

Preprint ausgewählter Seiten
eines meiner nächsten Bücher
für die Referate 16 und 17 zum Thema

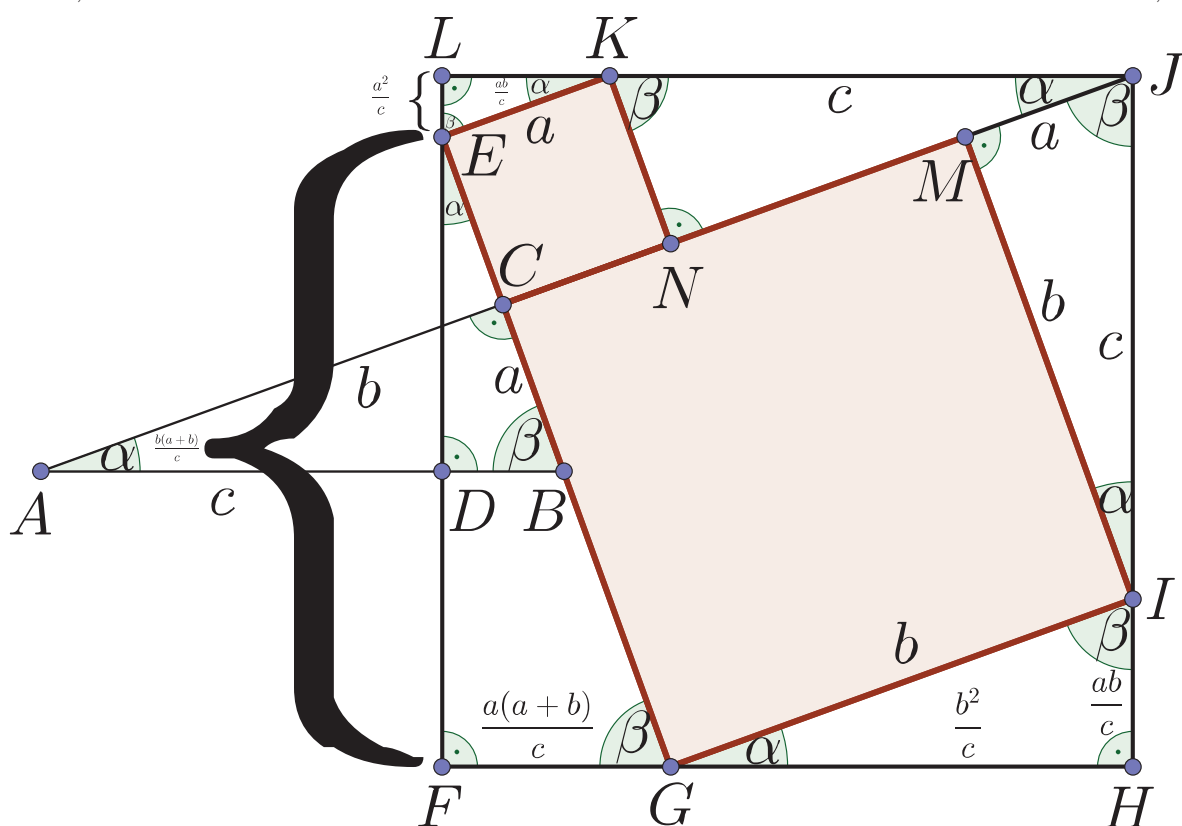
Beweise des Pythagoreischen Lehrsatzes

im Rahmen des Geometrieunterrichts (dm)
der Realisten der 4AD sowie der 4E

- Referat 16: Beweis 63 auf S. 53f
- Referat 17: Beweis 64 auf S. 54f

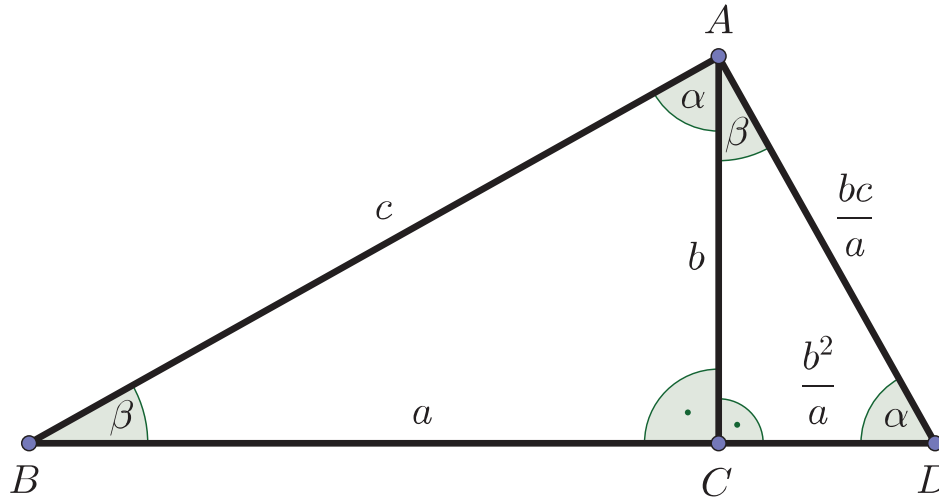
Wien, im Februar 2017.

Dr. Robert Resel, eh.



12 63.-67. Beweis des Lehrsatzes von PYTHAGORAS

Inhalt des vorliegenden kurzen Abschnitts ist (sind) zwei (sowie drei weitere vom werten L e ö ser zu führende) Beweise des Lehrsatzes von PYTHAGORAS, wozu wir zunächst die



obere Abbildung betrachten, in welcher vom rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Kathetenlängen $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$, der Hypotenusenlänge $c = \overline{AB}$ sowie den Innenwinkeln $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ und $\gamma = \angle ACB = 90^\circ$ ausgegangen wird.

Für den 63. Beweis verlängern wir die Kathete BC über C hinaus und schneiden diese Verlängerung mit der Normalen auf die Hypotenuse AB durch A , was auf den Schnittpunkt D und damit auf ein neues Dreieck $\triangle DAC$ führt.

Wegen

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

sowie

$$\angle BAD = 90^\circ$$

folgt zunächst

$$\angle CAD = \beta$$

und dadurch wegen des Innenwinkelsummensatzes schließlich

$$\angle ADC = \alpha,$$

was

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC$$

impliziert, wobei der entsprechende *Ähnlichkeitsfaktor* bezüglich der Längen

$$\overline{AC} : \overline{BC} = b : a$$

beträgt, woraus sich

$$\overline{CD} = \frac{b}{a} \cdot \overline{AC} = \frac{b}{a} \cdot b = \frac{b^2}{a}$$

und

$$\overline{AD} = \frac{b}{a} \cdot \overline{AB} = \frac{b}{a} \cdot c = \frac{bc}{a}$$

ergibt.

Berechnen wir jetzt den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ auf zwei Arten, nämlich einerseits via

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC} + \overline{CD}) \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{b^2}{a} \right) \cdot b = \frac{b(a^2 + b^2)}{2a}$$

und andererseits durch

$$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{bc}{a} = \frac{bc^2}{2a},$$

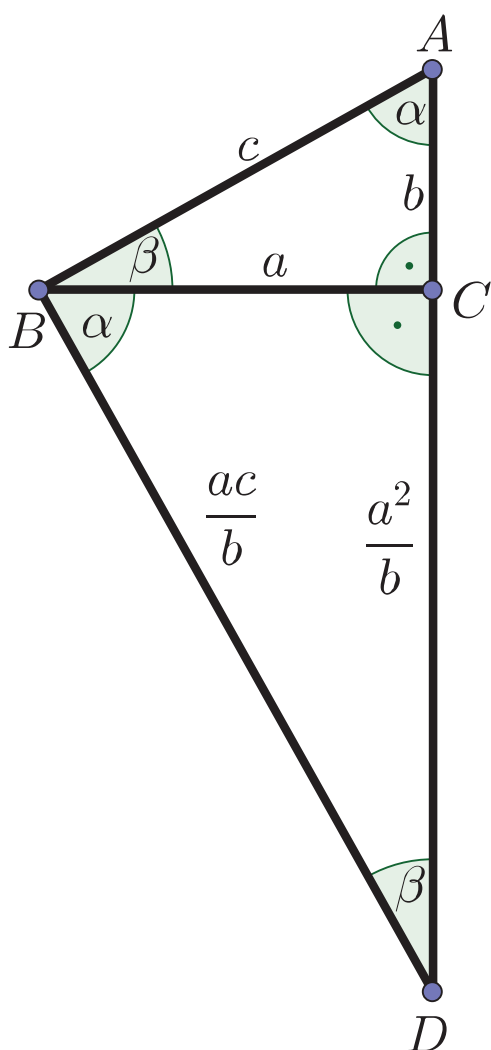
so resultiert aus dem entsprechenden Vergleich zunächst

$$\frac{b(a^2 + b^2)}{2a} = \frac{bc^2}{2a}$$

bzw. nach Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{2a}{b}$ schließlich

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad \square.$$

Für den 64. Beweis betrachten wir die untere Abbildung, in der wiederum vom rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Kathetenlängen $a = \overline{BC}$ und $b = \overline{AC}$, der Hypotenusenlänge



$c = \overline{AB}$ sowie den Innenwinkeln $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ und $\gamma = \angle ACB = 90^\circ$ ausgegangen wird, nun aber die Kathete AC über C hinaus verlängert und mit der Normalen auf die Hypotenuse AB durch B geschnitten wird, was auf den Schnittpunkt D und somit auf ein neues Dreieck $\triangle BDC$ führt.

Wegen

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

sowie

$$\angle ABD = 90^\circ$$

folgt zunächst

$$\angle CBD = \alpha$$

und dadurch wegen des Innenwinkelsummensatzes schließlich

$$\angle BDC = \beta,$$

was

$$\triangle ABC \sim \triangle BDC$$

impliziert, wobei der entsprechende Ähnlichkeitsfaktor bezüglich der Längen

$$\overline{BC} : \overline{AC} = a : b$$

beträgt, woraus sich

$$\overline{CD} = \frac{a}{b} \cdot \overline{BC} = \frac{a}{b} \cdot a = \frac{a^2}{b}$$

und

$$\overline{BD} = \frac{a}{b} \cdot \overline{AB} = \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$$

ergibt.

Nun ist aber auch das beide bislang untersuchte Dreiecke einschließende Dreieck $\triangle ADB$ zu beiden Dreiecken ähnlich, was demnach etwa zwischen dem Ausgangsdreieck $\triangle ABC$ und eben $\triangle ADB$ den zugehörigen *Ähnlichkeitsfaktor* bezüglich der Längen

$$\overline{AB} : \overline{AC} = c : b$$

liefert, woraus sich demnach

$$\overline{AD} = \frac{c}{b} \cdot \overline{AB} = \frac{c}{b} \cdot c = \frac{c^2}{b}$$

ergibt, was wegen

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD},$$

ergo

$$\frac{c^2}{b} = b + \frac{a^2}{b}$$

bzw. nach Multiplikation dieser Gleichung mit b schließlich

$$c^2 = b^2 + a^2$$

impliziert, \square .

ÜBUNGSAUFGABE 1 FÜR DEN WERTEN L $\begin{matrix} \text{E} \\ \text{Ö} \end{matrix}$ SER: Man wende die Idee des Längenvergleichs aus dem 64. Beweis auf die Figur des 63. Beweises an, indem man ebenda genauso das größte aller drei rechtwinkligen Dreiecke in die (Ähnlichkeits-)Überlegungen miteinbeziehe und leite den Lehrsatz des PYTHAGORAS auf eine 65. Art und Weise her!

ÜBUNGSAUFGABE 2 FÜR DEN WERTEN L $\begin{matrix} \text{E} \\ \text{Ö} \end{matrix}$ SER: Man wende die Idee des Flächenvergleichs aus dem 63. Beweis auf die Figur des 64. Beweises an, indem man ebenda genauso auf zwei Arten den Flächeninhalt des größeren das größte aller drei rechtwinkligen Dreiecke berechne und leite den Lehrsatz des PYTHAGORAS auf eine 66. Art und Weise her!

ÜBUNGSAUFGABE 3 FÜR DEN WERTEN L $\begin{matrix} \text{E} \\ \text{Ö} \end{matrix}$ SER: Ergänzt man das Ausgangsdreieck durch beide Dreiecke aus den beiden (vier) Beweisen, so ergibt sich ein weiteres Dreieck, wenn man C mit beiden neu hinzugekommenen Punkten verbindet. Man beweise, dass dieses Dreieck zwar nicht mehr ähnlich zum Ausgangsdreieck ist, aber den gleichen Flächeninhalt aufweist.