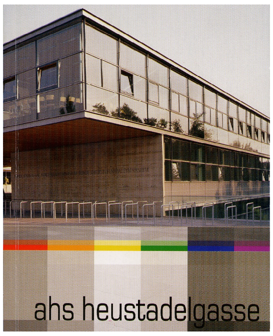
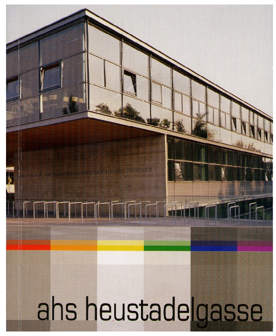


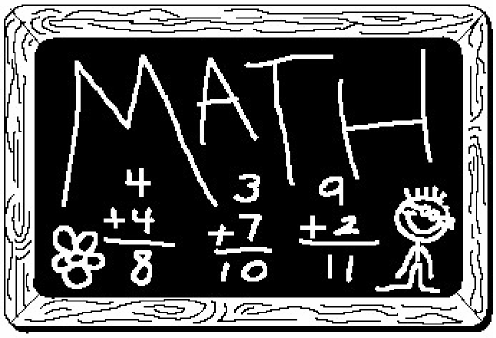
Übungsbeispiele für die schriftliche Matura

(8A, Gymnasium, 2012/13)

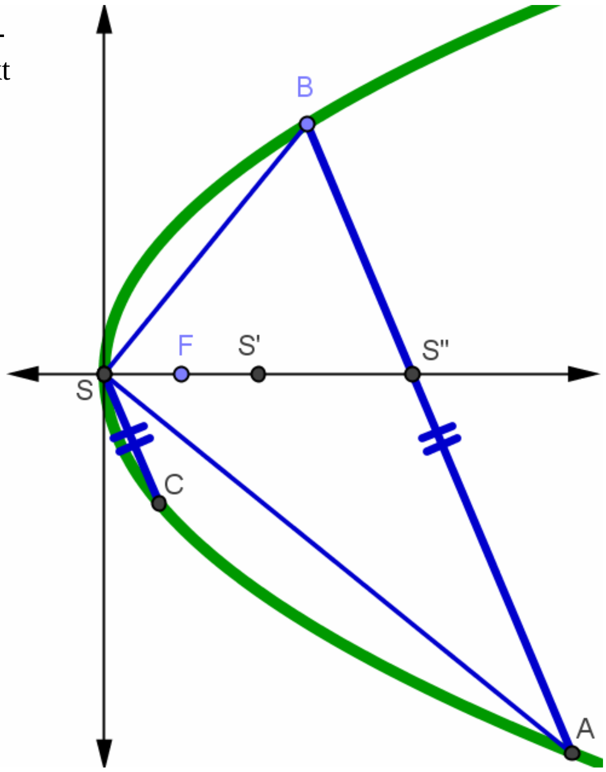


Diese Beispiele sollen durch die für die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Analytischen Geometrie der Kegelschnitte** *(speziell: der Parabel) ein Kapitel der 7. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*

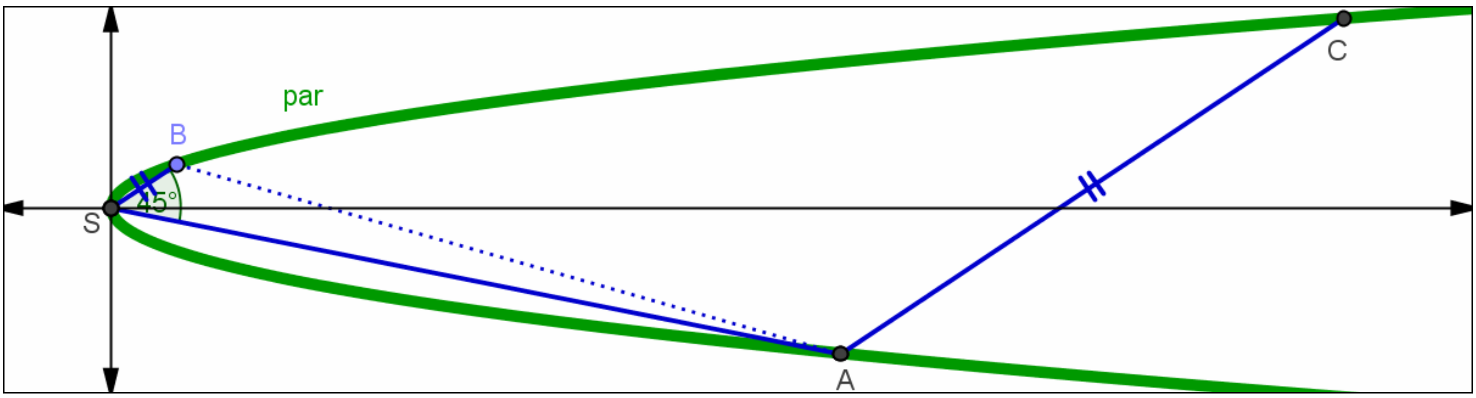
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!

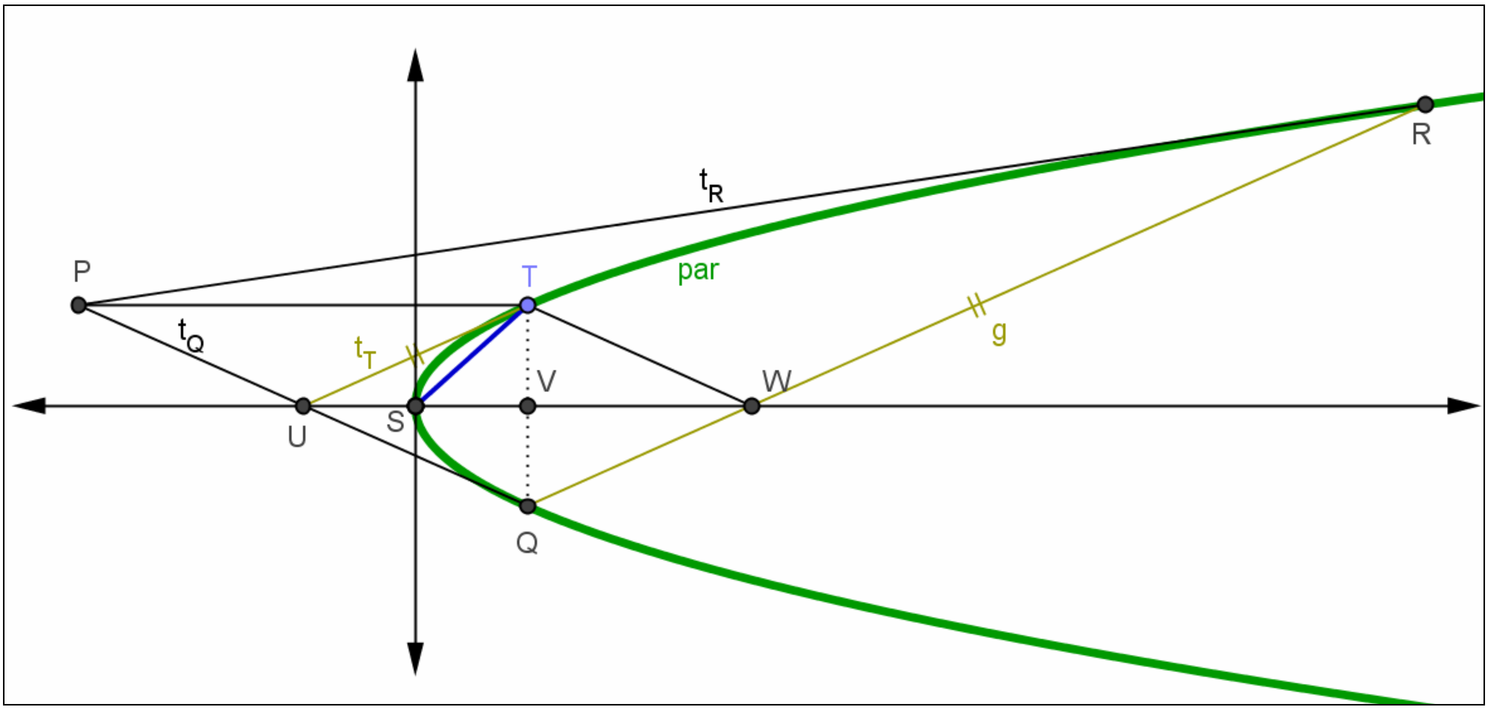


1) Das Parabeldreieck in der Abbildung ist rechtwinklig mit der Hypotenuse AB, S' ist der Spiegelpunkt des Parabelscheitels S am Parabelbrennpunkt F, S'' der Spiegelpunkt von S an S'. Dann gilt:
   a) $S'' \in g_{AB}$
   b) $x_C = x_A + x_B - 2x_{S''}$
   c) $y_C = y_A + y_B$
   Bestätige all dies am Beispiel B(256|320)!



2) In der unteren gerahmten Figur ist eine Parabel par mit ihrem Scheitel sowie drei ihrer Punkte abgebildet, wobei sich B und C aus A (oder auch A und C aus B) ergeben und dann folgendes gilt: Der Flächeninhalt A des Dreiecks ΔSAB beträgt $\boxed{A = \frac{x_A \cdot y_B \cdot y_C}{2 \cdot y_A}}$.
   Überprüfe dies für den Punkt A(100|–20)!





3) In der oberen Figur ist ein Punkt T einer Parabel par samt Tangente t_T abgebildet, woraus sich in weiterer Folge U ($t_T \cap$Parabelachse), V (Spiegelpunkt von U am Parabelscheitel S), W (Spiegelpunkt von U an V) sowie die Parallele g zu t_T durch W samt Tangenten in den Schnittpunkten von g mit par ergeben.
Dann gelten stets die folgenden Eigenschaften:

I) $M_{TQ}=V$
II) g_{PT} verläuft parallel zur Parabelachse
III) UWTP ist ein Parallelogramm.

Überprüfe diese Eigenschaften am einfachen Beispiel des Punkts T(1|1)!

4) t [t: 3x – 8y + 192 = 0] ist Tangente an eine Parabel par in erster Hauptlage.

a) Berechne den Parameter p von par und stelle sowohl eine Gleichung von par als auch eine Gleichung der Tangente t_T an par in $T(x_T|24)$ auf!

b) Lege durch F die Parallele g zu t_T und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B von g mit par.

c) Berechne $\ell = \overline{AB}$ und bestätige am konkreten Beispiel den allgemeingültigen

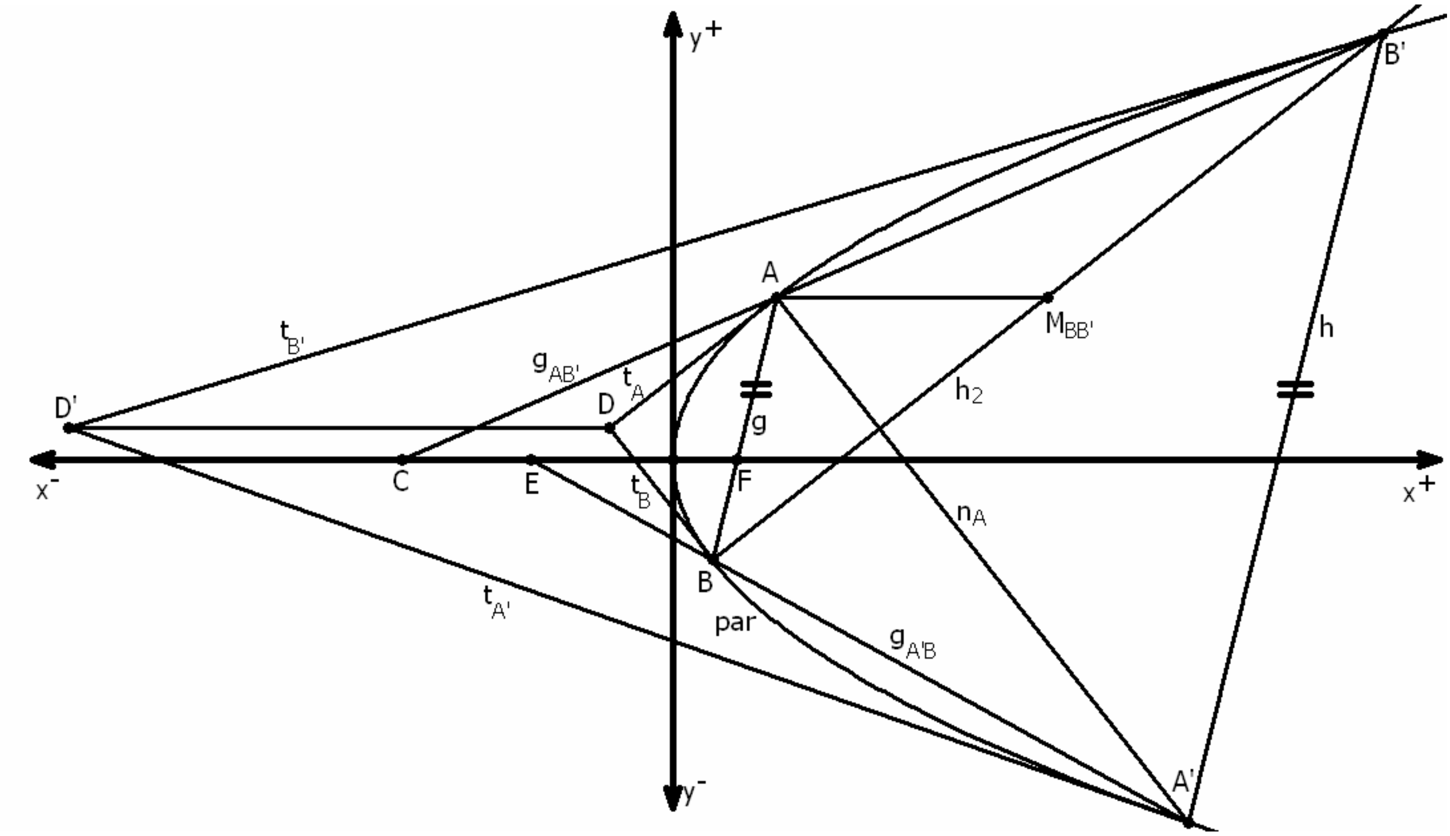
SATZ: Ist g die Parallele zu einer Tangente an eine Parabel par in erster Hauptlage (Parameter p) im Punkt $T(x_T|y_T)$ durch den Parabelbrennpunkt F, so schneidet g aus par eine Sehne der Länge

$$\ell = 4x_T + 2p$$ aus.

5) Legt man ausgehend von einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Parameter p in den Endpunkten A und B einer durch den Brennpunkt verlaufenden Parabelsehne s die Tangenten, so bildet deren Schnittpunkt C zusammen mit A und B ein Dreieck ΔABC mit dem Schwerpunkt S.
Verifiziere anhand des Punkts A(3|–18), dass S auf der Parabel mit der Gleichung $4y^2=p(6x-p)$ liegt.

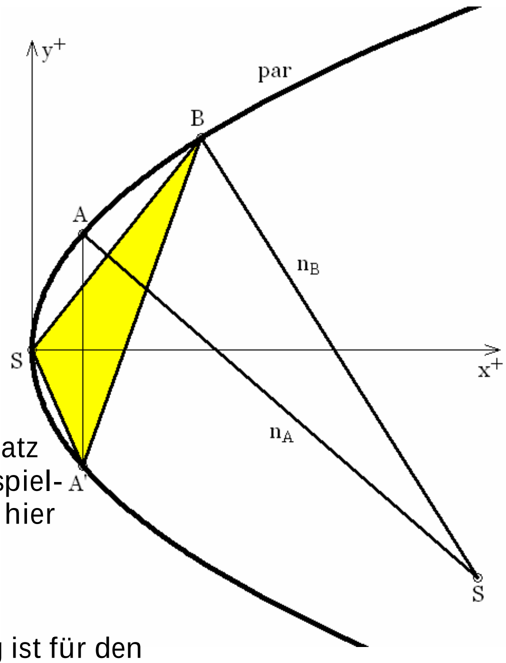
6) Legt man ausgehend von einer Parabel par in erster Hauptlage in den Endpunkten A und B einer durch den Brennpunkt F verlaufenden Parabelsehne s die Tangenten und betrachtet sowohl den Mittelpunkt D der Parabelsehne als auch den Schnittpunkt C der beiden Tangenten, dann gilt stets die Formel $\overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{x_A} + \sqrt{x_B}\right)^2$.
Verifiziere diese Formel für den Punkt A(81|54)!

7) A und B seien die Endpunkte einer durch den Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Parameter p gehende Parabelsehne, g deren Parallele durch den Parabelscheitel. Ferner sei C der zweite gemeinsame Punkt von g und par. Verifiziere am Beispiel von A(1|–4) die Formel $\boxed{x_C = x_A + x_B - p}$.

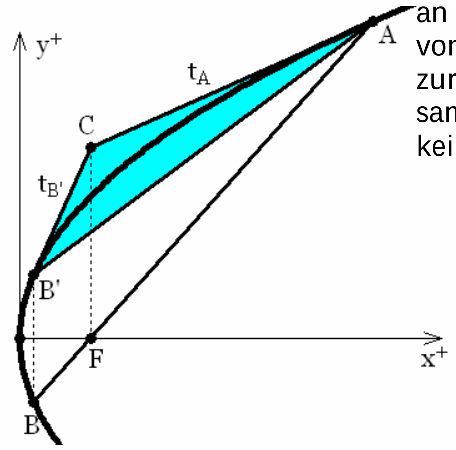


8) Die in obiger Figur illustrierte Konfiguration beinhaltet weitaus mehr Eigenschaften als jene für diese Aufgabe **wesentliche**, weshalb hier der Focus lediglich auf A, B, F, A' und B' zu legen ist. **Satz.** h_2 ist die Normale auf par in B

Verifiziere dies für A(256|128)!



9) Gemäß nebenstehender Abbildung ist für die Punkte $A(x_A|12)$ und B(12|24) einer Parabel par in erster Hauptlage die Gültigkeit des folgenden Lehrsatzes zu zeigen: Für $\{S\}=n_A \cap n_B$ gilt $|x_S|=x_A+x_B+x_T+2x_F$, wobei T den Schnittpunkt der Tangenten an par in A und B sowie F den Brennpunkt von par bezeichnet und A' [ganz im Gegensatz zur Parabelübungsaufgabe 20) aus der Beispielsammlung in der 7A vor ca. 1½ Jahren! ☺] hier keine weitere Bedeutung hat!



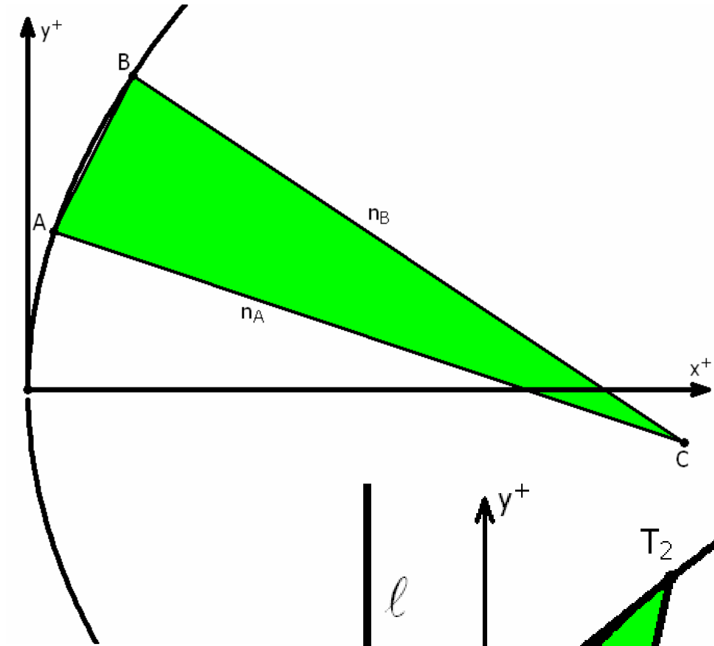
10) Bezüglich der linken Abbildung ist für den Flächeninhalt A des Dreiecks ΔB'AC die Formel $A = 2x_{B'}y_{B'}\left(\frac{x_A - x_F}{p}\right)^3$ (wobei p den Parabelparameter bezeichnet) am konkreten Beispiel A(256|128) zu verifizieren.

11) Es sei s eine Sehne [Endpunkte $A(x_A|y_A)$ und $B(x_B|y_B)$] einer Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt $F(x_F|0)$, n die Normale auf s durch A, C der zweite gemeinsame Punkt von n und par sowie $S(x_S|y_S)$ der Schnittpunkt der Tangenten t_A und t_B an par in A und B. Beweise und/oder verifiziere am konkreten Beispiel F(9|0), $A(x_A|-6)$ und $B(x_B|12)$ die schöne Formel $\mathcal{A}=\left(y_S^2+4x_F^2\right)\cdot\frac{|(x_A+2x_F+x_S)\cdot(y_B-y_A)|}{y_S^2}$ für den Flächeninhalt $\mathcal{A}$ des Dreiecks ΔABC.

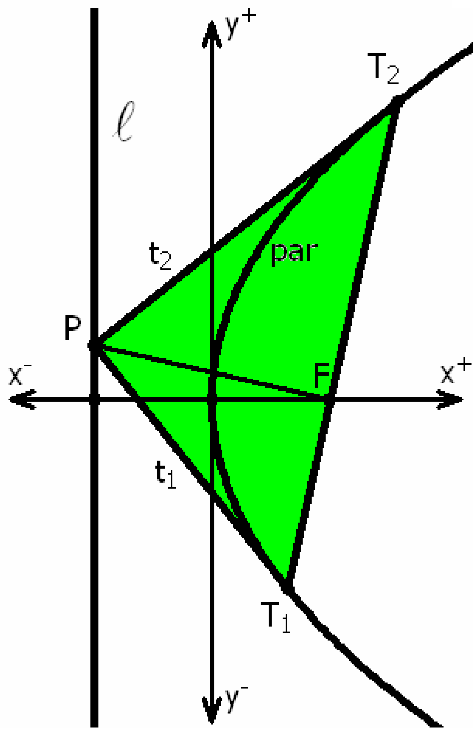
12) Legt man in zwei Punkten A und B einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F die Normalen an die Parabel, so begrenzen A, B und der Schnittpunkt C der beiden Normalen ein Dreieck ΔABC, für dessen Flächeninhalt $\mathcal{A}$ die Formel

$$\mathcal{A}=\frac{1}{4x_F^3}\cdot\left|(y_A-y_B)(x_C-x_A)(x_C-x_B)\right|$$

gilt. Beweise dies oder verifiziere diese Formel am konkreten Beispiel: Zeige, dass A(1|6) und B(4|12) auf einer Parabel in erster Hauptlage liegen und kontrolliere $\mathcal{A}$=84.)



13) Bezüglich der in nebenstehender Figur abgebildeten Konfiguration ist am konkreten Beispiel F(4|0) und $T_1(x|-4)$ die Formel $x_F\cdot\overline{T_1T_2}=\overline{FP}^2$ zu verifizieren (Ferner kann zur Übung auch noch einmal der bereits bekannte Satz überprüft werden, dass t_1 und t_2 einander auf der Leitgerade ℓ von par orthogonal schneiden).

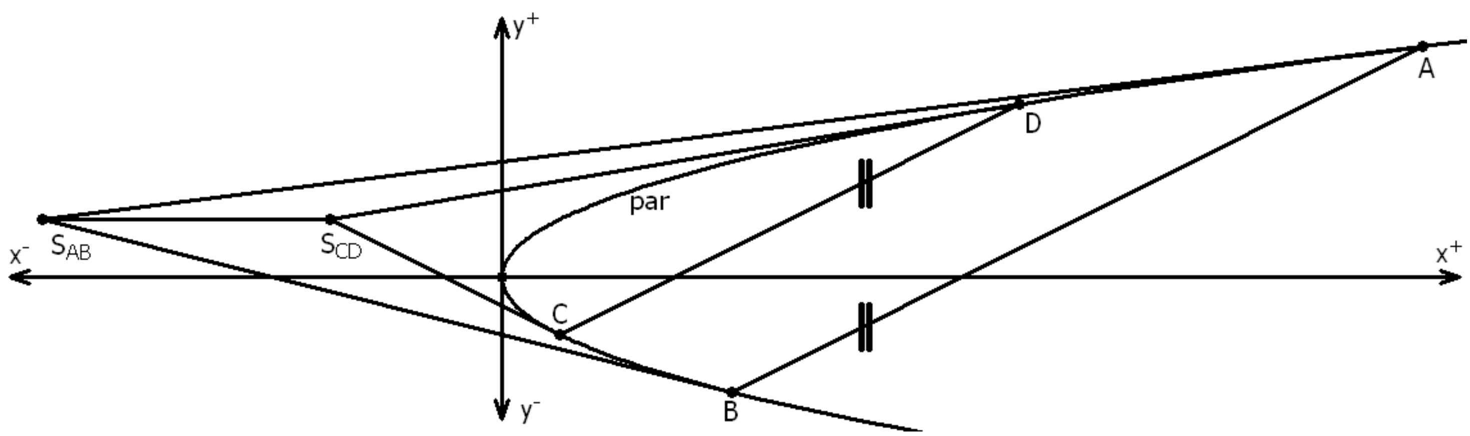


14) In der unteren Abbildung ist der folgende elementargeometrische Lehrsatz visualisiert:

Satz. Legt man in den Endpunkten zweier paralleler Parabelsehnen die Tangenten an die Parabel und ermittelt jeweils den Schnittpunkt, so liegt die Verbindungsstrecke dieser Schnittpunkte parallel zur Parabelachse und es gilt (für die erste Hauptlage):

$$\boxed{\overline{S_{AB}S_{CD}}=\tfrac{1}{x_F}\cdot|y_C-y_B|\cdot|y_D-y_B|\left(=\tfrac{1}{x_F}\cdot|y_B-y_C|\cdot|y_A-y_C|=\tfrac{1}{x_F}\cdot|y_B-y_D|\cdot|y_A-y_D|=\tfrac{1}{x_F}\cdot|y_C-y_A|\cdot|y_D-y_A|\right)}$$

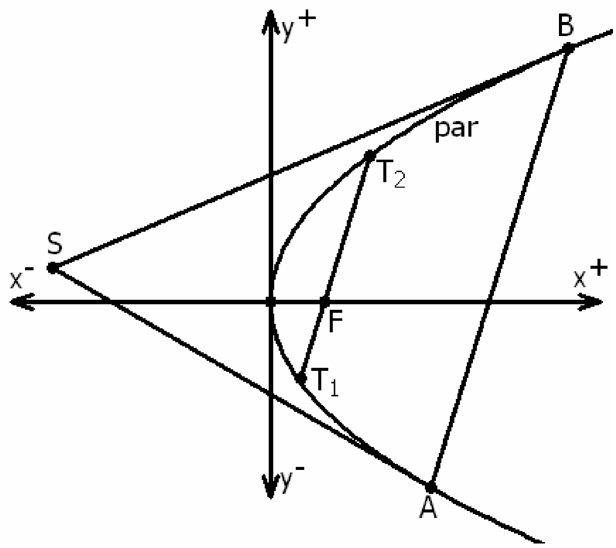
Verifiziere diesen Satz für C(1|–1), $D(x_D|3)$ und $B(x_B|-2)$!



15) In nebenstehender Abbildung ist der folgende elementargeometrische Lehrsatz visualisiert:

Satz. Legt man zu einer Parabelsehne eine Parallele durch den Focus F der Parabel, so schneidet die Parabel aus dieser Parallelen eine Sehne der Länge $\overline{T_1T_2} = x_A + x_B + 2x_S + 4x_F$ aus.

Verifiziere diesen Satz am konkreten Beispiel F(9|0), wobei g_{AB} durch die Punkte P(0|–15) und Q(20|0) verläuft (Kontrolle: $\overline{T_1T_2} = 100$).



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Dezember 2012. *Dr. Robert Resel, e. h.*