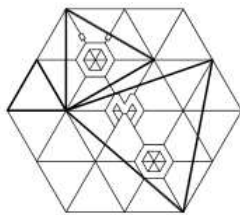


# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 1/7)

- Zur Herausforderung ein Beispiel aus einem Gebietswettbewerb (für Fortgeschrittene!):



## 37. Österreichische Mathematik Olympiade Gebietswettbewerb für Fortgeschrittene 27. April 2006

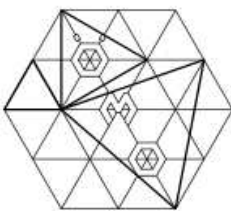
1. Es seien  $0 < x < y$  reelle Zahlen und

$$H = \frac{2xy}{x+y}, \quad G = \sqrt{xy}, \quad A = \frac{x+y}{2}, \quad Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

das harmonische, geometrische, arithmetische und quadratische Mittel von  $x$  und  $y$ . Bekanntermaßen gilt  $H < G < A < Q$ .

Man ordne die Intervalle  $[H, G]$ ,  $[G, A]$  und  $[A, Q]$  aufsteigend nach ihrer Länge.

- Zur Anwendung eines Teils der QAGH-UGL-Kette:



## 41. Österreichische Mathematik Olympiade Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger 15. Juni 2010

3. Es seien  $x$  und  $y$  positive reelle Zahlen mit  $x + y = 1$ .

Man beweise:

$$\frac{(3x-1)^2}{x} + \frac{(3y-1)^2}{y} \geq 1.$$

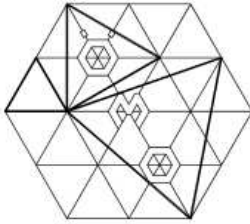
Für welche  $x$  und  $y$  gilt Gleichheit?



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 2/7)

- Zum Experimentieren:



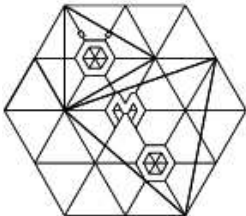
**31. Österreichische Mathematik Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
15. Juni 2000

2. Es seien  $a$  und  $b$  positive reelle Zahlen. Man beweise die Ungleichung

$$\frac{(a+b)^3}{a^2b} \geq \frac{27}{4}.$$

Wann gilt Gleichheit?

- Ohne den Beitrag schon fast zu leicht ...



**39. Österreichische Mathematische Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
17. Juni 2008

3. Man beweise für alle reellen Zahlen  $a, b$  mit  $a+b \neq 0$  die Ungleichung

$$\frac{a+b}{a^2-ab+b^2} \leq \frac{4}{|a+b|}.$$

Wann gilt Gleichheit?

# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 3/7)

- „Zweifachmutter“! ;-)



**40. Österreichische Mathematik Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
23. Juni 2009

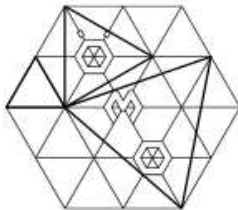
2. Es seien  $x$  und  $y$  nichtnegative reelle Zahlen.

Man zeige:

$$(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2.$$

Wann gilt Gleichheit?

- (Den Weg zur) Mutter (finden IST NICHT IMMER LEICHT!):



**42. Österreichische Mathematische Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
16. Juni 2011

3. Es seien  $x, y$  positive reelle Zahlen mit

$$x + y + xy = 3.$$

Man beweise, dass

$$x + y \geq 2.$$

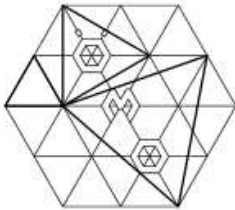
Wann gilt Gleichheit?



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 4/7)

- Mutter und Vorzeichen-„Falle“:



## 43. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

11. Juni 2012

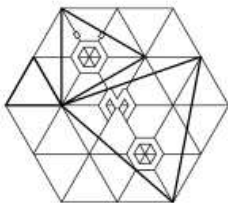
3. Es seien  $a$  und  $b$  zwei positive reelle Zahlen mit  $a \leq 2b \leq 4a$ .

Man zeige, dass dann immer

$$4ab \leq 2(a^2 + b^2) \leq 5ab$$

gilt.

- Nicht misstrauisch sein:



## 45. Österreichische Mathematik-Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

12. Juni 2014

3. Es seien  $a, b, c$  und  $d$  reelle Zahlen mit  $a < b < c < d$ .

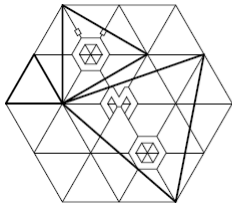
Man ordne  $x = a \cdot b + c \cdot d$ ,  $y = b \cdot c + a \cdot d$  und  $z = c \cdot a + b \cdot d$  der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge.



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 5/7)

- AG-UGL!!



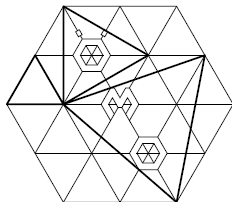
**46. Österreichische Mathematik-Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
9. Juni 2015

2. Für die positiven reellen Zahlen  $x$  und  $y$  gilt die Bedingung  $xy = 4$ .  
Man beweise, dass die Ungleichung

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}$$

gilt. Für welche  $x, y$  tritt Gleichheit ein?

- MUTTER!!



**47. Österreichische Mathematik-Olympiade**  
Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger  
16. Juni 2016

2. Man beweise, dass für alle reellen Zahlen  $x \neq -1$ ,  $y \neq -1$  und mit  $xy = 1$  die folgende Ungleichung gilt:

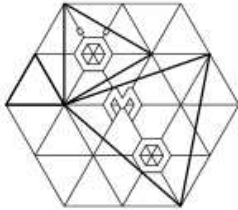
$$\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2+y}{1+y}\right)^2 \geq \frac{9}{2}$$



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 6/7)

- AG-UGL!!



## 44. Österreichische Mathematische Olympiade

Landeswettbewerb für Anfängerinnen und Anfänger

13. Juni 2013

3. Es seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen mit  $0 \leq a, b \leq 1$ . Man beweise:

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit?

- AH-UGL!!

Raach 2012

Ungleichungen Seite 4

Birgit Vera Schmidt

41. Man zeige für alle  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ :

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \geq a + b + c$$

- *Niederländische Mathematikolympiade 1965:*

Man zeige für beliebige reelle  $a$  und  $b$ :  $(a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$

Diese Herausforderung packen wir auf zweierlei Arten an, nämlich durch einen "Direkt-Angriff" bzw. mittels QA-UGL (als Kontrast danach!).



# Mathematik-Olympiadekurs für Anfänger

2016/17, Dr. Resel, Di 14.45-16.25, Einheiten 3 bis 7: 18. u. 25. 10. sowie 8., 22. u. 29. 11. 2016 (Blatt 7/7)

- BOHRsche Ungleichung:

$$(a + b)^2 \leq (1 + c)a^2 + \left(1 + \frac{1}{c}\right)b^2 \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ sowie } c \in \mathbb{R}^+$$

- Zuletzt: Für beliebige reelle Zahlen  $x$  und  $y$  gilt entweder

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq \sqrt{5} \quad \text{oder} \quad \frac{x+y}{x} + \frac{x}{x+y} \geq \sqrt{5}.$$

Für Interessierte bzgl. Verfassen mathematischer Texte mit LaTeX am linken Rand der Quelltext der letzten drei Aufgaben!

Mit Adventbeginn wechseln wir dann das Themengebiet und gehen vom Kapitel „UNGLEICHUNGEN“ zu einem der folgenden Schmäckerln über ...

- GLEICHUNGEN
- GEOMETRIE
- ZAHLENTHEORIE („SPIELTHEORIE“, aber nicht mit der echten SPIELTHEORIE – u.a. John Nash – zu verwechseln)

..., welchem wir uns dann im Dezember und Jänner widmen werden (3. bzw. 4. Thema dann im Februar/März bzw. März/April/Mai).

Bei Lion King, Martini-Martoni, Hat-Man, Super-Mario, Tokio, Eva, Charly, Ma(m)i & co wird es jedenfalls alles andere als langweilig werden! ☺

Wien, im Oktober 2016.

Dr. Robert Resel, eh.