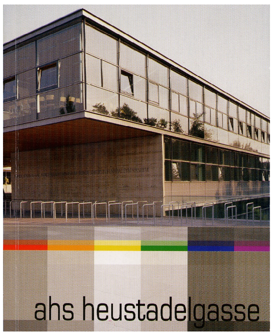
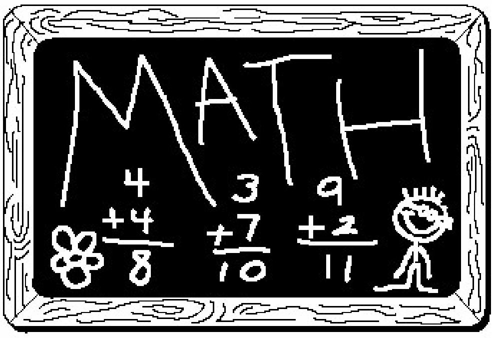


Übungsbeispiele für die dreistündige Schularbeit (prinzipiell auch für die schriftliche Matura* geeignet!)

(8A, Gymnasium, 2012/13)

Diese Beispiele sollen durch die sowohl für die dreistündige Schularbeit als auch die schriftliche Matura relevanten Stoffgebiete führen, wobei an dieser Stelle mit der **Analytischen Geometrie der Kegelschnitte** *(speziell: der Parabel) ein Kapitel der 7. Klasse exemplarisch nochmals aufgerollt wird, und zwar anhand von Aufgaben, deren "Bausteine" geradezu charakteristisch für* ***Maturabeispiele*** *sind.*

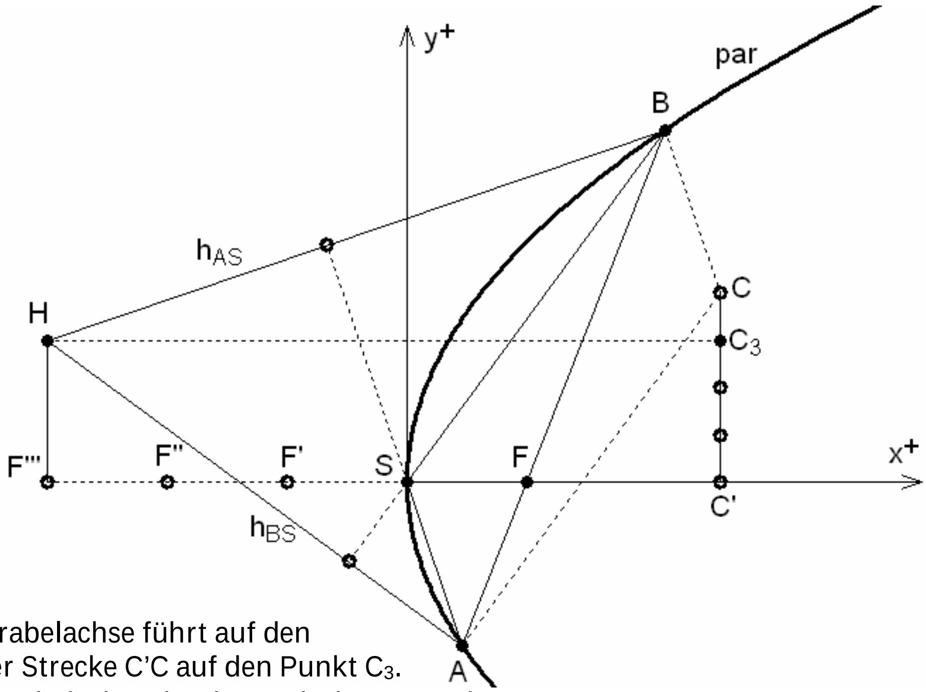
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Matura- resp. Schularbeitsvorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse sowohl bei der dreistündigen Schularbeit als auch bei der schriftlichen Matura auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der dreistündigen Schularbeit resp. der schriftlichen Matura gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



1) **Zum Aufwärmen ein einfaches Parabelbeispiel mit einer (ausgeprägten!) Verbindung zur Linearen Analytischen Geometrie:**
↓↓
… bei Kegelschnittsaufgaben stets gegeben (wie die Erfahrung – Wintersemester 2011/12! – lehrt)**!!!**

Bezüglich der in nebenstehender Abbildung illustrierten Konfiguration gilt der folgende Satz. Der Höhenschnittpunkt H des Parabeldreiecks ΔSAB (wobei par: $y^2=2px$) ergibt sich durch die folgenden Konstruktionsschritte:

- Dreimaliges fortlaufendes Spiegeln des Parabelbrennpunkts F am Parabelscheitel S liefert den Punkt F'''.
- Ergänzen des Dreiecks ΔSAB zum Parallelogramm SACB ergibt den Punkt C.
- Projizieren von C auf die Parabelachse führt auf den Punkt C''' und Viertelung der Strecke C'C auf den Punkt C_3.
- Schnitt der Parallelen zur Parabelachse durch C_3 mit der Normalen zur Parabelachse durch F''' bringt schließlich den Höhenschnittpunkt H.

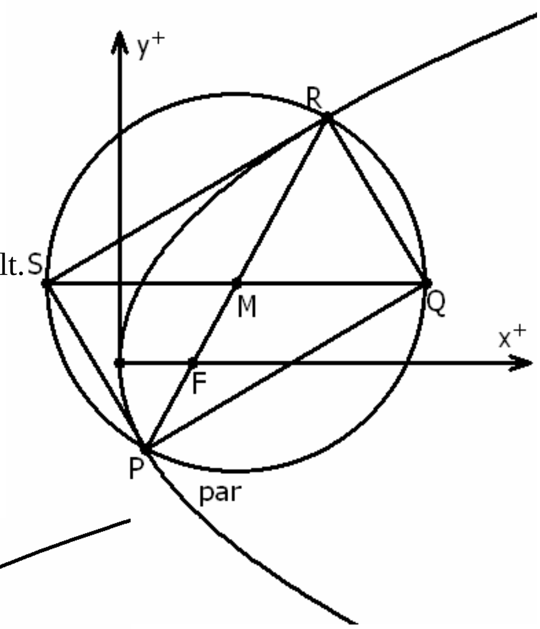


Verifiziere diesen Satz für den Punkt A(1|–8)!

---

*: **Zum Üben für die Klausur folgen noch einmal 15 separate Beispiele zur Parabel!** ☺

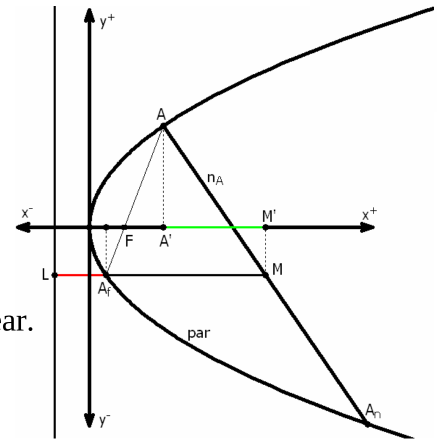
2) P und R seien Punkte einer Parabel par, auf deren Verbindungsstrecke auch der Brennpunkt F von par liegt. Beweise allgemein oder/und verifiziere am konkreten Beispiel einer Parabel in erster Hauptlage durch P(2|–16), dass dann die Tangenten und Normalen an par in P und R ein Rechteck PQRS bilden, dessen Diagonale QS parallel zur Parabelachse liegt und für dessen Umkreisradius r die Formel $r = \frac{(y_P - y_R)}{8x_F}$ gilt.



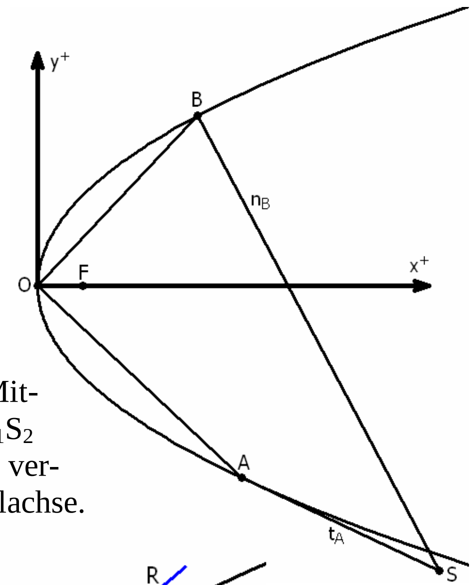
3) In nebenstehender Abbildung ist n_A die Normale an eine Parabel par mit dem Brennpunkt F in einem ihrer Punkte A, A_f der zweite Schnittpunkt von g_{AF} mit par, A_n der zweite gemeinsame Punkt von n_A mit par, M der Mittelpunkt der Strecke AA_n und schließlich L die Normalprojektion von A_f auf die Leitgerade der Parabel. Dann gilt der folgende

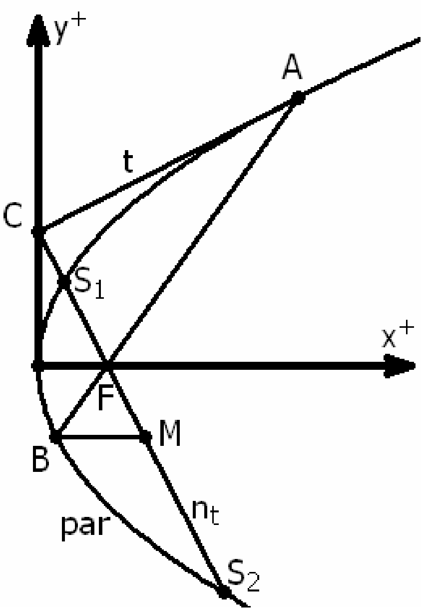
Satz. L, A_f und M liegen kollinear.

Kontrolliere die Gültigkeit dieses Satzes für den Punkt A(1296|432)!



4) Ist ΔOAB ein rechtwinkliges Parabeldreieck mit dem rechten Winkel in O, dann gilt für den rechts abgebildeten Punkt S: $x_S = \frac{1}{3}\cdot(x_A + 4x_B + 8x_F)$. Überprüfe die Gültigkeit dieser Formel für den Punkt B(16|24)!

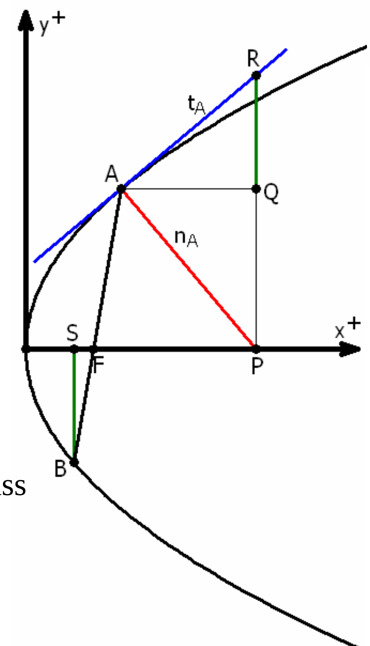




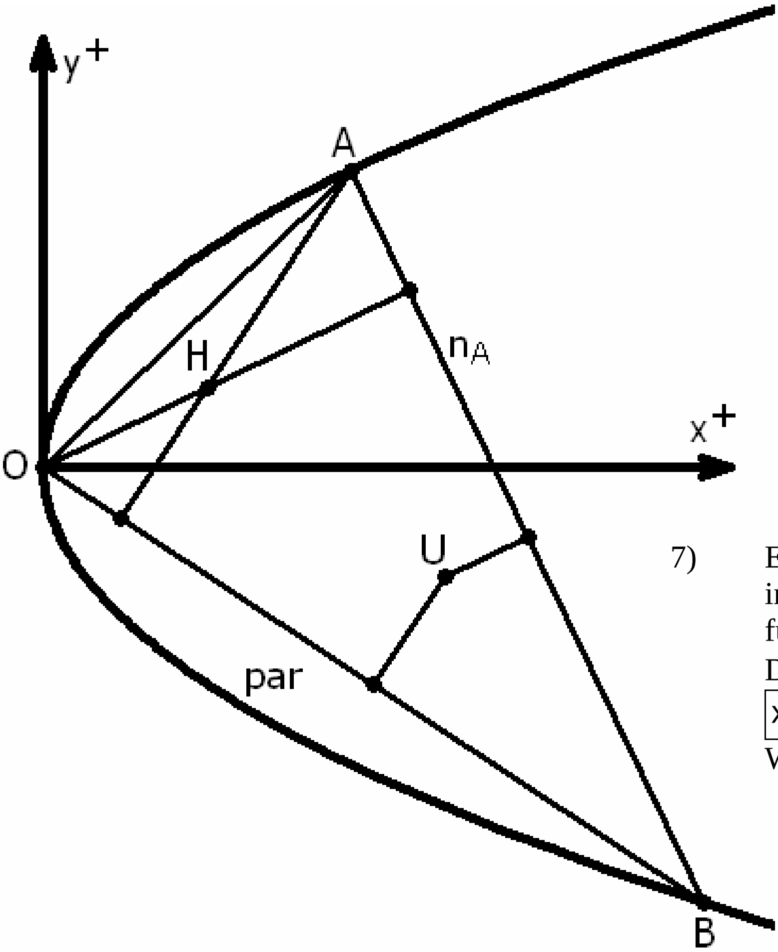
5) Bezogen auf die linke Abbildung gilt der folgende

Satz. Die Gerade durch den Mittelpunkt M der Sehne S_1S_2 und den Parabelpunkt B verläuft parallel zur Parabelachse.

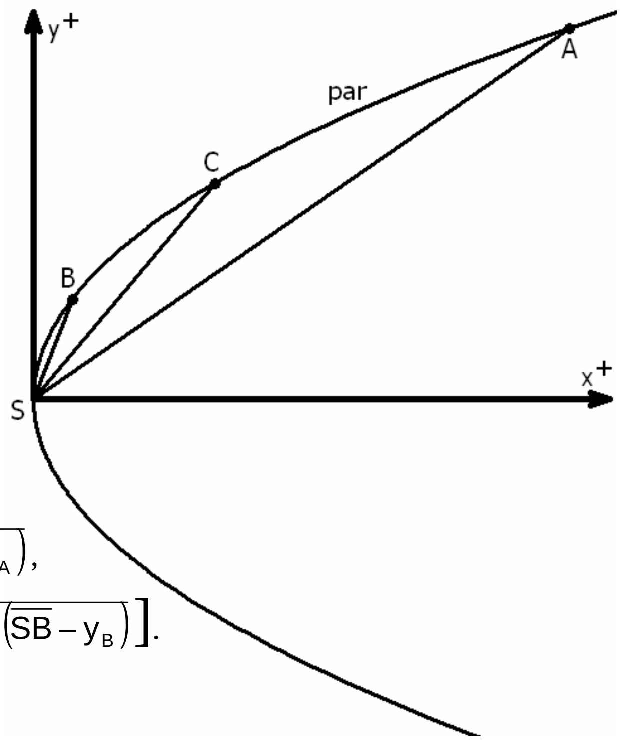
Verifiziere diesen Satz anhand des konkreten Beispiels A(256|384)!



6) Bezüglich der rechten oberen Abbildung gilt der Satz, dass die Strecken BS und QR parallel und gleich lang sind. Kontrolliere dies am Beispiel des Punkts B(4|–16)!



7) Ergibt sich ein Parabeldreieck ΔOAB wie in der linken Abbildung illustriert, so gilt für den Umkreismittelpunkt $U(x_U|y_U)$ des Dreiecks ΔOAB die folgenden $\boxed{\text{Formel}}$:
$\boxed{x_U = \frac{1}{2} \cdot x_B + x_F}$
Weise dies am Beispiel $A(2|8)$ nach!



8) **S a t z.** Legt man durch den Brennpunkt F einer Parabel in erster Hauptlage eine Gerade, so schneidet diese die Parabel in zwei Punkten A und B, wodurch eine Sehne der Länge $\overline{AB} = x_A + x_B + 2x_F$ entsteht.

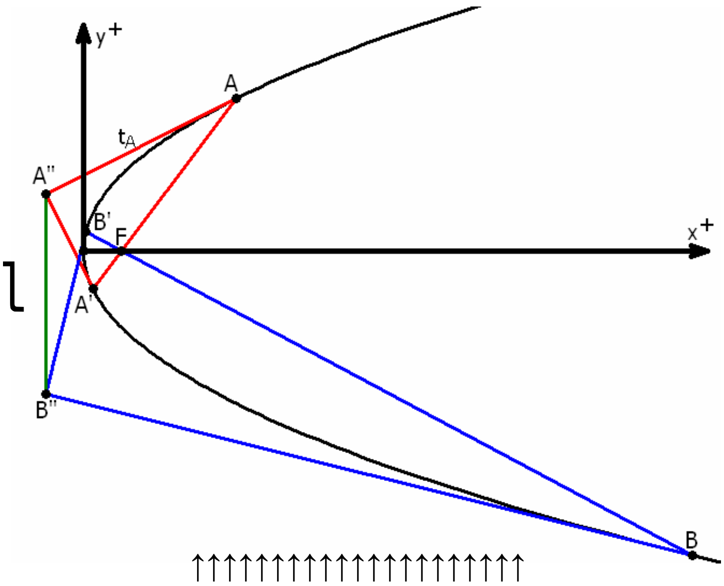
Verifikation für $A(81|54)$!

9) Sind A und B zwei Punkte einer Parabel in erster Hauptlage, dann schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\sphericalangle BSA$ die Parabel in einem zweiten Punkt C (siehe rechte Abbildung!), für den dann $\boxed{C\left(2p \cdot \left(\frac{ad+bc}{ac-bd}\right)^2 \middle| 2p \cdot \frac{ad+bc}{ac-bd}\right)}$ gilt $\Big[$wobei $a := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{SA} + y_A\right)}$, $b := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{SA} - y_A\right)}$, $c := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{SB} + y_B\right)}$ und $d := \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{SB} - y_B\right)}$ $\Big]$.

Verifiziere dies für $A(2304|1728)$ und $B(x_B|540)$!

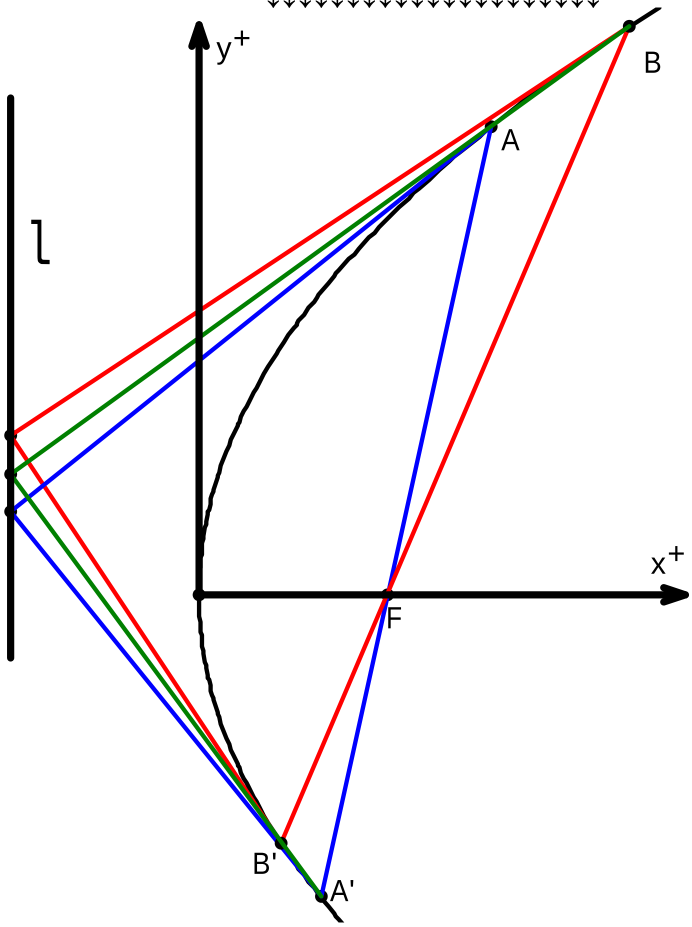
10) Legt man in den Endpunkten einer Parabelsehne, welche durch den Focus F der Parabel geht, die Tangenten, so schneiden diesen einander bekanntlich orthogonal auf der Leitgerade ℓ der Parabel. Betrachtet man wie in der linken Abbildung auf der nächsten Seite zwei derartige Sehnen, so gilt für den Abstand der Schnittpunkte A'' und B'' die Formel $\overline{A''B''} = \left|\frac{(y_A - y_B)(y_A - y_{B'})}{2y_A}\right| = \left|\frac{(y_A - y_B)(y_{A'} - y_B)}{2y_B}\right|$.

Verifikation für $A(x_A|64)$ und $B(256|-128)$!



↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑
Abbildung zu Aufgabe 10)

Abbildung zu Aufgabe 11)
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓



11) Legt man in den Endpunkten einer Parabelsehne, welche durch den Focus F der Parabel geht, die Tangenten, so schneiden diesen einander bekanntlich orthogonal auf der Leitgerade ℓ der Parabel. Betrachtet man nun wie in nebenstehender Abbildung zwei derartige Sehnen, so schneiden einander auch die Geraden g_{AB} und $g_{A'B'}$ in einem Punkt von ℓ .
Beweis oder Verifikation für A(2304|1152) und B(x_B|1728)!

12) SATZ. Legt man durch einen Punkt $T(x_T|y_T)$ einer Parabel in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F sowohl die Tangente t_T als auch die Normale n_T, so begrenzen die Parabelachse, t_T und n_T ein Dreieck, für dessen Flächeninhalt μ die Formel (*) gilt. $\boxed{\mu = y_T \cdot \overline{FT} \ (*)}$

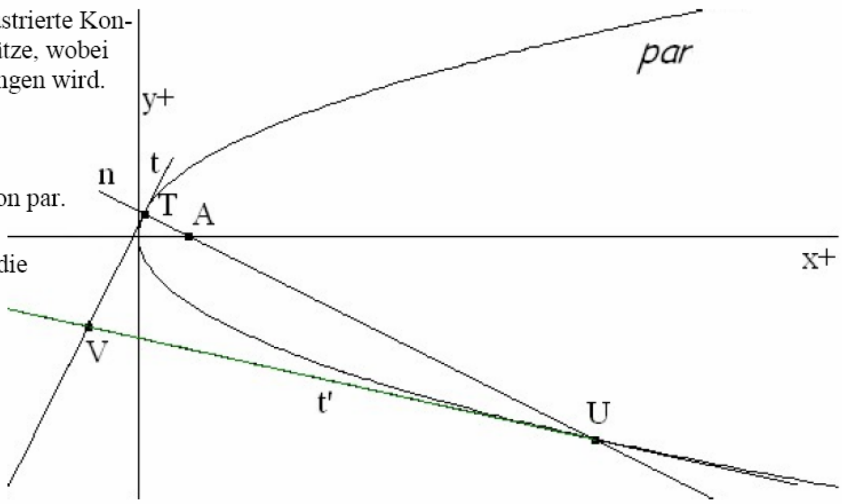
Verifiziere diesen Satz für den Punkt T(18|12)!

13) SATZ. Ist g [$g : y = kx + d$] Kurvennormale der Parabel par [par.: $y^2 = 2px$], dann gilt $\boxed{pk^3 + 2pk + 2d = 0}$.
Verifziere diesen Satz für jene Parabel in erster Hauptlage, welche die Gerade mit der Gleichung $x - 6y + 72 = 0$ als Tangente besitzt, und zwar für die Kurvennormale im Parabelpunkt $T(x_T|12)$.

14) Für die in nebenstehender Abbildung illustrierte Konfiguration gelten die folgenden beiden Sätze, wobei von par.: $y^2 = 2px$ und $T(x_T|y_T)$ ausgegangen wird.

SATZ 1. $\boxed{x_U = \frac{x_A^2}{x_T}}$, $\boxed{y_U = \frac{-2px_A}{y_T}}$

SATZ 2. M_{TV} liegt auf der Leitgerade von par. Für seine y-Koordinate y_M gilt $y_M = k \cdot (x_T - x_F)$, wobei k die Steigung von t und x_F die x-Koordinate des Parabelbrennpunkts bezeichnet.



Verifiziere diese beiden Sätze am Beispiel jener Parabel par, welche von der Gerade g mit der Gleichung $g : x - 4y + 64 = 0$ berührt wird, und zwar für den Punkt $T(x_T|4)$, wobei gegebenenfalls vom Zwischenresultat par.: $y^2 = 16x$ Gebrauch zu machen ist!

15) $\boxed{\text{SATZ.}}$ Für jede durch den Brennpunkt F einer Parabel par [par: $y^2 = 2px$] gehende Gerade g schneiden einander die Tangenten in den Schnittpunkten von g mit par orthogonal in einem Punkt $L(x_L|y_L)$ der Leitgerade von par. Ist ferner $P(x_P|y_P)$ der Schnittpunkt von g mit der Leitgerade von par, so gilt stets $\boxed{y_L \cdot y_P = -p^2}$.

Bestätige dies für F(36|0), wobei g ferner durch den Punkt Q(4|–24) verläuft!

16) a) Stelle eine Gleichung jener Parabel par in erster Hauptlage auf, welche die Gerade t [t: x–4y+96=0] als Tangente besitzt und berechne auch die Koordinaten des Berührungspunkts P von par mit t. (Zwischenresultat für die weitere Rechnung: par: $y^2 = 24x$)

b) Lege durch den Parabelscheitel S die Normale n auf g_{PS}, berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts Q von par mit n und stelle eine Gleichung der Tangente t´ an par in Q auf.

c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts $R(x_R|y_R)$ von t und t´ und verifiziere am vorliegenden Beispiel folgenden $\boxed{\text{SATZ.}}$ Sind P und Q Punkte einer Parabel mit dem Parabelscheitel S derart, dass $\angle PSQ = 90°$ gilt und bezeichnet R den Schnittpunkt der Parabeltangenten t_P und t_Q, dann gelten für den Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔPSQ die gleichwertigen Formeln $\boxed{\mu = x_R \cdot |y_R - y_P|}$ und $\boxed{\mu = x_R \cdot |y_R - y_Q|}$.

Aus einer früheren Schularbeit [7A(G), 2002]:

17)

Aufgabe 2 (Parabel):

Für jede Parabel par in erster Hauptlage gilt der folgende elementargeometrische SATZ. Legt man in einem Punkt $T(x_T|y_T)$ die Tangente t_T an par, so gilt für das Produkt $\wp$ der Normalabstände des Parabelscheitels S und des Parabelbrennpunkts F von t_T $\boxed{\text{nebenstehende Formel}}$.

$$\boxed{\wp = x_T \cdot x_F}$$

Bestätige die Gültigkeit dieser Formel am konkreten Beispiel jener Parabel par in erster Hauptlage, welche die Gerade t [t: 3x – 4y + 18 = 0] als Tangente besitzt. Wähle hiebei für T den Berührungspunkt von t und par!

Aus einer weniger früheren Schularbeit [7D(Rg), 2008]:

18) Von einer Parabel par in erster Hauptlage kennt man die Tangente t [t: 3x–4y+192=0].

a) Ermittle eine Gleichung von par (Zwischenresultat: par: $y^2 = 144x$) sowie die Koordinaten des Berührungspunkts $T(x_T|y_T)$ von t mit par.

b) Lege im Schnittpunkt von t mit der Scheiteltangente die Normale n auf t und verifiziere am konkreten Beispiel den allgemeingültigen Satz, demzufolge par aus n eine Sehne der Länge $\bullet = \frac{p^2}{x_T} + 2p$ ausschneidet, wobei x_T bzw. p die x-Koordinate des Berührungspunkts T von t mit par bzw. den Parabelparameter bezeichnet. Fertige eine saubere Skizze an, welche diesen Satz illustriert!

19) F(36|0) ist der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage.

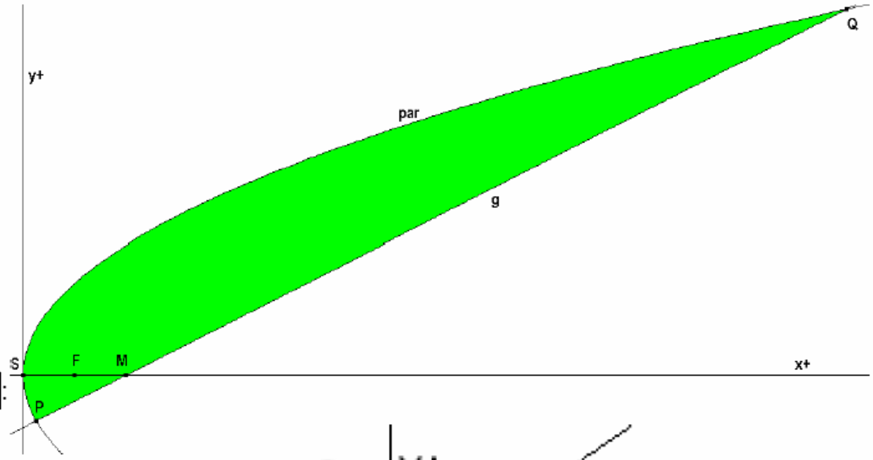
a) Berechne den Parameter p von par stelle eine Gleichung von par auf!

b) Kontrolliere, dass F auf der Gerade g[P(31|12), Q(51|–36)] liegt und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte A und B von g mit par.

c) Kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $x_A \cdot x_B = x_F^2$.

d) Kontrolliere am vorliegenden konkreten Beispiel die allgemeingültige Formel $y_A \cdot y_B = -p^2$.

20) In nebenstehender Abbildung ist eine Parabel par in erster Hauptlage zusammen mit ihrem Focus F sowie dem Spiegelpunkt M des Parabelscheitels S an F illustriert. Für jede durch M gehende Gerade g gilt dann stets der folgende Lehrsatz:

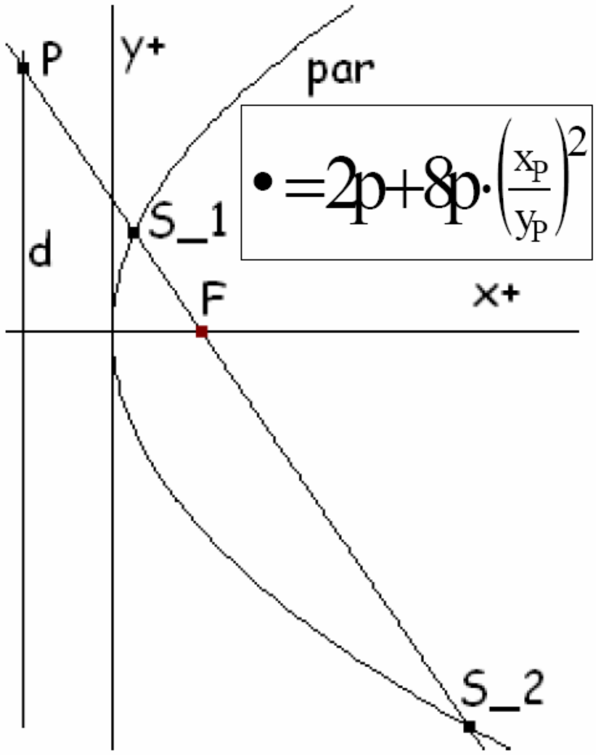


SATZ. Es sei $g \cap par = \{P,Q\}$ mit $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$. Dann gilt (wobei p den Parabelparameter bezeichnet) stets die folgende Formel:

$$\overline{PQ} = \left(\tfrac{x_1}{p}+1\right)^2 \cdot x_2 = \left(\tfrac{x_2}{p}+1\right)^2 \cdot x_1$$

Verifiziere diesen Lehrsatz für F(8|0), wobei g ferner durch R(30|8) hindurchgeht. (Ein allgemeiner Beweis würde selbstverständlich die bloße Verifikation toppen!)

21) In nebenstehender Abbildung ist sowohl jene Parabel par in erster Hauptlage mit der Leitlinie d ("Direktrix") und der Tangente t [t: 3x–4y+64 = 0] als auch jene Gerade durch $P(x_P|32)$ – wobei $P \in d$ – und den Focus F von par abgebildet. Verifiziere anhand des vorliegenden konkreten Beispiels nebenstehende allgemeingültige Formel für die Länge $\bullet = \overline{S_1S_2}$, wobei vom Parabelparameter p und von $P(x_P|y_P)$ ausgegangen wird:



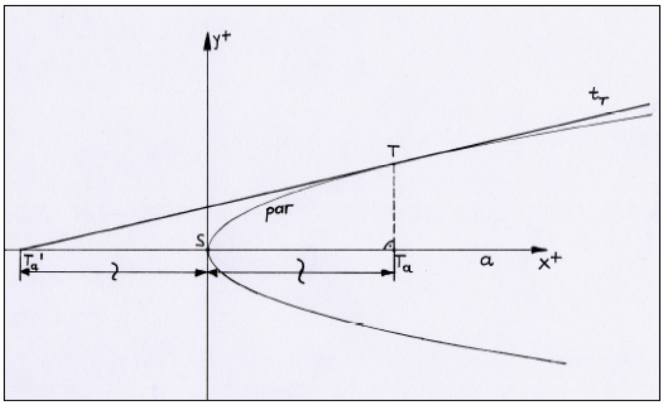
$$\bullet = 2p + 8p \cdot \left(\frac{x_P}{y_P}\right)^2$$

22) aus:

Klasse: 7B(G) **Schularbeit (zweistündig, Gr. A)** 09. 01. 2008

Pflichtmodul PM3: *Nichtlineare analytische Geometrie der Ebene (und komplexe Zahlen)*

F(9|0) ist der Brennpunkt einer Parabel par in erster Hauptlage, die Gerade g [F, I(25|–12)] schneidet par in zwei Punkten T und U, wobei $x_T < x_U$ gelten soll.



a) Ermittle eine Gleichung von par, berechne die Koordinaten von T und stelle eine Gleichung der Tangente t_T an par in T auf!

b) Verifiziere anhand des konkreten Beispiels nebenstehend illustrierte Tangentenkonstruktion (T auf die Parabelachse projizieren, projizierten Punkt T_a am Parabelscheitel spiegeln, gespiegelten Punkt T_a' schließlich mit T verbinden!)!

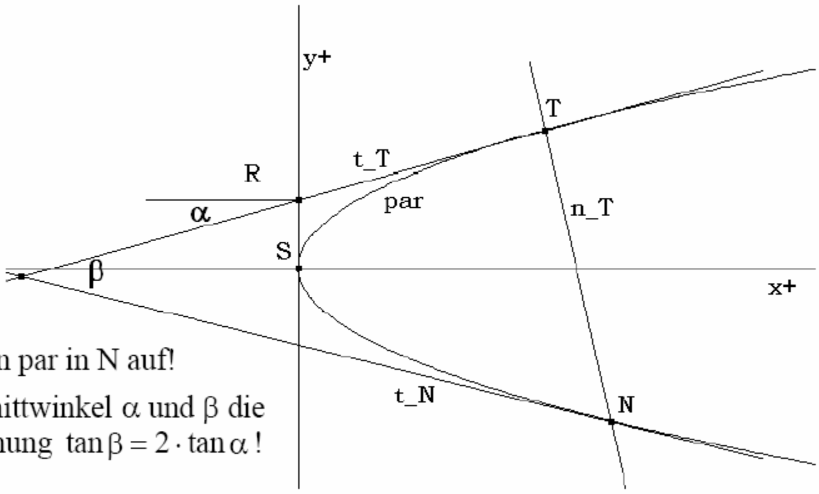
23) Nebenstehend ist jene Parabel par in erster Hauptlage abgebildet, welche t [t: $2x-y+2=0$] als Tangente besitzt.

a) Ermittle eine Gleichung von par und stelle im Parabelpunkt $T(x_T|32)$ sowohl eine Gleichung der Tangente t_T als auch der Kurvennormale n_T auf.

b) Berechne die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts N von n_T und par!

c) Stelle eine Gleichung der Tangente t_N an par in N auf!

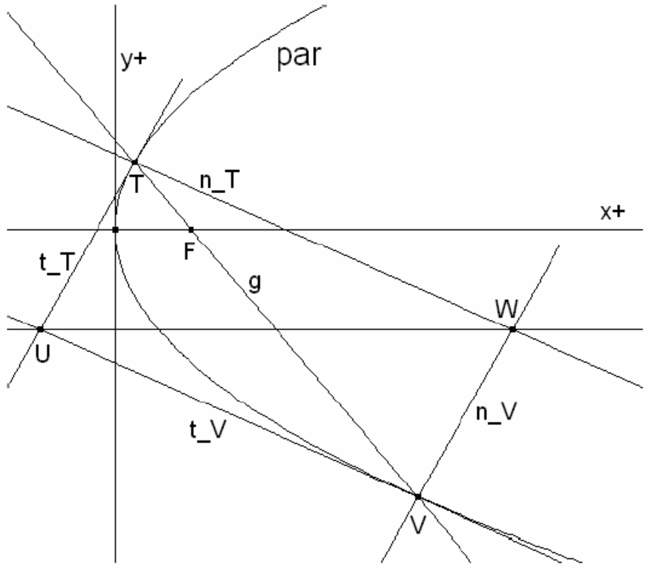
d) Verifiziere für die eingezeichneten Schnittwinkel α und β die allgemeingültige goniometrische Beziehung $\tan\beta = 2 \cdot \tan\alpha$!



24) In nebenstehender Abbildung ist sowohl jene Parabel par in erster Hauptlage mit dem Brennpunkt F(4|0) als auch jene Gerade g abgebildet, welche nebst F ferner durch I(7|–4) geht. Verifiziere anhand des vorliegenden konkreten Beispiels die folgenden allgemeingültigen Lehrsätze:

SATZ 1. Die Tangenten an par in den Schnittpunkten T und V von g mit par schneiden einander auf der Leitgerade von par unter rechtem Winkel.

SATZ 2. Für den Schnittpunkt $W(x_W|y_W)$ der Normalen an par in den Schnittpunkten $T(x_T|y_T)$ und $V(x_V|y_V)$ von g mit par gelten die Darstellungen $x_W = x_F+x_T+x_V$ und $y_W = \frac{1}{2} \cdot (y_T+y_V) = y_U$.



Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Dezember 2012. *Dr. Robert Resel, e. h.*

P.S.: **Nebst 12 SÜ- und 3 HÜ-Beispielen (also insgesamt 15 erledigten Aufgaben) blieben seinerzeit im Herbst 2011 von 39 Übungsbeispielen zur Parabel auch noch (zufällig auch!) 24 Beispiele übrig, die sich ebenso nach wie vor zum Üben eignen! Nach der dreistündigen Schularbeit folgen dann noch 15 abschließende Übungsbeispiele zur analytischen Geometrie der Parabel!**