

Preprint ausgewählter Seiten  
eines meiner nächsten Bücher  
für die Referate 4 bis 10 zum Thema

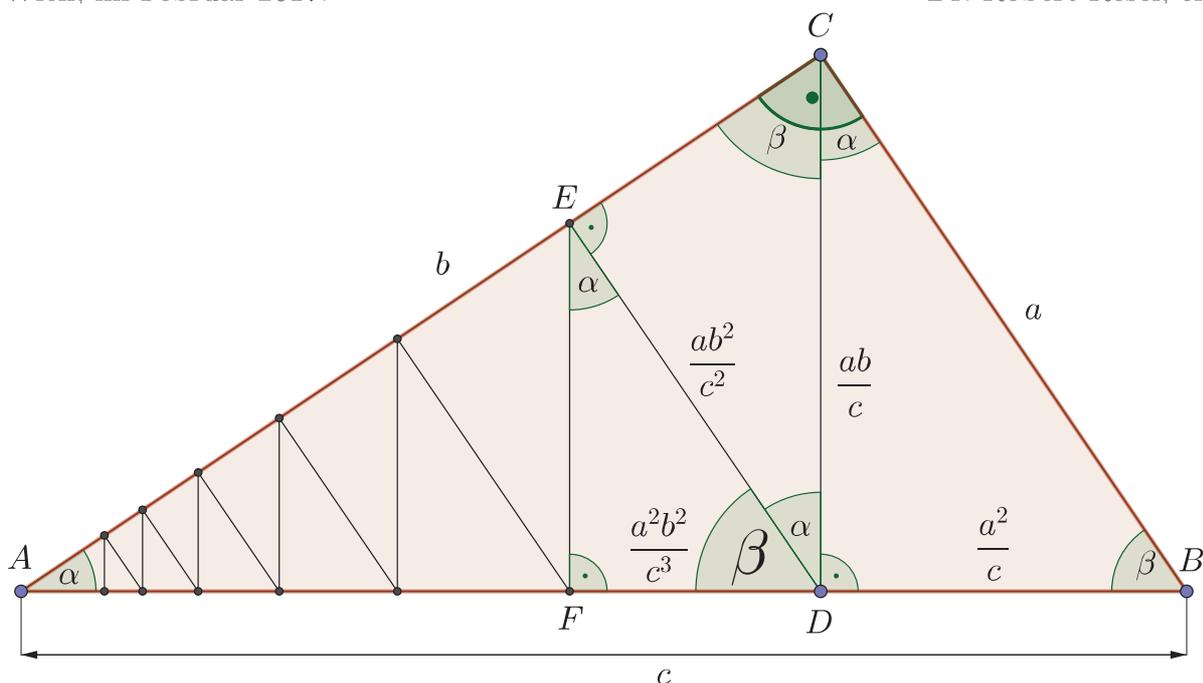
## *Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes*

im Rahmen des Geometrieunterrichts (dm)  
der Realisten der 4AD sowie der 4E

- Referat 4: Beweis (1)1 auf S. 183f
- Referat 5: Übungsaufgabe 3 auf S. 195
- Referat 6: Übungsaufgabe 4 auf S. 195
- Referat 7: Zwischen Übungsaufgabe 6 und 7 auf S. 196f
- Referat 8: Übungsaufgabe 7 auf S. 197f
- Referat 9: 27. Beweis auf S. 202f
- Referat 10: 28. Beweis auf S. 203f

Wien, im Februar 2017.

Dr. Robert Resel, eh.

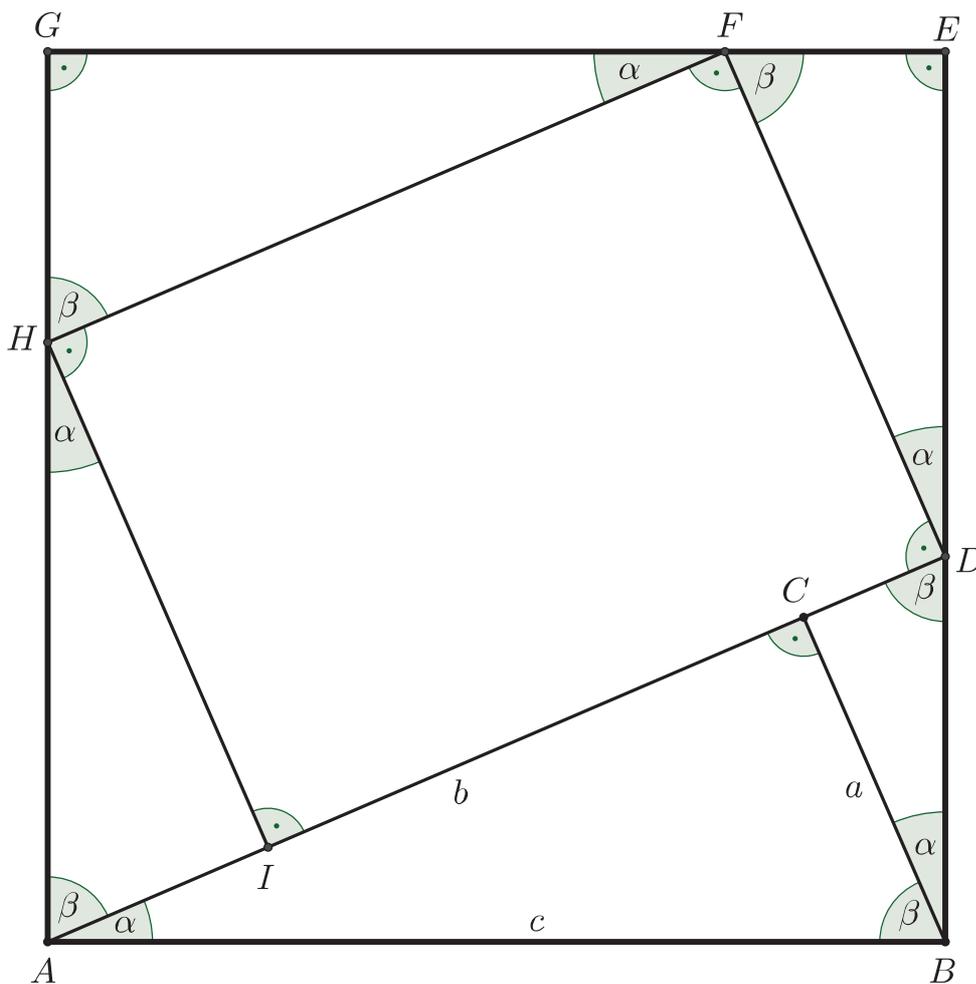


### 4.5 Neue Beweise des pythagoreischen Lehrsatzes

Als Ergänzung zu den drei neuen Beweisen in [40], S. 133ff sowie den sieben neuen Beweisen in [43], S. 211ff beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt (um das Dutzend zu komplettieren) mit zwei weiteren neuen Beweisen dieses wohl (auch außerhalb der scientific community) berühmtesten elementargeometrischen Satzes.

#### 4.5.1 Beweis (1)1

Um den ersten (elften) Beweis führen zu können, gehen wir von untenstehender Abbildung



aus, in welcher über der Hypotenuse  $AB$  (mit der Hypotenusenlänge  $c = \overline{AB}$ ) des rechtwinkligen Dreiecks  $\triangle ABC$  mit den Kathetenlängen  $a = \overline{BC}$  und  $b = \overline{AC}$  ein Quadrat  $\square ABEG$  errichtet wurde, an dem nun eine Partition in fünf zueinander ähnliche Dreiecke sowie ein

Rechteck vorgenommen wird, wobei der Nachweis der Ähnlichkeit der Dreiecke (ergo der Beweis, dass die spitzen Innenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  des Dreiecks  $\triangle ABC$  tatsächlich jeweils fünfmal in Erscheinung treten) dem werten L<sup>e</sup><sub>ö</sub> ser als Übung überlassen bleibt und wir basierend auf ebenjenen Ähnlichkeiten sofort mit der Berechnung der entsprechenden Verkleinerungsmaßstäbe  $k_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) beginnen:

- $\triangle BDC$ :

$$k_1 = \frac{a}{c} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{a^2}{b} \wedge \overline{BD} = \frac{ac}{b} \quad (1)$$

- $\triangle DFE$ : Zunächst folgt aus (1) unmittelbar

$$\overline{DE} = c - \frac{a^2}{b} \quad \text{bzw.} \quad \overline{DE} = \frac{c}{b} \cdot (b - a),$$

was

$$k_2 = \frac{c}{b^2} \cdot (b - a)$$

und damit

$$\overline{DF} = \frac{c^2}{b^2} \cdot (b - a) \quad \text{sowie} \quad \overline{EF} = \frac{ac}{b^2} \cdot (b - a) \quad (2)$$

impliziert.

- $\triangle FHG$ : Aus (2) ergibt sich sofort

$$\overline{FG} = c - \frac{ac}{b^2} \cdot (b - a) \quad \text{bzw.} \quad \overline{FG} = \frac{c}{b^2} \cdot (b^2 - ab + a^2),$$

woraus sich

$$k_3 = \frac{c}{b^3} \cdot (b - a)$$

und damit

$$\overline{FH} = \frac{c^2}{b^3} \cdot (b^2 - ab + a^2) \quad \text{sowie} \quad \overline{GH} = \frac{ac}{b^3} \cdot (b^2 - ab + a^2) \quad (3)$$

ergibt.

- $\triangle HAI$ : (3) impliziert

$$\overline{AH} = c - \frac{ac}{b^3} \cdot (b^2 - ab + a^2) \quad \text{bzw.} \quad \overline{AH} = \frac{c}{b^3} \cdot (b^3 - ab^2 + a^2b - a^3)$$

resp.

$$\overline{AH} = \frac{c}{b^3} \cdot [b^2 \cdot (b - a) + a^2 \cdot (b - a)],$$

woraus

$$k_4 = \frac{1}{b^3} \cdot (b - a) \cdot (b^2 + a^2)$$

und damit

$$\overline{IH} = \frac{1}{b^2} \cdot (b - a) \cdot (b^2 + a^2)$$

folgt, was verglichen mit

$$\overline{DF} = \overline{IH} = \frac{c^2}{b^2} \cdot (b - a)$$

auf

$$\frac{1}{b^2} \cdot (b - a) \cdot (b^2 + a^2) = \frac{c^2}{b^2} \cdot (b - a),$$

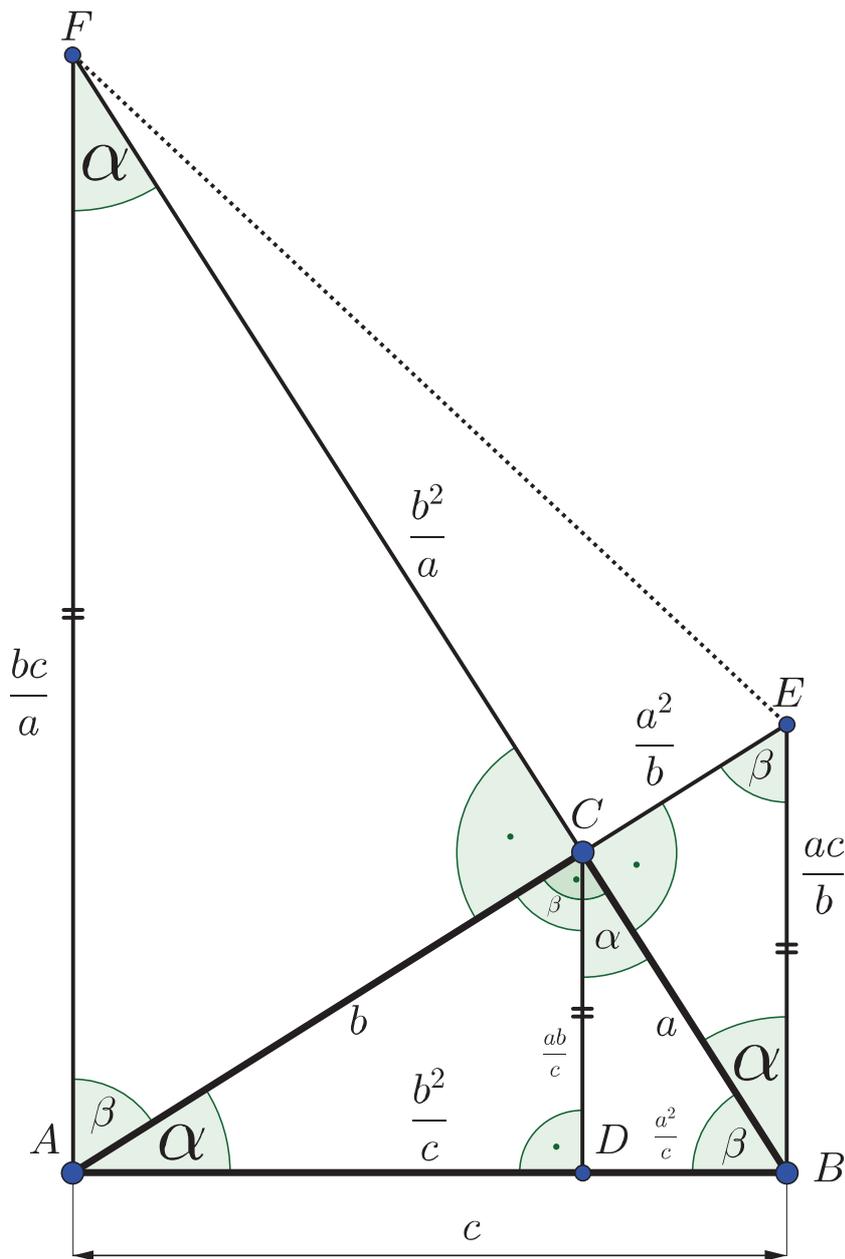
ergo vereinfacht

$$b^2 + a^2 = c^2$$

folgt,  $\square$ .

4.5.6 Weitere Beweise des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

Ausgehend von der unteren Figur entwickeln wir in diesem Abschnitt sage und schreibe 17 weitere Beweise des Lehrsatzes von PYTHAGORAS, womit wir nach den bereits in den Vorgängerbänden entwickelten 15 Beweisen insgesamt 32 Beweisvarianten behandelt haben werden. Dabei inkludiert "wir" eine beträchtliche Involvierung des werten  $L^e_{\ddot{o}}\text{ser}$ , welche bereits mit der folgenden ersten Übungsaufgabe ihren Anfang nimmt:



ÜBUNGSAUFGABE 1:

Man beweise ausgehend vom "Startdreieck"  $\triangle ABC$  samt aller beschrifteten Seiten und Winkel unter Verwendung der wesentlichen Eigenschaft

$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$

dass die Dreiecke  $\triangle ACD$ ,  $\triangle CBD$ ,  $\triangle BEC$  und  $\triangle FAC$  zum Startdreieck ähnlich sind.

Aufbauend auf Übungsaufgabe 1 besteht der nächste Auftrag an den werten  $L^e_{\ddot{o}}\text{ser}$  in der Bearbeitung von

ÜBUNGSAUFGABE 2:

Man bestimme unter Anwendung des Strahlensatzes (oder etwa in jener Art und Weise, in der wir in [43], S. ... vorgegangen sind) die neu hinzu-

kommenden (in der Abbildung bereits beschrifteten) Seitenlängen in den zum Startdreieck ähnlichen Dreiecken, welche man selbst noch durch Berechnung der Hypotenusenlängen in den ebenso zum Startdreieck ähnlichen Dreiecken  $\triangle AEB$  und  $\triangle FBA$  ergänze.

Auf Basis der (wie schon bemerkt abgesehen von den selbst zu ermittelnden Hypotenu-

senlängen  $\overline{AE}$  und  $\overline{BF}$  bereits in der Abbildung inkludierten) Resultate der ersten beiden Übungsaufgaben focussieren wir zunächst auf die Dreiecke  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABC$  und  $\triangle BEC$ , woraus sich wegen

$$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE}$$

und somit

$$\frac{c^2}{b} = b + \frac{a^2}{b}$$

bzw. nach Multiplikation mit  $b$  schließlich

$$c^2 = b^2 + a^2$$

resp. wegen

$$\mathcal{A}_{\triangle ABE} = \mathcal{A}_{\triangle ABC} + \mathcal{A}_{\triangle BEC}$$

und somit

$$\frac{ac^2}{2b} = \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{2b},$$

ergo nach Multiplikation mit  $\frac{2b}{a}$  schlussendlich

$$c^2 = b^2 + a^2$$

ergibt, womit wir zwei weitere Beweise des Lehrsatzes von PYTHAGORAS vollendet hätten.

Jeweils zwei weitere Beweise ergeben sich durch Bearbeitung der nächsten beiden Übungsaufgaben durch den werten L  $\overset{e}{\circ}$  ser:

**ÜBUNGS-AUFGABE 3:** Man leite den Lehrsatz des PYTHAGORAS auf zwei weitere Arten her, indem man anstelle der zuvor verwendeten Dreiecke  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABC$  und  $\triangle BEC$  nun die Dreiecke  $\triangle FBA$ ,  $\triangle ABC$  und  $\triangle FAC$  zur Argumentation heranziehe.

**ÜBUNGS-AUFGABE 4:** Man leite den Lehrsatz des PYTHAGORAS abermals auf zwei zusätzliche Arten her, indem man anstelle der zuvor verwendeten Dreiecke  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ABC$  und  $\triangle BEC$  bzw.  $\triangle FBA$ ,  $\triangle ABC$  und  $\triangle FAC$  nun die Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle ACD$  und  $\triangle CBD$  zur Argumentation heranziehe.

**BEMERKUNG UND ...** In [40], S. 137 (bzw. S. 135f) befindet sich in Form einer Übungsaufgabe (wie bei den vier unmittelbar voranstehenden) ein Impuls für einen Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS, welcher zusammen mit den drei bzw. sieben resp. vier Beweisen in [40], S. ... bzw. [42], S. ... resp. [43], S. ... zu ebenjenen 15 anfangs dieses Abschnitts genannten Beweisen führt, womit ...

**... ERGÄNZUNG:** ... der nun noch folgende Beweis somit im Rahmen unserer bislang in den ersten fünf Bänden vorgenommenen Überlegungen der insgesamt 22. sein wird:

Ergänzen wir in der Abbildung auf der vorherigen Seite die bislang verwendeten paarweise zueinander ähnlichen sieben Dreiecke durch die (strichliert eingezeichnete) Strecke  $EF$  noch durch das achte Dreieck  $\triangle CEF$ , so ist dieses (wie der werte L  $\overset{e}{\circ}$  ser als fünfte Übungsaufgabe begründen möge) zwar nicht zu den ersten sieben Dreiecken ähnlich,

generiert jedoch zusammen mit den Dreiecken  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BEC$  und  $\triangle FAC$  das Trapez  $ABEF$ , dessen Flächeninhalt wir nun auf zwei Arten berechnen, nämlich einerseits als Summe der Flächeninhalte eben genannten Dreiecke und andererseits unter Anwendung der Flächeninhaltsformel für das Trapez (wobei bezüglich einer ungewöhnlichen Herleitung dieser Formel speziell auf [43], S. 191f verwiesen sei), was zunächst auf

$$\frac{ab}{2} + \frac{a^3}{2b} + \frac{b^3}{2a} + \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \right) \cdot c$$

bzw. nach Multiplikation mit  $2ab$  auf

$$2a^2b^2 + a^4 + b^4 = (b^2c + a^2c) \cdot c$$

resp. weiter vereinfacht auf

$$(a^2 + b^2)^2 = (b^2 + a^2) \cdot c^2$$

und somit schließlich nach Division durch  $a^2 + b^2$  auf

$$a^2 + b^2 = c^2$$

führt,  $\square$ .

**ÜBUNGSAUFGABE 6:** Man leite unter Anwendung des nunmehr mehrfach bewiesenen Lehrsatzes des PYTHAGORAS die folgenden untereinander äquivalenten Formeln für die Trapezschenkellänge  $\overline{EF}$  her (wobei die Äquivalenzen freilich zu zeigen sind!):

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \frac{\sqrt{a^6 + b^6}}{ab} \\ \overline{EF} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^6 + b^6}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} \\ \overline{EF} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) \cdot (a^4 - a^2b^2 + b^4)}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} \\ \overline{EF} &= \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 3a^2b^2}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} \\ \overline{EF} &= \frac{c}{2} \cdot \frac{\sqrt{c^4 - 12 \cdot \mathcal{A}_{\triangle ABC}^2}}{\mathcal{A}_{\triangle ABC}} \end{aligned}$$

Vor dem 25. (und hier letzten) Beweis ergänzen wir noch durch einen 23. sowie (im Rahmen von Übungsaufgabe 7) 24. Beweis, wozu wir von der Abbildung auf der nächsten Seite ausgehen, wobei wir für die Seitenlängen  $\overline{BF}$  und  $\overline{CF}$  die Resultate der Übungsaufgabe 2 verwenden. Für das innerhalb des Quadrats  $\square ABDE$  nebst der rechtwinkligen Dreiecke  $\triangle ABC$  und  $\triangle BFC$  verbleibende Trapez  $EAFD$  ergibt sich demnach der Flächeninhalt

$$\mathcal{F}_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot \left( c + c - \frac{ac}{b} \right) \cdot c$$

und dadurch wegen

$$\mathcal{F}_{\square ABDE} = \mathcal{F}_{\triangle ABC} + \mathcal{F}_{\triangle BFC} + \mathcal{F}_{\text{Trapez}}$$

zunächst die Gleichung

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{2b} + \frac{1}{2} \cdot \left( c + c - \frac{ac}{b} \right) \cdot c$$

bzw. umgeformt

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{a^3}{2b} + \frac{c^2}{2b} \cdot (2b - a)$$

resp. nach Multiplikation mit  $2b$  in weiterer Folge

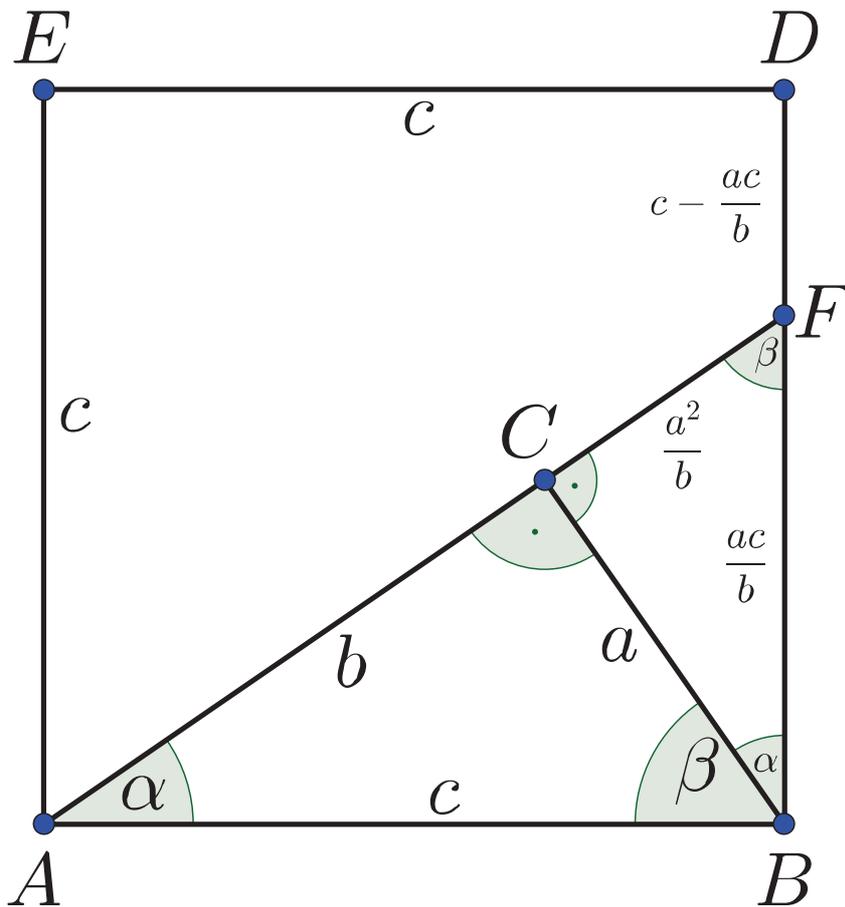
$$2bc^2 = ab^2 + a^3 + 2bc^2 - ac^2$$

und somit schließlich

$$ac^2 = ab^2 + a^3,$$

ergo (nach Division durch  $a$ )

$$c^2 = b^2 + a^2, \square.$$



**ÜBUNGSAUFGABE 7:**

Man lege in der linken Abbildung eine Parallele zu  $g_{AC}$  durch  $D$ , welche  $AE$  in  $G$  schneide und begründe, warum  $\square ABDE$  dadurch in die kongruenten Dreiecke  $\triangle AFB$  und  $\triangle DGE$  sowie das Parallelogramm  $AFDG$  partitioniert wird. Anschließend zeige man, dass die Verwendung der Höhe

$$h = c$$

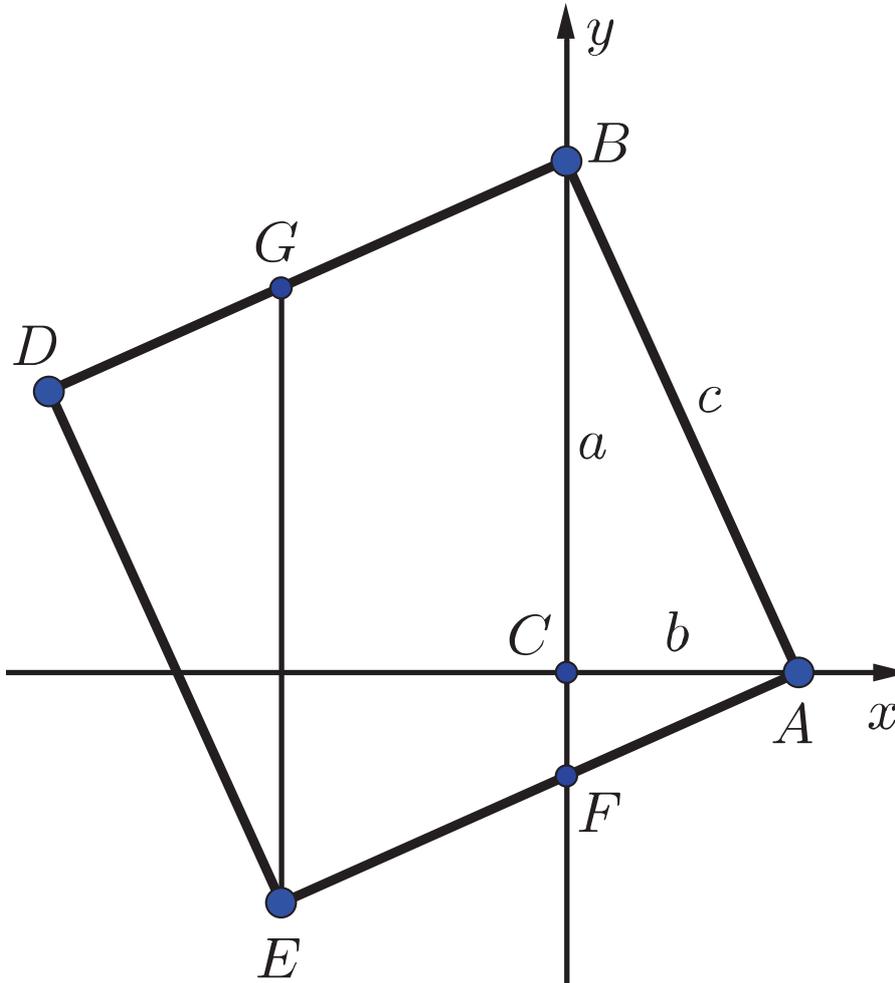
dieses Parallelogramms bei der Berechnung seines Flächeninhalts für eine Herleitung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

unbrauchbar ist und leite unter Verwendung eines geeigneten Hilfsdreiecks (Hinweis: Normale auf  $g_{AC}$  durch  $F$ ) die Darstellung

$$h' = b - a$$

der anderen Höhe her. Schließlich zeige man, wie sich durch Verwendung der Höhe  $h'$  des Parallelogramms bei der Berechnung seines Flächeninhalts nun tatsächlich der Lehrsatz von PYTHAGORAS beweisen lässt.

Beim 25. Beweis schließlich handelt es sich um eine Variante des 24. Beweises, welche aber



keine ähnlichen Dreiecke, sondern einfachste Vektorrechnung<sup>64</sup> verwendet (freilich ohne Vektorbetrag, was ja wiederum den Lehrsatz des PYTHAGORAS erfordern würde), wobei wir insbesondere die Kippregel und die Normalvektorform der Geradengleichung benötigen (welche man beide auch ohne Verwendung des Vektorbetrags herleiten kann, was ja dem konventionellen Weg entspricht - obgleich wir gerade ebenen a.a.O.

nicht beschriften haben). Dazu stützen wir uns in weiterer Folge auf die obere Abbildung: Demnach können wir von  $A(b|0)$ ,  $B(0|a)$  und  $C(0|0)$  ausgehen, was zunächst auf

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

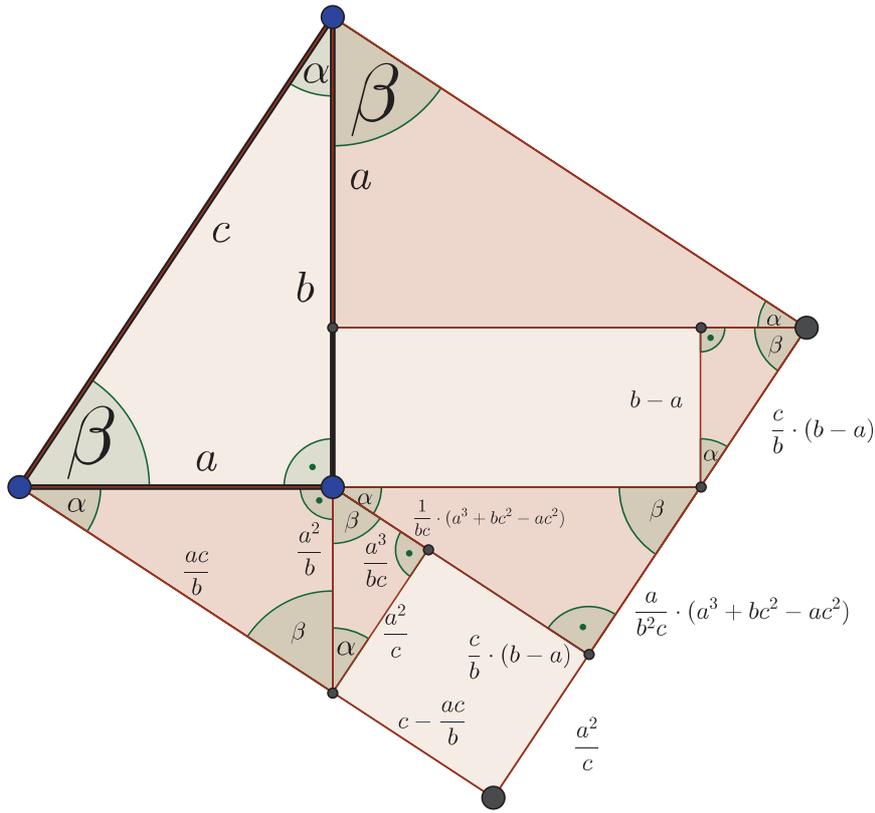
und somit einerseits durch Anwendung der Kippregel auf

$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$

und dadurch auf  $E(b-a|-b)$  sowie andererseits auf

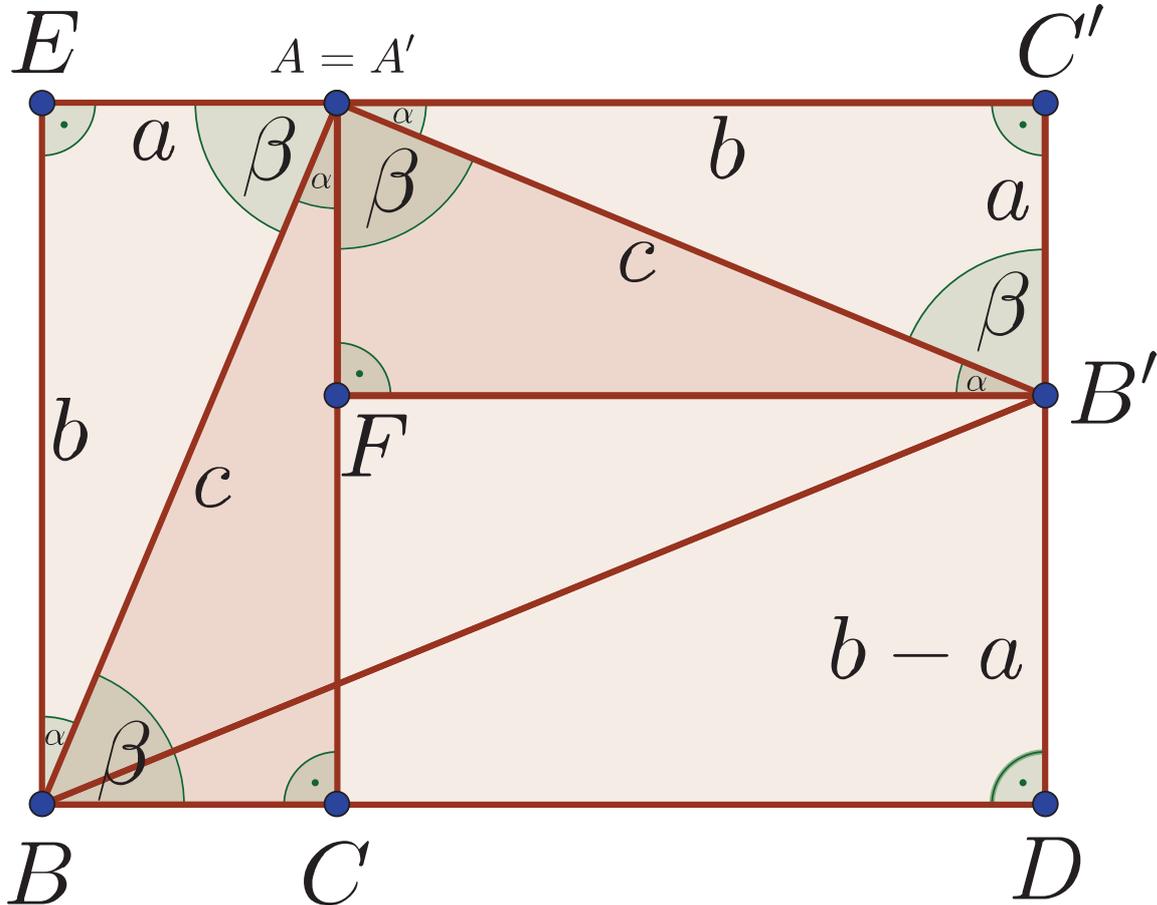
$$g_{AE} : -bx + ay = -b^2 \quad \text{bzw.} \quad g_{AE} : bx - ay = b^2$$

<sup>64</sup>Eine Einführung in die ebene analytische Geometrie und Vektorrechnung haben wir bereits in [41], S. ... vorgenommen.



Einen wirklichen 26. Beweis liefert die linke Figur, was dem werten  $L_{\text{ö}}^e$  ser in allen Einzelheiten (inkl. der Herleitung der über das Ausgangsdreieck  $\Delta ABC$  hinausgehenden bereits beschrifteten Seitenlängen diverser Dreiecke im Hypotenusenquadrat) überlassen bleibt, wobei noch der Hinweis gegeben sei, die drei außen beschrifteten Teilstreckenlängen von  $c$  mit der gesamten Quadratseitenlänge  $c$  zu vergleichen.

Die untere den 27. Beweis bereits suggerierende Abbildung weist eine leichte Ähnlichkeit



zur Beweisfigur des GARFIELDschen Beweises (vgl. etwa [2], S. 71) auf, wobei wir in unserem Beweis kein Trapez benötigen, sondern das Bild  $\Delta A'B'C'$  (mit  $A' = A$ , vgl. Abbildung!) des rechtwinkligen Ausgangsdreiecks  $\Delta ABC$  nach einer  $+90^\circ$ -Drehung um  $A$  ebenso wie dessen Urbild  $\Delta ABC$  jeweils zu einem Rechteck  $AFB'C'$  und  $AEBC$  und diese beiden Rechtecke durch das Rechteck  $FCDB'$  schließlich zu einem umfassenden Rechteck  $BDC'E$  ergänzen.

Wegen

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

lässt sich das Rechteck  $BDC'E$  somit in die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke  $\Delta BAE$  und  $\Delta A'B'C'$  sowie das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck  $\Delta ABB'$  und schließlich das rechtwinklige Dreieck  $\Delta BDB'$  partitionieren, was

$$\mathcal{A}_{BDC'E} = \mathcal{A}_{\Delta BAE} + \mathcal{A}_{\Delta A'B'C'} + \mathcal{A}_{\Delta ABB'} + \mathcal{A}_{\Delta BDB'},$$

ergo

$$b(a+b) = ab + \frac{c^2}{2} + \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

bzw.

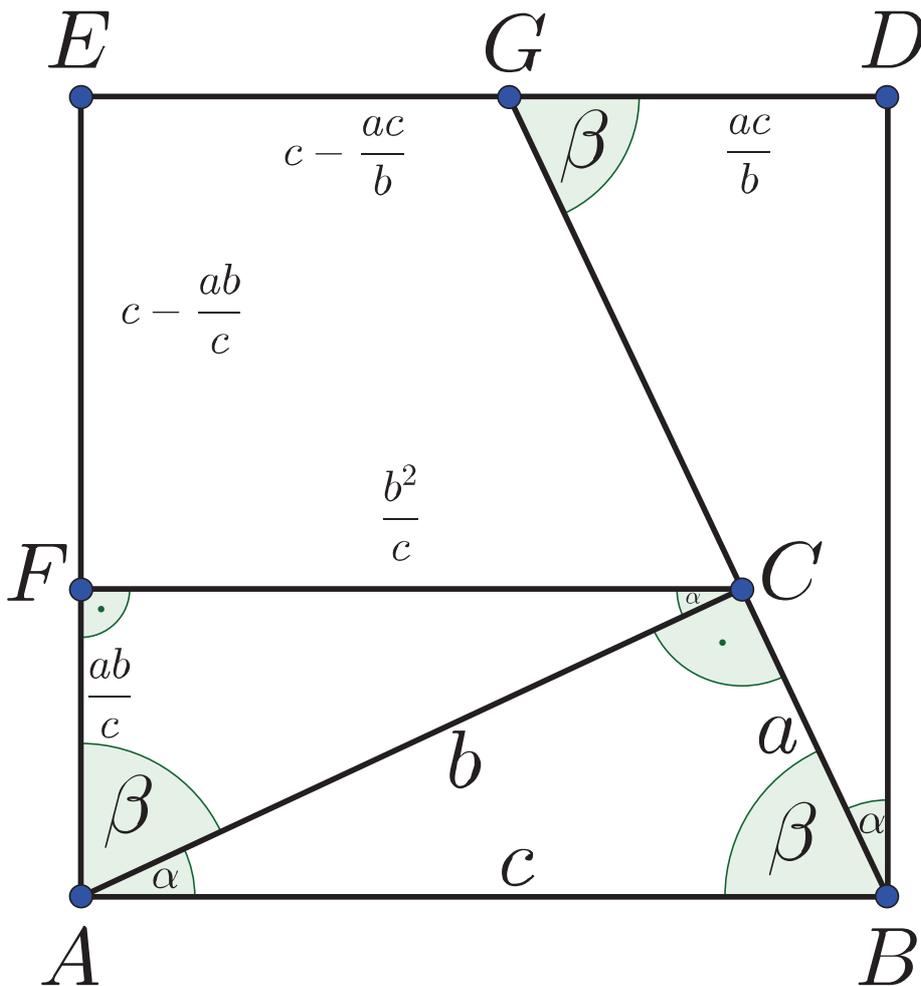
$$2b^2 = c^2 + b^2 - a^2$$

resp.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

impliziert,  $\square$ .

Ein 28. Beweis ergibt sich aus der unteren Figur, indem man das Hypotenusenquadrat



□*ABDE* wie links illustriert in das rechtwinklige Ausgangsdreieck  $\triangle ABC$ , die dazu ähnlichen Dreiecke  $\triangle BGD$  und  $\triangle CAF$  sowie das Trapez  $FCGE$  partitioniert, was unter Anwendung des Strahlensatzes auf ebene zueinander ähnliche Dreiecke auf Basis der gegebenen Streckenlängen  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  sowie  $\overline{AB} = \overline{BD}$  auf die entsprechenden Streckenlängen  $\overline{DG}$ ,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\overline{EF}$  und  $\overline{EG}$  führt (wie der wertelöser zur

Übung zeigen möge) und zunächst die Gleichung

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2b} + \frac{ab^3}{2c^2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{b^2}{c} + c - \frac{ac}{b} \right) \cdot \left( c - \frac{ab}{c} \right)$$

impliziert, welche wir nun noch weiter zu

$$c^2 = \frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2b} + \frac{ab^3}{2c^2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{ac^2}{2b} - \frac{ab^3}{2c^2} - \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{2}$$

bzw.

$$c^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

resp.

$$\frac{c^2}{2} = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2},$$

ergo schließlich

$$c^2 = a^2 + b^2$$

vereinfachen, □.

Beweis Nr. 29 ergibt sich aus der unteren Abbildung, indem wir das Hypotenusenquadrat