4.18 Ergänzung zu den GRASSMANNschen Entwicklungssätzen

In [19], S. 106f haben wir für drei beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = r \cdot \left[(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}\right] \quad (*)$$

mit $\boxed{r \in \mathbb{R}}$ hergeleitet und $\boxed{\text{diesen}}$ anschließend dadurch bestimmt, dass wir für $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ speziell

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } \vec{c} = \vec{a}$$

gewählt haben (da obige Gleichung ja ohnehin für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ gilt), was uns dann zum Resultat $r = 1$ und dadurch schließlich zum (ersten) GRASSMANNschen Entwicklungssatz

$$\boxed{\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}}$$

geführt hat.

Nun erhebt sich aber die Frage[21], weshalb wir überhaupt von der Annahme ausgehen dürfen, dass r von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ unabhängig ist. Immerhin könnte es ja sein, dass r ausgehend von

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

eine Funktion

$$r: \ \mathbb{R}^9 \ \to \ \mathbb{R}, \ (x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c) \ \mapsto \ r(x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b, x_c, y_c, z_c)$$

ist.

Dass dies aber de facto nicht der Fall ist, zeigen **wir** nun wie folgt (wobei in **wir** - wie in Kürze ersichtlich sein wird - der werte L $\overset{\text{e}}{\underset{\text{ö}}{\ }}$ ser in beträchtlichem Ausmaß inkludiert sein wird):

Wir studieren die Änderung sowohl der linken Seite als auch der Klammer auf der rechten Seite von $(*)$, wenn x_a auf $f_1(x_a)$ abgebildet wird, wobei $f_1: \ D \ \to \ W$ mit sowohl $D \subseteq \mathbb{R}$ als auch $W \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist:

$$\Rightarrow \quad \vec{d} := \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \ \mapsto \left\{\left[\vec{a} + \begin{pmatrix} f_1(x_a) - x_a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times \vec{b}\right\} \times \vec{c} =$$

$$= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} + [f_1(x_a) - x_a] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} =$$

---

[21] Für selbige danke ich meinem Schüler P.V. WETZ (geb. 1999), welcher ebenjene im Dezember 2015 im Wahlpflichtfach Mathematik der vorletzten Klasse **mit Fug und Recht** gestellt hat.