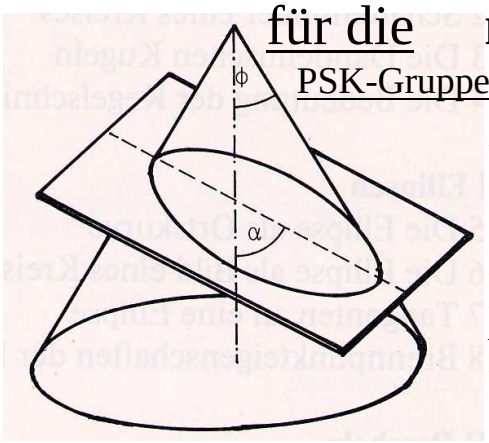
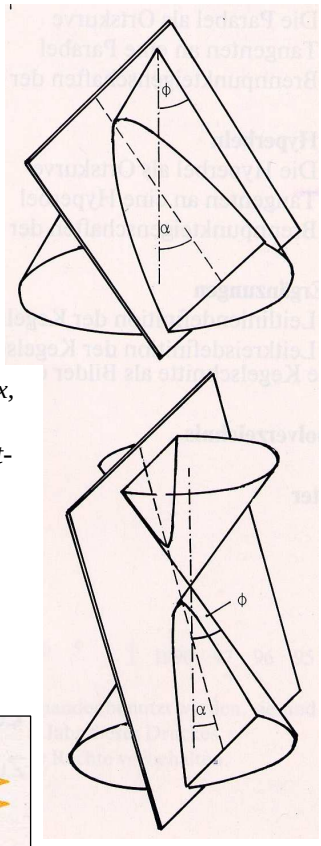
Digitaler Ausschnitt für die PSK-Gruppe

Übungsaufgaben zur Parabel (Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene, Teil 2)

(7B, Gymnasium, PM3, WS 2007/08)

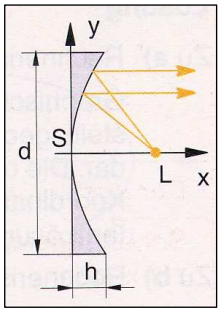




Diese Beispiele sollen durch jene für den ersten Teil der nichtlinearen analytischen Geometrie (Teil 1 bzw. 3 betrifft die Ellipse und die Hyperbel!) relevanten Grundaufgaben [Gleichung einer Parabel in erster Hauptlage, Bedeutung des Parabelparameters p als Normalabstand des Focus zur Direktrix, Reflexionseigenschaft und Tangenten, Berührungsbedingung, Ablesen des Berührpunkts einer Parabeltangente aus der Spalt-Form, Pol und Polare] führen, die du bei der Schularbeit im Jänner 2008 ***in jedem Fall*** *unter Beweis stellen wirst müssen.*

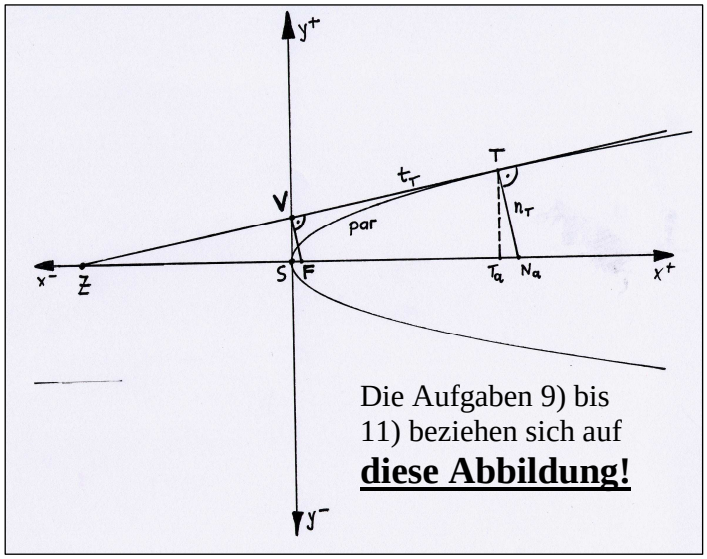
AUFGABEN 6 BIS 11 ZUR PARABEL:

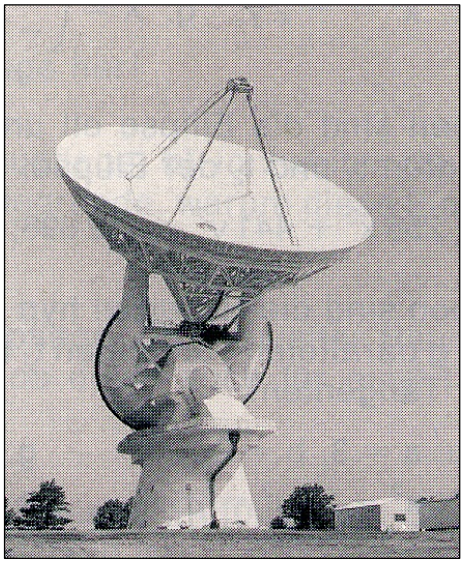
6) Erläutere (wenn notwendig unter Zuhilfenahme weiterer Informationsquellen außer deiner Kenntnis aus dem Unterricht und deinem Hausverstand), wie die Reflexionseigenschaft der Parabel(tangente) für das Wirkungsprinzip sowohl von Parabolspiegelteleskopen (rechte untere Abbildung) als auch Parabolantennen verwendet wird!



7) Erläutere anhand der nebenstehenden Abbildung (welche einen Längs- oder Meridianschnitt durch einen Parabolscheinwerfer darstellt und in ikonischer Form bereits sein Wirkungsprinzip illustriert), wie die Reflexionseigenschaft der Parabel(tangente) für das Funktionieren eines Parabolscheinwerfers verantwortlich ist.

8) Fortsetzung von Aufgabe 7: Ein Parabolscheinwerfer hat einen Durchmesser von d=48cm und eine Tiefe von h=8cm. In welcher Entfernung vom Scheitel S muss eine Lichtquelle L auf der Parabelachse angebracht werden, damit ein Achsenparalleles Strahlenbündel entsteht?





9) Schneidet man die Normale n_T an eine Parabel par in T mit der Parabelachse, so ist

a) am Beispiel der Parabel in erster Hauptlage durch den Punkt T(3|12),

b) am Beispiel der Parabel in erster Hauptlage durch den Punkt T(5|20),

c) am Beispiel einer Parabel in erster Hauptlage durch einen selbst gewählten Punkt

nachzuweisen, dass $\overline{T_a N_a}$ dem Parabelparameter p entspricht.

10) Legt man durch durch den Schnittpunkt V einer beliebigen Parabeltangente mit der Scheitelpunkttangente eine Normale, so verläuft diese Normale stets durch den Parabelbrennpunkt F. Weise dies

a) am Beispiel der Parabel in erster Hauptlage durch den Punkt T(2|12),

b) am Beispiel der Parabel in erster Hauptlage durch den Punkt T(6|24),

c) am Beispiel einer Parabel in erster Hauptlage durch einen selbst gewählten Punkt

nach!

11) Wie Beispiel 9) und 10) mit dem allgemeingültigen Sachverhalt, dass F stets der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔZN_aT ist! (Hinweis: Satz von THALES!)

AUSWAHL WEITERER (FÜR DIE PSK-GRUPPE GEIGGNETER) AUFGABEN:

12) Gegeben ist das Sechseck ABCDEF[A(0|–2), B(1|–10), C(16|–40), D(–32|–16), E(4|20), F(0|4)].

a) Zeige, dass dieses Sechseck ein Tangentensechseck einer Parabel par in erster Hauptlage ist und stelle eine Gleichung von par auf!

b) Verifiziere anhand dieses Tangentensechsecks den Satz von BRIANCHON!

c) Berechne die Koordinaten der Berührungspunkte der Sechseckseiten mit der Parabel und verifiziere anhand des aus diesen sechs Punkten hervorgehenden Sechsecks den Satz von PASCAL!

16) In einem rechts vom Brennpunkt liegenden Punkt P(u|v>0) einer Parabel in erster Hauptlage sowie dem dazu bezüglich der Parabelachse symmetrisch liegenden Punkt Q(u|–v) wird jeweils die Parabeltangente gelegt. Ferner wird in einem der beiden Punkte die Kurvennormale gelegt, welche dann gemeinsam mit den beiden Tangenten ein rechtwinkliges Dreieck begrenzt. Dann gilt folgender

SATZ. Der Flächeninhalt A dieses Dreiecks beträgt $A = 2uv \cdot \frac{2u+p}{2u-p}$ (wobei p den Parabelparameter bezeichnet).

Verifiziere diesen Satz anhand folgender konkreter Parabel par in erster Hauptlage:
F(15|0) ist der Brennpunkt von par, die Gerade g[F, I(75|32)] schneidet par in zwei Punkten, von denen nur einer ganzzahlige Koordinaten ("Gitterpunkt") hat. Wähle diesen Punkt als P!

17) SATZ. Legt man durch den Brennpunkt einer Parabel par eine Gerade g, ermittelt die Schnittpunkte S_1 und S_2 von g mit par und legt ebenda die Tangenten an par, so schneiden diese Tangenten einander in einem Punkt der Leitgerade von par.

Verifiziere diesen allgemeingültigen Lehrsatz am Beispiel der Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F(4|0) und der Gerade g[F, I(10|8)]!

19) SATZ. Gehen die Kurvennormalen dreier Parabelpunkte A, B und C durch einen gemeinsamen Punkt N, so verläuft der Umkreis des Dreiecks ΔABC durch den Parabelscheitel.

Verifiziere diesen Satz anhand jener Parabel in erster Hauptlage, welche die Gerade t [t: x – 10y + 50 = 0] als Tangente besitzt für die folgenden drei Punkte (Überprüfe zunächst, dass die drei Normalen einander überhaupt in einem gemeinsamen Punkt schneiden!) A, B und C:
A und B sind die Schnittpunkte von par mit der Gerade g [g: x + 2y = 6], C ist durch $C(x_C|4)$ gegeben.

21) Ist P der Schnittpunkt jener Parabeltangenten, die man in den Endpunkten einer durch den Brennpunkt F einer Parabel par verlaufenden Sehne g an par legt, so gelten stets der folgende Lehrsatz:

SATZ. $g_{PF} \perp g$

Verifiziere diesen Satz anhand der Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F(16|0), wobei g zur Tangente an par in $T(x_T|24)$ parallel verläuft!

22) Der Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F(2|0) ist das Dreieck ΔPQR[P(0|0), $Q(2|y_Q<0)$, $R(8|y_R>0)$] eingeschrieben. Stelle Gleichungen der Tangenten an par in den Eckpunkten dieses Dreiecks auf und schneide jede dieser Tangenten mit der Trägergerade der gegenüberliegenden Dreieckseite. ***Verifiziere den allgemeingültigen Satz, demzufolge diese drei Schnittpunkte kollinear liegen.***