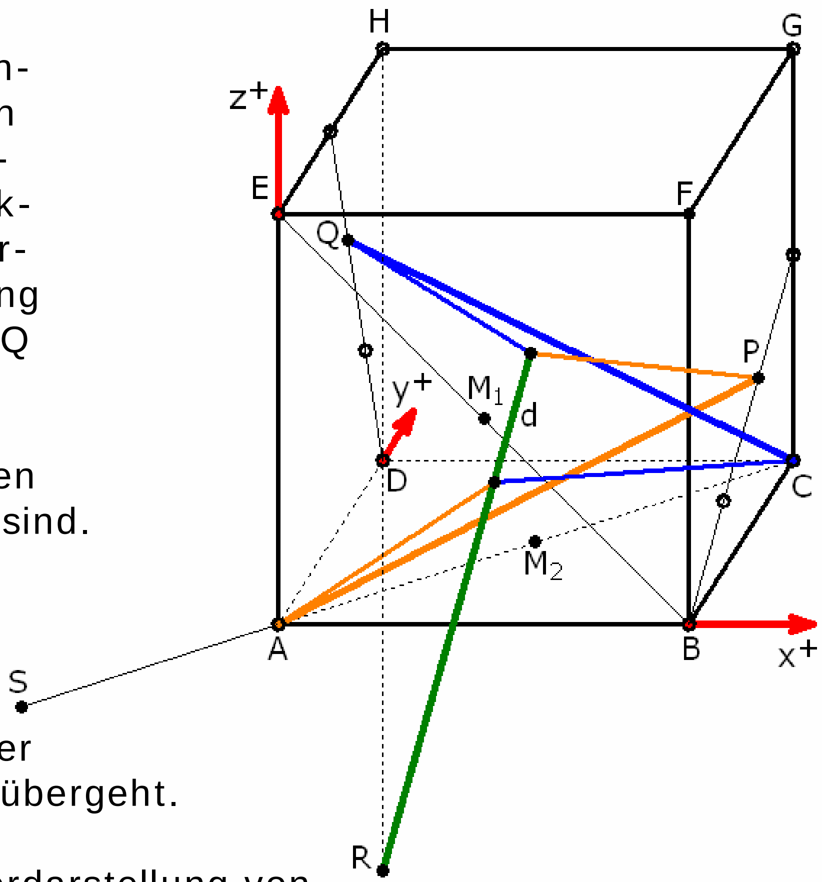
b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne die Koordinaten der entsprechenden Bahnkreismittelpunkte. Sind die Radien für beide Drehungen gleich groß?

c) Zeige, dass E auf d liegt und dass d zu einer Raumdiagonle parallel verläuft!

d) Zeige ohne Taschenrechner, dass der Drehwinkel exakt 120° beträgt!



14) Nebenstehende Abbildung zeigt einen Würfel der Kantenlänge 33, dessen Kanten CG und EH halbiert und anschließend mit den Eckpunkten B und D verbunden wurden, woraus durch Drittelung zunächst die Punkte P und Q hervorgehen.



a) Zeige, dass die Strecken AP und CQ gleich lang sind.

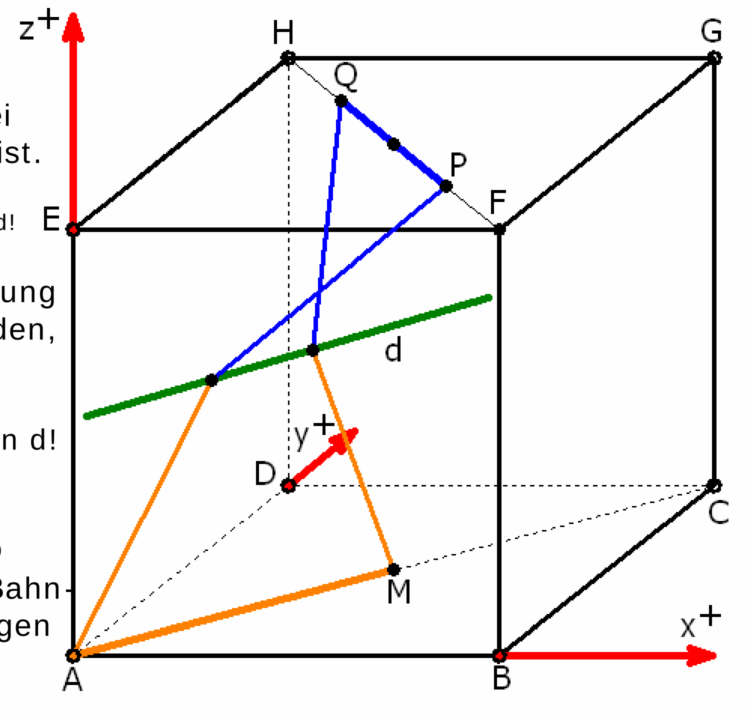
Wegen a) kann AP durch Drehung um eine Achse d derart in CQ gedreht werden, dass im Zuge dieser Drehung A in C und P in Q übergeht.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und berechne auch die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte sowohl für die Drehung von A nach C als auch für jene von P nach Q. Überprüfe die paarweise Übereinstimmung der entsprechenden Radien!

c) R ist der Spiegelpunkt von H an D. Kontrolliere, dass R auf d liegt!

d) M_1 und M_2 sind Mittelpunkte entsprechender Flächendiagonalen des Würfels, S der Spiegelpunkt von M_2 an A. Zeige, dass der zur Drehung zugehörige Drehwinkel zum Winkel $\sphericalangle GM_1S$ kongruent ist!

15) In nebenstehender Abbildung gehen die Punkte P und Q durch Viertelung der Flächendiagonale FH hervor. M ist der Mittelpunkt der Flächendiagonale AC, wobei der Würfel eine Kantenlänge von 68 aufweist.



a) Zeige, dass die Strecken AM und PQ gleich lang sind!

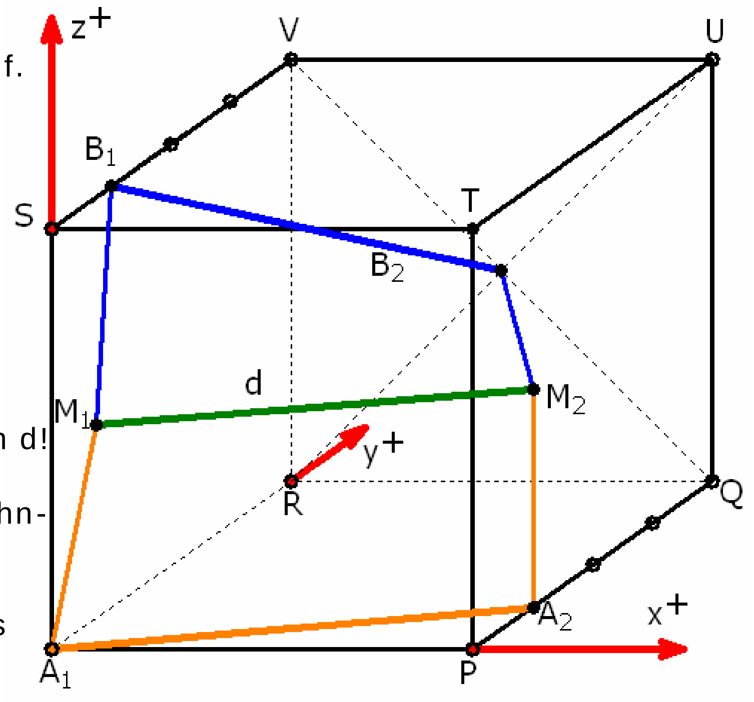
Wegen a) kann die Strecke AM durch Drehung um eine Achse d derart in PQ gedreht werden, dass A auf P und M auf Q abgebildet wird.

b) Bestimme eine Parameterdarstellung von d!

c) Ermittle sowohl für die Drehung von A nach P als auch für jene von M nach Q die Koordinaten des entsprechenden Bahnkreismittelpunkts, sowie den zugehörigen Bahnkreisradius und den Drehwinkel.

d) Kontrolliere, dass der Drehwinkel aus c) gleich dem Innenwinkel ∢AST des Parallelogramms ΔASTU [A(0/0/0), S(64/32/8), U(72/9/36)] ist und zeige ferner, dass die Diagonale TU normal zur Seite AT verläuft!

16) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 168 auf. A_2 und B_1 entstehen durch Viertelung der entsprechenden Würfelkante.



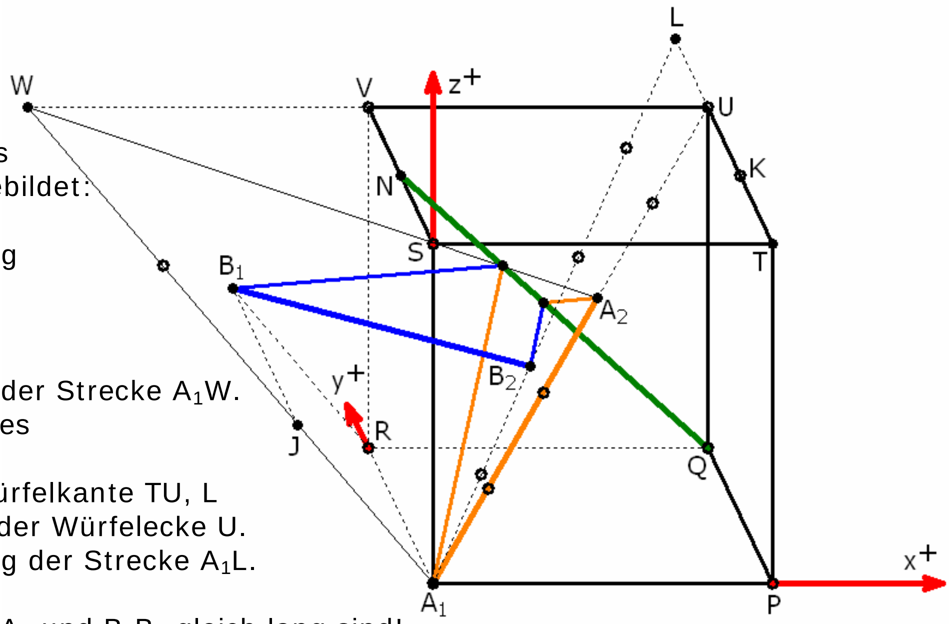
a) Zeige zunächst, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d!

c) Berechne auch die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte und zeige, dass alle vier Bahnkreisradien gleich groß sind! Überprüfe für den Drehwinkel φ jeweils die Gültigkeit von $\cos\varphi = -19/23$!

17) In der nebenstehenden Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 90 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:



- A_2 entsteht durch Fünftelung der Raumdiagonale A_1U.
- W ist der Spiegelpunkt der Würfelecke U an V.
- J entsteht durch Drittelung der Strecke A_1W.
- B_1 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms JA_1RB_2.
- K ist der Mittelpunkt der Würfelkante TU, L der Spiegelpunkt von K an der Würfelecke U.
- B_2 entsteht durch Fünftelung der Strecke A_1L.

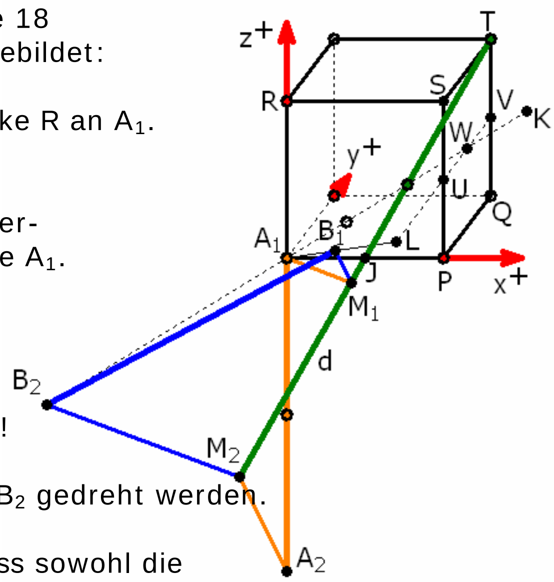
a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke Q als auch der Mittelpunkt N der Würfelkante SV auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und bestimme ferner das Verhältnis der Bahnkreisradien!

18) In der nebenstehenden Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 18 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:



- A_2 entsteht durch fortlaufende Spiegelung der Würfelecke R an A_1.
- U bzw. V ist der Mittelpunkt der Würfelkante PS bzw. QT und W der Mittelpunkt der Strecke UV.
- K geht durch fortlaufende Drittelung der Strecke A_1W hervor und B_2 ist der Spiegelpunkt von K an der Würfelecke A_1.
- L ist der Spiegelpunkt von V an U.
- B_1 entsteht durch Neuntelung der Strecke A_1L und ist von A_1 aus betrachtet der vierte Teilungspunkt.

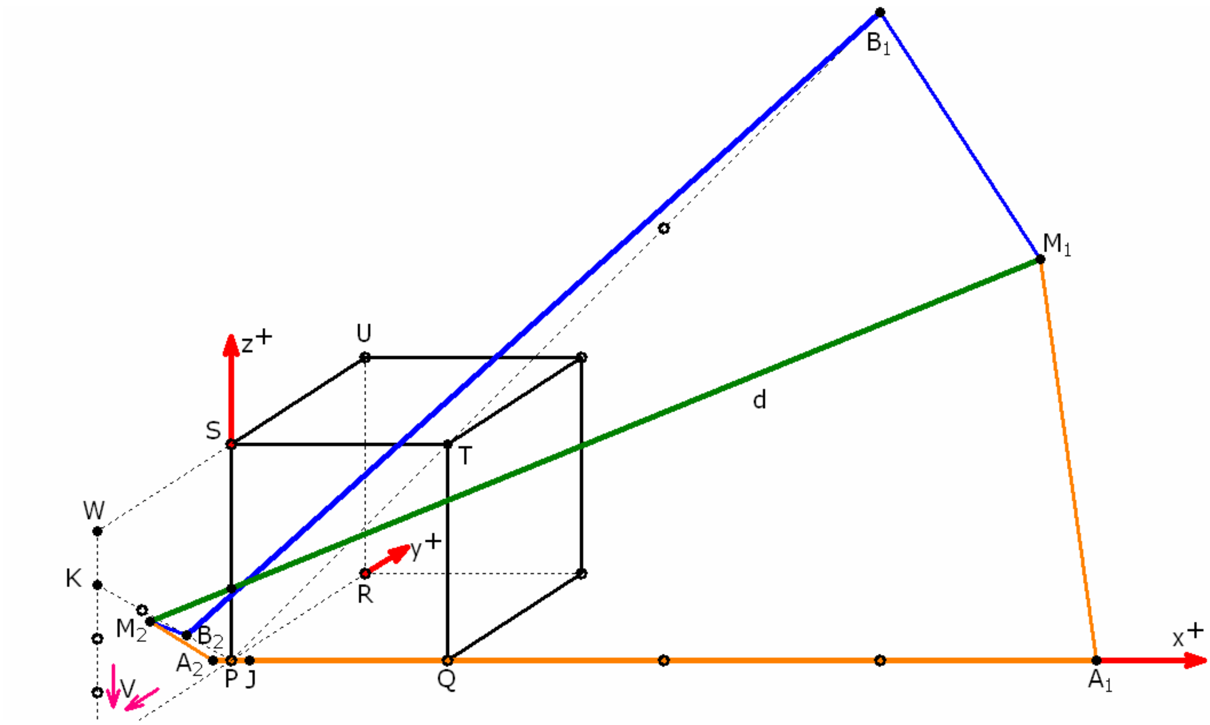
a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass sowohl die Würfelecke T als auch der Mittelpunkt J der Würfelkante A_1P auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2, ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ und bestimme ferner das Verhältnis der Bahnkreisradien! Überprüfe ferner, dass M_2 der Spiegelpunkt von T an J ist!

19)



Der abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 84. Der Punkt A_1 entsteht durch sukzessive Spiegelung der Würfelecke P an der Würfelecke Q. Der Punkt J geht aus Zwölftelung der Würfelkante PQ hervor und ist von P aus betrachtet der erste Teilungspunkt. A_2 ist der Spiegelpunkt von J an P. B_1 ist das Resultat einer fortlaufenden Spiegelung der Würfelecke P an der Würfelecke T. Ferner ist V bzw. W der Spiegelpunkt von R an P (in der Abbildung nur angedeutet!) bzw. von U an S. K entsteht durch Viertelung der Strecke VW, B_2 durch Drittelung der Strecke PK.

a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind.

Wegen a) läßt sich A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in die Strecke B_1B_2 überführen.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass d die Würfelkante PS im angegebenen (nicht beschrifteten) Punkt schneidet, welcher sich durch Drittelung von PS ergibt und von P aus betrachtet der erste Teilungspunkt ist.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte, die Bahnkreisradien, den Drehwinkel sowie das Verhältnis der Bahnkreisradien (Kommentar zu 707:95!).

20) Der Würfel in der Abbildung weist eine Seitenlänge von 36 auf.

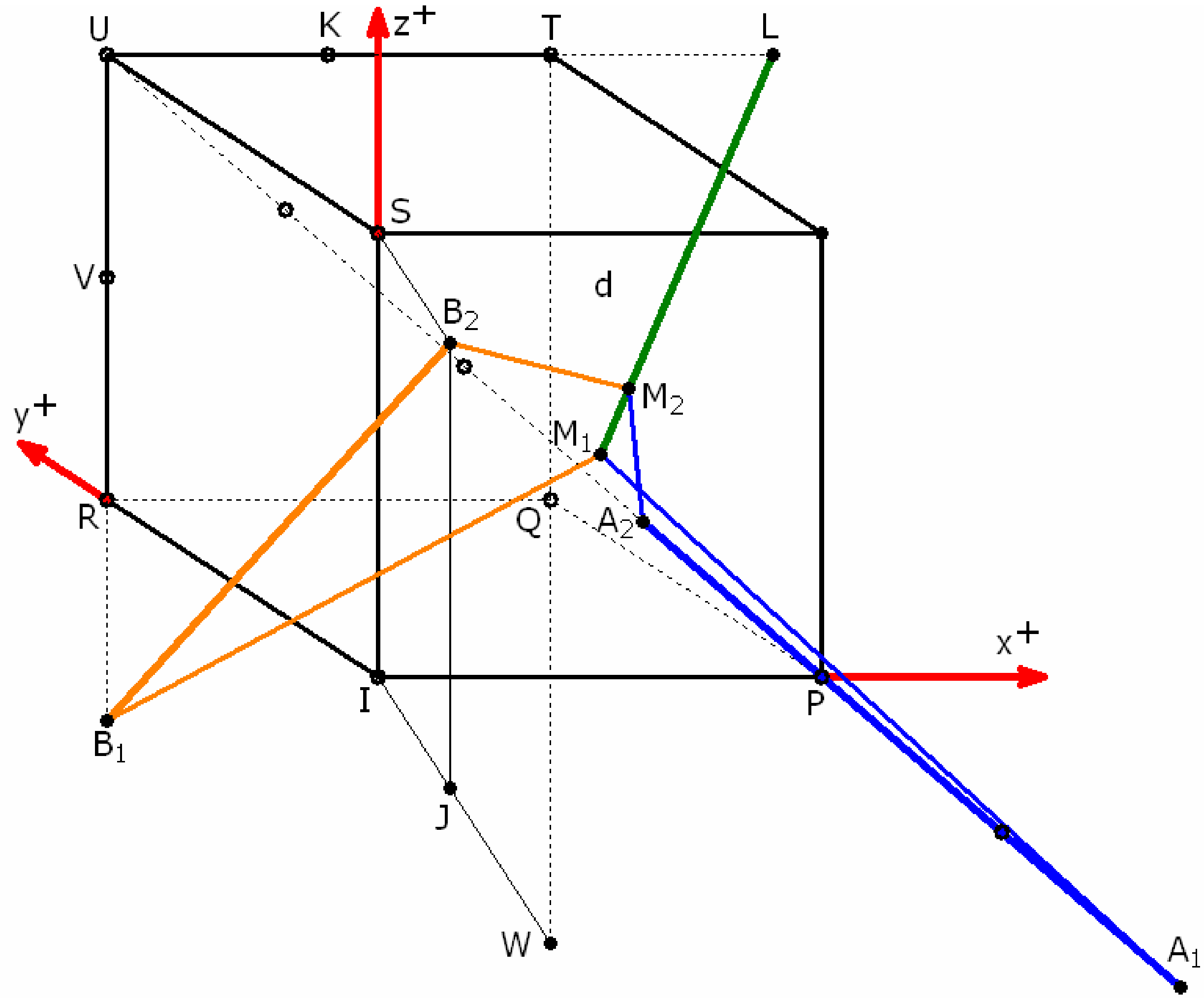
- Ø V ist der Mittelpunkt der Würfelkante RU.
- Ø B_1 ist der Spiegelpunkt von V an der Würfelecke R.
- Ø W ist der Spiegelpunkt der Würfelecke T an der Würfelecke Q.
- Ø J entsteht durch Zwölftelung der Strecke IW, wobei J von I aus betrachtet der fünfte Teilungspunkt ist.
- Ø B_2 ist der vierte Eckpunkt des Parallelogramms IJB_2S.
- Ø A_2 geht durch Viertelung der Raumdiagonale PU hervor und A_1 entsteht durch fortlaufende Spiegelung von A_2 an P.
- Ø K ist der Mittelpunkt der Würfelkante TU sowie L der Spiegelpunkt von K an der Würfelecke T.

a) Zeige zunächst, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind.

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehen um eine Achse d in B_1B_2 übergeführt werden.

b) Stelle eine Parameterdarstellung von d auf, zeige, dass d zur Gerade durch P und V parallel verläuft und weise ferner nach, dass L auf d liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2 und ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ. Ermittle ferner das Verhältnis der Bahnkreisradien (möglichst einfacher Wurzelaudruck) und überprüfe, dass M_1 der Mittelpunkt der Flächendiagonale PS ist. Zeige schließlich noch, dass einer der vier Bahnkreisradien Hauptlage (Welche?) aufweist und formuliere diesen Sachverhalt auch unter Verwendung der Begriffe "parallel", "Flächendiagonale" und "Verhältnis"!



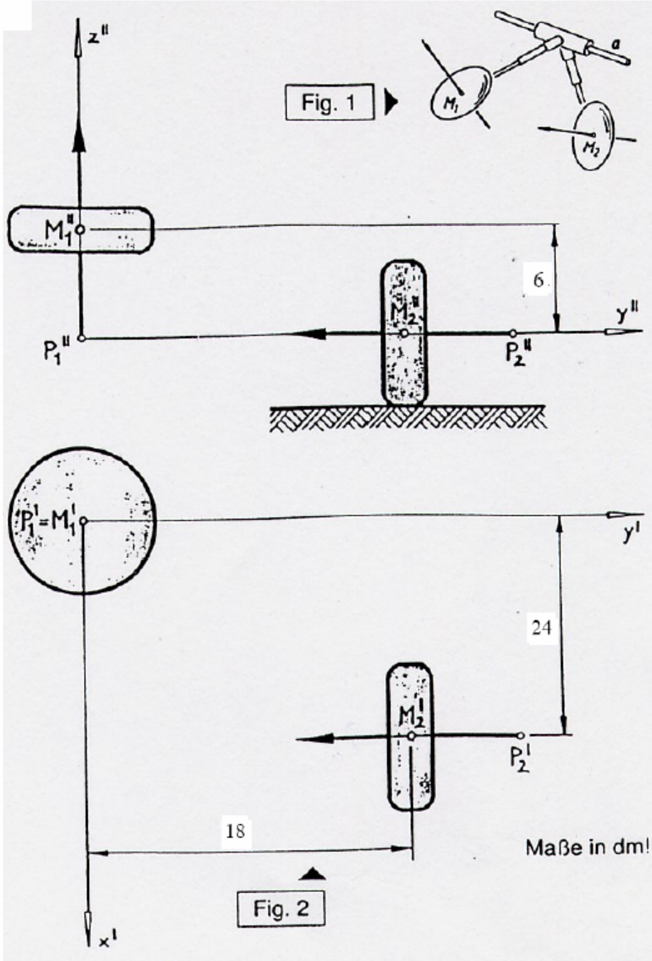
21) Ein Beispiel für eine praktische Anwendung der räumlichen Drehung:

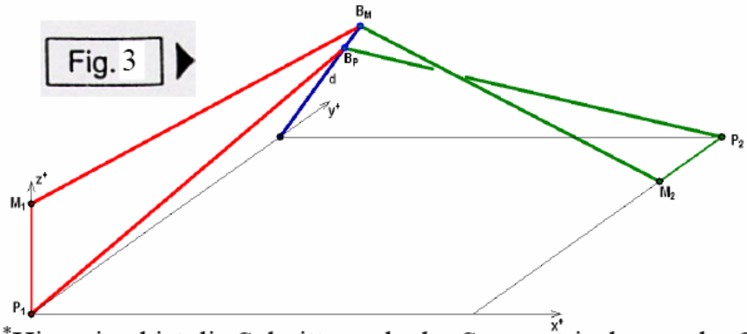
Fig. 1 zeigt das Rad eines Flugzeugfahrwerks, welches von der Startposition 1 (Radmittelpunkt M_1) durch Drehung um eine im Flugzeugrumpf untergebrachte Drehachse d in die Zielposition 2 (Radmittelpunkt M_2) transformiert wird. Ausgehend von der in Fig. 2 illustrierten Start- und Zielposition (Achtung! Fig. 1 ist nicht maßstabsgetreu!) sind folgende Aufgabenstellungen zu bearbeiten (Beachte dabei die Hilfspunkte P_1 und P_2!):

a) Ermittle eine Parameterdarstellung von d* (In Fig. 3 sind Start- und Zielposition, sowie der Drehvorgang in axonometrischer Darstellung illustriert!).

b) Berechne die Koordinaten des Bahnkreismittelpunkts für die Drehung von M_1 und M_2!

c) Bestimme das Maß des Drehwinkels für die Drehung des Rads von der Start- in die Zielposition!

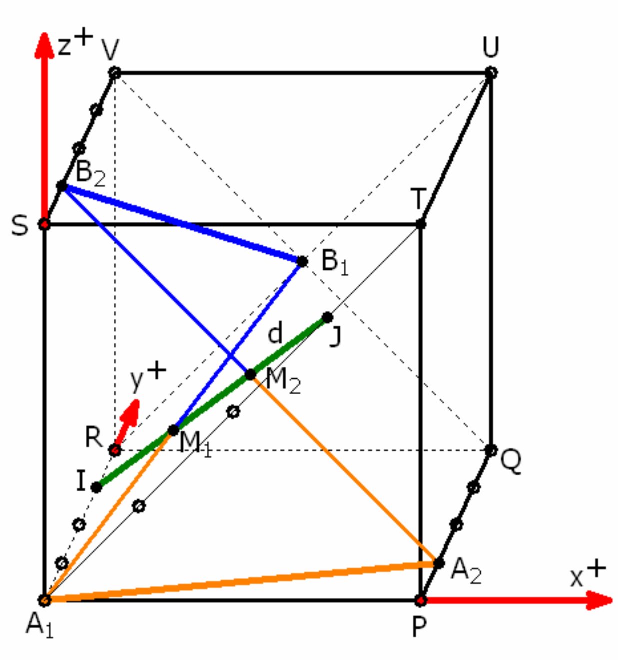




*Hinweis: d ist die Schnittgerade der Symmetrieebenen der Strecken M_1M_2 und P_1P_2!

Bemerkung: Eine CGI-Version dieser Aufgabenstellung findest du als Konstruktionsaufgabe (Beispiel 7) aus der Darstellenden Geometrie in deinem DG-Lehrbuch "Raumgeometrie" auf Seite 99!

22) Der in nebenstehender Figur abgebildete Würfel weist eine Seitenlänge von 4 auf. A_2 und B_1 entstehen durch Viertelung der entsprechenden Würfelkante. I und J entstehen durch Drittelung der Würfelkante A_1R bzw. der Flächendiagonale A_1T.



a) Zeige zunächst, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

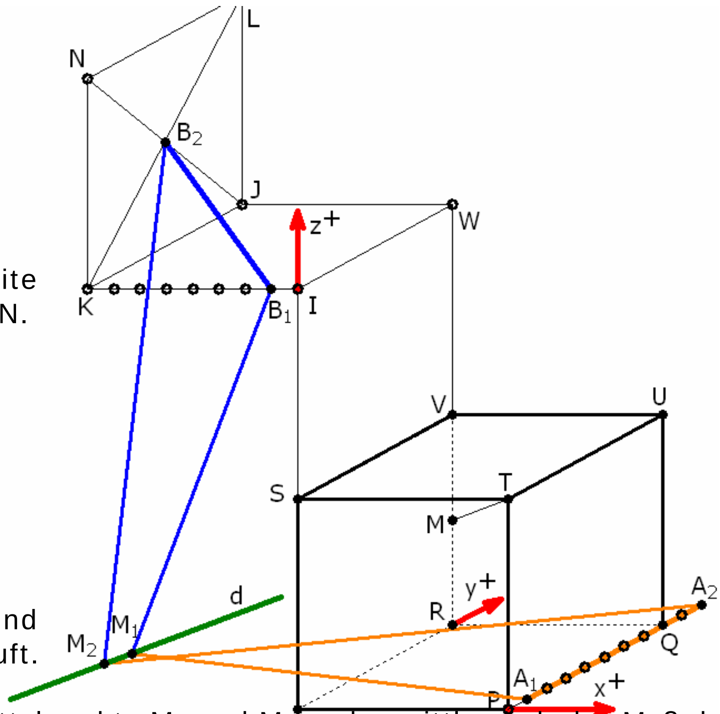
Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d! Zeige, dass d zu einer Raumdiagonale (Welcher?) parallel verläuft und ferner die Punkte I und J enthält!

c) Berechne auch die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte und begründe, warum sich die Drehung um d durch eine Spiegelung an d ersetzen läßt!

23) In der nebenstehenden Figur ist ein Würfel der Seitenlänge 24 zusammen mit weiteren aus ihm abgeleiteten Punkten abgebildet:

- A_1 und A_2 entstehen durch (fortlaufende) Achtelung der Würfelkante PQ.
- SVWI, IWJK und KJLN sind an den Würfel angefügte Quadrate.
- B_1 entsteht durch Achtelung der Quadratseite KI, B_2 ist der Mittelpunkt des Quadrats KJLN.
- M ist der Mittelpunkt der Würfelkante RV.



a) Zeige, dass die Strecken A_1A_2 und B_1B_2 gleich lang sind!

Wegen a) kann A_1A_2 durch Drehung um eine Achse d in B_1B_2 gedreht werden.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung von d und zeige, dass d parallel zur Gerade g_{MT} verläuft.

c) Berechne die Koordinaten der Bahnkreismittelpunkte M_1 und M_2 und ermittle auch das Maß des Drehwinkels φ. Zeige ferner, dass das Verhältnis der Bahnkreisradien ziemlich genau 10:7 beträgt und gib auch das exakte Verhältnis unter Verwendung der Quadratwurzel von 346 an! Kontrolliere außerdem, dass die Strecke M_1M_2 halb so lang ist als die Strecke MT.

Lösungen:

1) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 18 \cdot \sqrt{6}$
   b) d:X=(0|18|0)+t·(2|-1|2)
   c) M_1(24|6|24), M_2(4|16|24), φ=90°

2) d:X=(10|0|8)+t·(1|-1|1), cosφ=-13/14, alle vier Radien betragen 2·√14, ∢APQ ≈ 17°

3) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 81 \cdot \sqrt{2}$
   b) d:X=(0|18|36)+t·(-2|1|2)
   c) M_1(30|3|6), M_2(60|-12|-24), φ=90°, exaktes Verhältnis lautet 4·√10 : 1

4) a) $\overline{AP} = \overline{RQ} = 15 \cdot \sqrt{2}$
   b) d:X=(40|-10|0)+t·(0|1|2), Z_{AR}(40|-8|4), r_{AR}=4·√105, Z_{PQ}(40|-5|10), r_{PQ}=5·√21
   d) cosφ=-2/3

5) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 18 \cdot \sqrt{11}$
   b) d:X=(0|18|0)+t·(1|-2|2)
   c) M_1(2|14|4), M_2(8|2|16), φ=90°, alle vier Radien betragen exakt 30

6) a) $\overline{AP} = \overline{FQ} = 6 \cdot \sqrt{2}$
   b) d:X=(0|-8|8)+t·(1|0|-1), Z_{AF}(4|-8|4), r_{AF}=4·√6, Z_{PQ}(7|-8|1), r_{PQ}=√102, Begründung selbst!
   d) cosφ=1/3

7) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 12 \cdot \sqrt{14}$
   b) d:X=(9|0|0)+t·(-1|2|2)
   c) M_1(8|2|2), r_1=6·√2, M_2(4|10|10), r_2=6·√34, φ=90°

8) a) $\overline{BM} = \overline{PQ} = 2 \cdot \sqrt{2}$
   b) d:X=(2|5|0)+t·(1|0|1)
   c) Z_{BP}(3|5|1), r_{BP}=3·√3, Z_{MQ}(4|5|2), r_{PQ}=3, cosφ=1/3,
   d) Z_{MQ}M liegt parallel zur y-Achse

9) a) $\overline{PH} = \overline{CQ} = 10 \cdot \sqrt{2}$

b) d:X=(5|20|0)+t·(1|0|2), Z_{CP}(8|20|6), Z_{HQ}(12|20|14), alle vier Radien betragen 6·√5

c) $Z_{CP}C$ und $Z_{HQ}H$ verlaufen zueinander parallel

d) cosφ=-2/3

10) a) $\overline{PQ} = \overline{RS} = 2 \cdot \sqrt{17}$

b) d:X=(10|0|9)+t·(1|1|0), Z_{PR}(5|-5|9), Z_{QS}(9|-1|9), cosφ=1/3, d parallel zu AC und EG

11) a) $\overline{PQ} = \overline{RS} = 2 \cdot \sqrt{17}$

b) d:X=(3|4|0)+t·(0|1|1), Z_{PR}(3|3|-1), Z_{QS}(3|8|4), cosφ=-1/3, d parallel zu AH und BG, $Z_{PR}P$ liegt parallel zu EC

12) a) $\overline{AP} = \overline{QR} = 6$

b) d:X=(24|0|12)+t·(1|-1|1), Z_{AR}(12|12|0), r_{AR}=12·√2, Z_{PQ}(14|10|2), r_{PQ}=2·√42

c) d liegt parallel zu DF

13) a) $\overline{AP} = \overline{QF} = 6$

b) d:X=(0|0|12)+t·(-1|1|1), Z_{AF}(4|-4|8), r_{AF}=4·√6, Z_{PQ}(6|-6|6), r_{PQ}=6·√2

c) d liegt parallel zu BH

14) a) $\overline{AP} = \overline{CQ} = 11 \cdot \sqrt{14}$

b) d:X=(0|33|-33)+t·(1|-1|3), Z_{AC}(12|21|3), r_{AC}=3·√66, Z_{PQ}(16|17|15), r_{PQ}=√330

d) cosφ=-5/6

15) a) $\overline{AM} = \overline{PQ} = 34 \cdot \sqrt{2}$

b) d:X=(17|170|-0)+t·(0|4|-1),

c) Z_{AP}(17|10|40), r_{AP}=3·√221, Z_{MQ}(17|42|32), r_{MQ}=9·√17, cosφ=-8/9

16) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 42 \cdot \sqrt{17}$

b) d:X=(7|-7|91)+t·(5|4|-1)

c) M_1(17|1|89), M_2(137|97|865), r_1=r_2=√8211

17) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 54 \cdot \sqrt{3}$

b) d:X=(0|45|90)+t·(2|1|-2)

c) M_1(30|60|60), M_2(42|66|48), φ=90°, Radienverhältnis: r_1:r_2=5:1

18) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 36$

b) d:X=(9|0|0)+t·(1|2|2)

c) M_1(8|-2|-2), M_2(0|-18|-18), φ=90°, Radienverhältnis: r_1:r_2=1:3

19) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 343$

b) d:X=(0|0|28)+t·(6|3|2)

c) M_1(240|120|108), M_2(-12|-6|24), φ=90°, Radienverhältnis: r_1:r_2=12:13·√65

20) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 27 \cdot \sqrt{3}$

b) d:X=(18|0|18)+t·(2|2|1)

c) M_1(18|0|18), M_2(24|6|21), φ=90°, Radienverhältnis: r_1:r_2=3√2:1,
M_2B_2 weist erste Hauptlage auf, Rest selbst!

21) a) d:X=(24|0|24)+t·(1|-1|1); Beachte, dass $\overline{M_1P_1} = \overline{M_2P_2} = 6$
gelten muss, woraus (gemäß der Abbildung) P_2(24|24|0) folgt!

b) B_M(10|14|10)

c) φ=120°

22) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \sqrt{17}$

b) d:X=(0|3|0)+t·(1|-1|1), d verläuft parallel zu RT

c) M_1(1|2|1)=M_{A1B1}, M_2(2|1|2)=M_{A2B2}, ergo: φ=180°, Begründung selbst!

23) a) $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = 27$

b) d:X=(-33|9|0)+t·(2|-2|1), c) M_1(-5|-9|14), M_2(-17|-7|8), φ=90°, Radienverhältnis: r_2:r_1=√346:13