6 mal 5 Aufgaben für die ÖMO-Kurse am
5.12., 12.12., 19.12., 9.1., 16.1. und 30.1. 2017/18
(ausgesucht von Dr. R. Resel, Kursleiter an der AHS Heustadelgasse)

1)

Marco nennt eine natürliche Zahl *folgsam*, wenn sie sich als Produkt zweier aufeinander folgender Zahlen schreiben lässt. Beispiel: Die Zahl 20 ist folgsam, da $20 = 4 \cdot 5$.

Zeige: Zu jeder folgsamen Zahl gibt es mindestens eine zweite folgsame Zahl, die mit der ersten multipliziert wieder eine folgsame Zahl ergibt.

2)

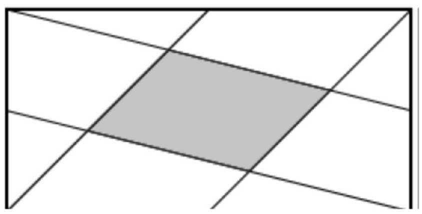
Für welche einstelligen Zahlen n ist der Wert der Differenz $9^{2017} - n^{2018}$ durch 10 teilbar?

3)

In einem Rechteck wird jede Ecke mit dem Mittelpunkt einer der gegenüberliegenden Seiten so verbunden, dass im Inneren des Rechtecks ein Viereck entsteht (grau hinterlegt, vgl. Abb.).

a) Zeige: Das entstandene Viereck ist ein Parallelogramm.

b) Wieviel Prozent der Rechtecksfläche entfallen auf das Parallelogramm?



4)

Paul wählt zwei positive ganze Zahlen und addiert ihre Summe, ihre Differenz, ihr Produkt und ihren Quotienten. Als Ergebnis erhält er 441.

Welche Zahlen hat er gewählt? Gibt es mehrere Möglichkeiten?

5)

Über der Strecke [AB] mit Mittelpunkt M wird der Thaleskreis konstruiert. Der Punkt C liegt auf dem Thaleskreis. Das Lot von M auf die Strecke [AC] schneidet den Thaleskreis im Punkt D und die Strecke $[AC]$ im Punkt N.

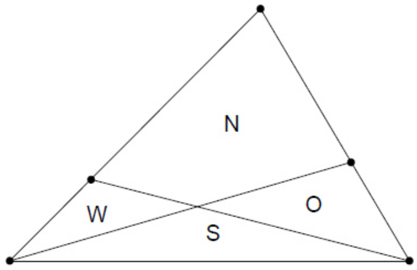
a) Zeige: $\overline{AD} = \overline{DC}$

b) Zeige: BD ist Winkelhalbierende des Winkels $\angle$CBA

c) Wie groß sind die Winkel des Vierecks ABCD in Abhängigkeit vom Winkel $\alpha = \angle BAC$

6)

Bauer Bählamm besitzt ein Weideland in Dreiecksform und will es zur Haltung von Schafen nutzen. Die Weide ist dabei in vier Pferche unterteilt. Teil W bietet fünf Schafen genug zum Fressen. Teil S reicht für zehn Schafe und acht Tiere finden genug Futter im Ostteil. Wir nehmen an, dass jedes Schaf die gleiche Menge Gras frisst.
Wie viele Schafe kann Bauer Bählamm im Nordteil halten?



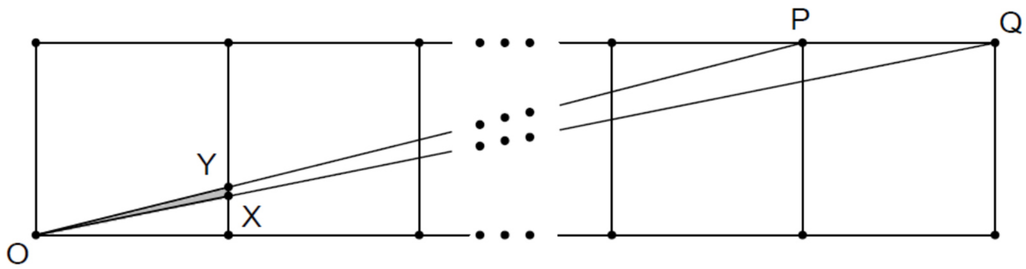
7)

An der Tafel stehen die ersten zehn Primzahlen. Viola schreibt mindestens einmal die Zahl 4 und mindestens einmal die Zahl 9 dazu. Der Durchschnitt aller nun an der Tafel stehenden Zahlen ist genau 10.

Wie viele Zahlen stehen jetzt mindestens an der Tafel?

8)

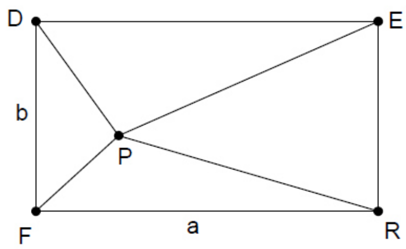
Wie in der Abbildung angedeutet, liegen 2015 Quadrate mit Seitenlänge 1 lückenlos nebeneinander.
Der Punkt O ist der linke untere Eckpunkt des 1. Quadrats, die Punkte P und Q sind entsprechend die rechten oberen Eckpunkte des vorletzten und letzten Quadrats.
Die Punkte O und Q bzw. O und P werden durch je eine Strecke verbunden. Diese schneiden die rechte Seite des 1. Quadrats in den Punkten X und Y.
Welchen Flächeninhalt besitzt das Dreieck OXY?



9)

Im Rechteck FRED mit den Seiten $a = \overline{FR}$ und $b = \overline{FD}$ wird ein Punkt P so gewählt, dass die Flächeninhalte der Dreiecke PDF, PFR und PED sich wie 1:2:3 verhalten.

Welchen Anteil hat das Dreieck PRE an der Rechtecksfläche?



10)

Kann die Summe von 2011 bzw. 2012 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen eine Quadratzahl sein? Schreibe jeweils, sofern möglich, die Folge mit der kleinsten Startzahl auf.

11)

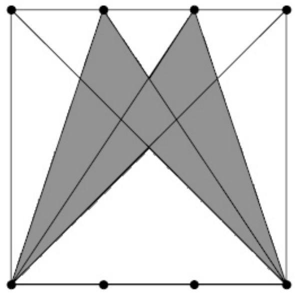
Zeige: Die Summe aus dem Produkt von vier aufeinander folgenden ungeraden ganzen Zahlen und der Zahl 16 ist eine Quadratzahl.

12)

Wie viele Teiler besitzt die Zahl $N = 2009^{2010} \cdot 2010^{2009}$?

13)

Herr G. möchte für den Gewinner seines Mathewettbewerbs als Siegertrophäe ein silbernes M anfertigen lassen.
Für den nebenstehenden Entwurf hat er in einem Quadrat zwei gegenüber liegende Seiten gedrittelt. Um den Wert des Preises zu ermitteln, muss der Silberschmied wissen, wie viel Prozent der Quadratfläche das M einnimmt.
Hilf ihm! Begründe deine Rechenschritte sorgfältig!



14)

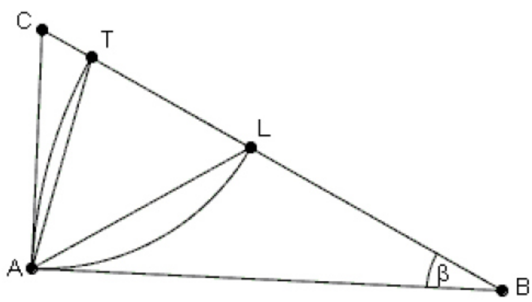
In einem Viereck ABCD ist c = d und β zweimal, γ dreimal und δ viermal so groß wie α.

a) Zeige: Die Diagonale [AC] halbiert den Winkel α.
b) Beweise: Das Lot von D auf [AC] teilt die Vierecksfläche im Verhältnis 1 : 2.
Hinweis: Eine Zeichnung allein genügt nicht!

15)

Das Dreieck ABC hat bei A einen rechten Winkel. T und L liegen so, dass $\overline{CA} = \overline{CL}$ und $\overline{BA} = \overline{BT}$ ist.

Wie groß muss β sein, damit das Dreieck ALT gleichschenklig ist?



16)

Paul möchte wissen, wie groß die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 ist. Ermittle den Summenwert und erkläre, wie du vorgegangen bist!

Später: Zusammenhang zur Differentialrechnung und unendlichen Reihen („Shishi“ im WPF 2018/19)

17)

Eine Menge von n aufeinanderfolgenden, aufsteigenden natürlichen Zahlen heißt *n - Drachen*, wenn gilt:

i) Die beiden ersten Drittel der Zahlenmenge bilden den Schwanz des Drachens;
ii) Das letzte Drittel bildet den Kopf;
iii) Die Summe der Zahlen im Schwanz ist gleich der Summe der Zahlen im Kopf.

Beispiel: Die neun aufeinanderfolgenden Zahlen 2,3,4,5,6,7,8,9 und 10 bilden den 9 - Drachen. Der Schwanz besteht aus den sechs Zahlen 2,3,4,5,6,7 mit der Summe 27. Die drei Zahlen 8,9,10 bilden den Kopf und haben ebenfalls die Summe 27.

a) Gib den 21 - Drachen an und zeige, dass er die drei Bedingungen erfüllt.
b) Warum kann es keinen 24 - Drachen geben?
c) Welche Summe hat der Schwanz des 99 999 - Drachens?

18)

Ein Mathefloh hüpft auf der Zahlengeraden herum.
Er springt von einer beliebigen rationalen Zahl a $\neq$ 1 los. Dabei darf er aber nur auf solchen rationalen Zahlen b $\neq$ 0 landen, die folgende Sprungbedingung erfüllen: $a+\frac{1}{b}=1$.

Weise nach, dass der Floh stets nach gleich vielen Sprüngen zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.

19)

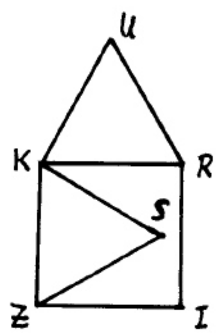
Beweise: Die Summe der Quadrate von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen kann keine Quadratzahl sein.

20)

Beweise: Für a, b, c > 0 gilt $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$

21)

ZIRK ist ein Quadrat. Die Dreiecke KRU und ZSK sind gleichseitig.
Begründe: Der Punkt S liegt auf der Gerade UI.



22)

Untersuche, ob es n-Ecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt!

a) Die Anzahl d der Diagonalen des n-Ecks ist dreimal so groß wie die Anzahl n seine Eckpunkte.

b) Die Anzahl n seiner Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl d seiner Diagonalen.

23)

Bestimme alle natürlichen Zahlen n, die bei der Teilung durch 3 den Rest 2, bei der Teilung durch 5 den Rest 3 und bei der Teilung durch 7 den Rest 4 liefern!

24)

Ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln der Länge s und einer Basis der Länge b besitzt Basiswinkel der Größe 15° . Ein zweites gleichschenkliges Dreieck hat die Basislänge s und die Schenkellänge b. Wie groß sind die Basiswinkel in diesem Dreieck?

25)

Die Seitenlängen a,b,c eines Dreiecks sind ganzzahlig. Die Länge einer Höhe des Dreiecks ist die Summe der Längen der beiden anderen Höhen.
Weise nach: Der Term $a^2 + b^2 + c^2$ ist eine Quadratzahl.

26)

Beweise:
Für beliebige Zahlen $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$$

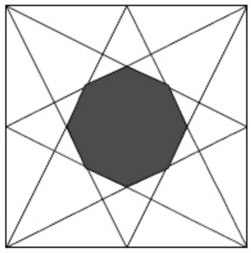
27)

Für welche natürlichen Zahlen n ist der Bruch $\frac{n-3}{n^2+2}$ kürzbar?

28)

Verbindet man die Seitenmittelpunkte eines gegebenen Quadrats mit den gegenüberliegenden Quadratecken, so entsteht im Innern ein Achteck.

Bestimme den Flächenanteil, den das Achteck überdeckt.



29)

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} < \overline{AC}$ und dem Winkel $\sphericalangle BAC = \alpha < 90^\circ$. Sei D der Punkt auf [AC] mit $\overline{DC} = \overline{AB}$, M die Mitte der Strecke [AD] , N die Mitte der Strecke [BC] und E der Schnittpunkt der beiden Geraden AB und MN .

Was läßt sich dann über die Seiten des Dreiecks EAM aussagen ?
Beweise deine Vermutung !
Drücke den Winkel $\sphericalangle AEM$ durch α aus !

30)

Die Zahlen p und q seien ein Primzahlzwillingspaar (= zwei Primzahlen, die sich um genau 2 unterscheiden) mit 3<p<q.
Zeige, dass das arithmetische Mittel dieser beiden Primzahlen $m = \frac{p+q}{2}$ durch 6 teilbar ist und dass das um 1 vermehrte Produkt $p \cdot q + 1$ dieser beiden Primzahlzwillinge durch 36 teilbar ist.