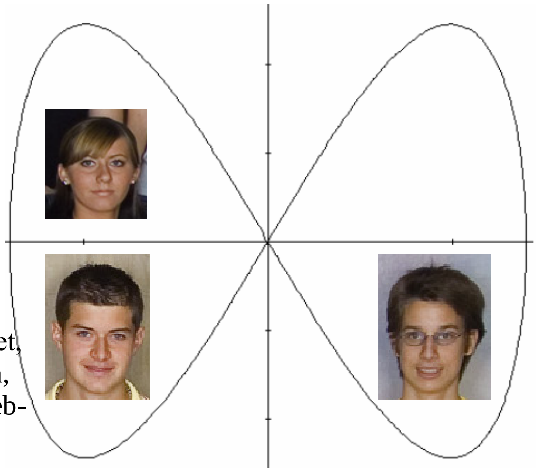
§5. Komplanation (Aufgaben 101 bis 115)

101) Die Kurve ν mit der Gleichung $\nu\!: 8y^2 = x^2 \cdot (1-8x^2)$ hat die Gestalt eines liegenden Achters (vgl. Abbildung rechts!).



a) Berechne die Koordinaten der höchsten und tiefsten Punkte von ν.

b) Rotiert ein Bogen von ν ausgehend vom Doppelpunkt bis zu einem der vier berechnten Punkte aus a) um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Rafi hält den Mantel dieses Drehkörpers als äußerst geeignet für einen "innovativen Partydeckel für φιλ" [nach dem Ed Hardy-Kapperl – siehe Aufgabe 10) der Aufgaben zum Wiederholungskapitel "Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse"! – eine willkommene(!) Abwechslung! ☺], weshalb sie Mad Mike bittet, den für die Produktion relevanten Mantelflächeninhalt zu berechnen, wofür dieser kurz darauf mit Kopfhörern (Mad caddies?!?) das Ergebnis $M = \frac{35}{92}$ verkündet! Nimm Stellung zu Mad Mikes Resultat!

102) Leite mit Hilfe des Ansatzes P(h|r), par.: $y^2 = ax$ und $P \in$ par die $\boxed{\text{nebenstehende Formel}}$ für den Mantelflächeninhalt jener Drehparaboloidkalotte her, welche bei Rotation des Parabelbogens von S(0|0) nach P(h|r) um die x-Achse entsteht [oder verifiziere sie für $P(12|\,2\sqrt{3}\,)$]. In jedem Fall (egal, ob nun ein Beweis oder eine Überprüfung durchgeführt wurde) ist aus der obigen Formel für das Verhältnis r:h = 3:2 eine einfache Formel für M in der Form M = kπrh herzuleiten!

$$\boxed{M = \frac{r\pi}{6h^2} \cdot \left[\sqrt{\left(r^2 + 4h^2\right)^3} - r^3\right]}$$

103) Rotiert der durch den Punkt P(h|r) gehende Graph einer Potenzfunktion dritten Grades f [$y = f(x) = a \cdot x^3$] im Intervall [0;h] um die x-Achse, so entsteht ein hornförmiger Drehkörper mit dem Radius r und der Höhe h, für dessen Mantelflächeninhalt M dann die $\boxed{\text{nebenstehende Formel}}$ gilt. Wähle nun a) oder b)!

$$\boxed{M = \frac{\pi}{27r} \cdot \left[\sqrt{\left(9r^2 + h^2\right)^3} - h^3\right]}$$

a) Beweise diese Formel oder verifiziere sie für P(45|36)!

b) In jedem Fall [egal, ob nun in a) ein Beweis oder eine Überprüfung durchgeführt wurde] ist aus der obigen Formel für das Verhältnis r:h = 1:4 eine einfache Formel für M in der Form M = kπrh herzuleiten!

104) Beweise für die spezielle Drehparaboloidkalotte mit dem Radius r und der Höhe $h = \frac{6r}{5}$ sowohl die Mantelflächeninhaltsformel $M = \frac{259\pi}{135} \cdot r^2$ als auch die Volumsformel $V = \frac{3\pi}{5} \cdot r^3$!

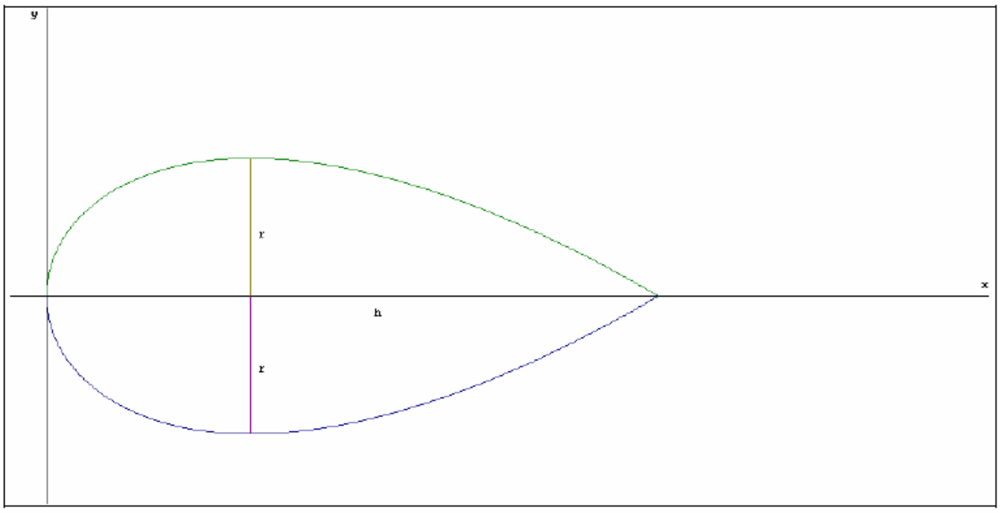
105) Einer Drehparaboloidkalotte (Radius r, Höhe $h = \frac{6r}{5}$) wird eine koaxiale Kugelkalotte aufgesetzt, wobei der erzeugende Kreis die erzeugende Parabel im Übergangspunkt berührt.

a) Leite für diesen zusammengesetzten Körper die Mantelflächeninhaltsformel M=M(r) und die Volumsformel V=V(r) her!

b) Berechne r, wenn V=18290cm^3 gilt.

c) Berechne r, wenn M=70730cm^2 gilt.

106) Nebenstehende Abbildung zeigt den Achsenschnitt eines Meissels, dessen Profilkurve durch eine Funktion f mit einer Funktionsgleichung der Bauart $y = f(x) = a\sqrt{x} - bx\sqrt{x}$ beschrieben wird.



a) Stelle in Abhängigkeit von h (siehe Skizze!) die Funktionsgleichung von f auf, wenn der maximale Querschnittsdurchmesser (2r in der Abbildung!) $\frac{4h}{9}$ beträgt.

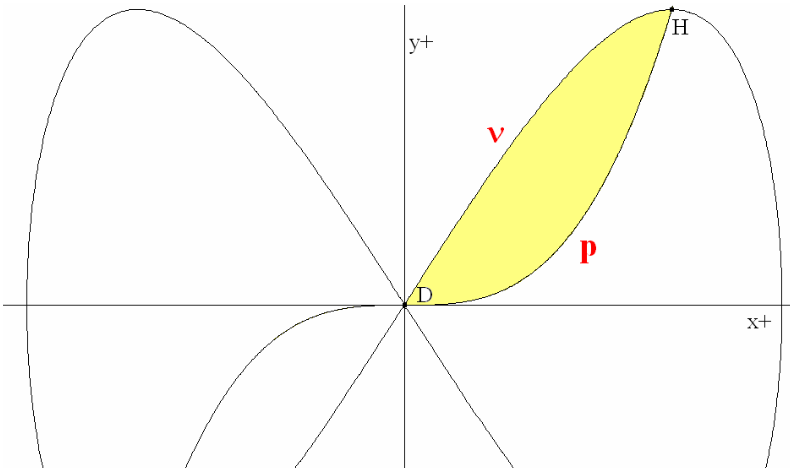
b) Beweise die Formel $M = \frac{h^2\pi}{3}$ für den Mantelflächeninhalt des Meissels.

c) Beweise die Formel $V = M \cdot \frac{h}{6}$ für das Volumen des Meissels.

107) Eine Drehparaboloidkalotte, bei der sich Höhe und Radius wie 4:15 verhalten, weist einen Mantelflächeninhalt von 19327078mm^2 auf. Berechne Höhe und Radius!

108) Eine Drehparaboloidkalotte, bei der sich Höhe und Radius wie 7:48 verhalten, weist einen Mantelflächeninhalt von 4995675mm^2 auf. Berechne Höhe und Radius!

109) Durch den Punkt $H\left(a\middle|\frac{a}{4}\right)$ verläuft genau eine LISSAJOUS-Kurve ν[ν: $y^2 = b^2 \cdot x^2 \cdot (2a^2 - x^2)$] sowie eine Potenzkurve dritten Grades p[p: $y = c \cdot x^3$].



a) Drücke b und c durch a aus und stelle Gleichungen von ν und p auf!

b) Zeige, dass H ein Hochpunkt von ν ist!

c) Berechne den Flächeninhalt $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(a)$ des gefärbten Gebiets!

d) Rotiert das gefärbte Gebiet um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Berechne dessen Mantelflächeninhalt $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(a)$!

e) Es sei $\boldsymbol{A} = 207$ und $\boldsymbol{M} = 3284$. Zeige, dass dies in beiden Fällen ziemlich genau auf den gleichen Wert (Welchen?) für a führt!

110) Eine Parabel in erster Hauptlage (Parameter p) rotiert im Intervall $[0; 24p]$ um die $x-$Achse.

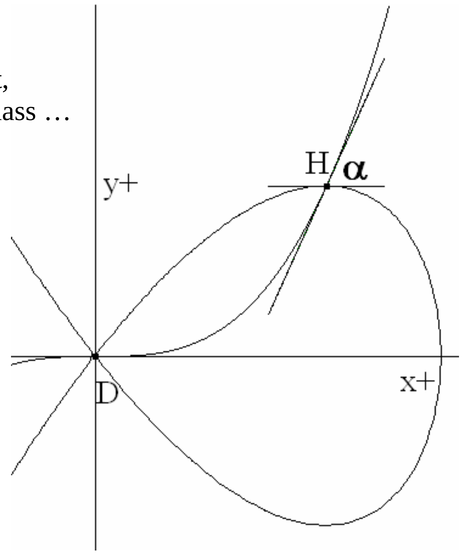
(a) Ermittle das Oberflächenmaß des daraus resultierenden Rotationsparaboloids Φ.

(b) Φ wird längs seines Basiskreises k von einem koaxialen geraden Kreiskegel Γ berührt, aus dem die Trägerebene ε von k und die Tangentialebene an Φ in seinem Scheitel einen Drehkegelstumpf ausschneiden. Setze die Mantelflächeninhalte, die Oberflächeninhalte sowie die Volumina dieses Drehkegelstumpfes und des Rotationsparaboloids aus (a) jeweils in ein möglichst einfaches ganzzahliges Verhältnis!

111) a) Zum Nachdenken (und hoffentlich erfolgreichem Lösen, andernfalls mit der angegebenen Lösung weiterrechnen!): Welche Potenzfunktion $y = f(x) = a\cdot x^{\alpha}$ erfüllt die Differentialgleichung $y = y' \cdot y''$?

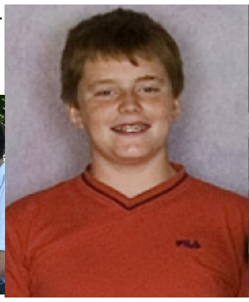
b) Rotiert der Graph von f über dem Intervall $\left[0;\frac{6\sqrt{10}}{5}\right]$ um die x-Achse, so entsteht ein Drehkörper. Berechne dessen Oberflächeninhalt!

112) In nebenstehender Abbildung sind ein NEWTON-Knoten k [k: $27ay^2 = x^2(9a-x)$] sowie eine Potenzkurve dritter Ordnung eingezeichnet, über deren wechselseitige Eigenschaften zu überprüfen bzw. zu zeigen ist, dass …



a) … der Schnittwinkel α exakt 45° beträgt, …

b) die Oberflächeninhalte jener Drehkörper, die bei Rotation der beiden Kurvenbögen DH um die x-Achse entstehen, sich wie 2040:577 verhalten ("BBB" a.k.a. "Bino(ler)-Brüder-Behauptung", die nach ausgeglichenem Altersunterschied fast wie Zwillinge aussehen … ☺; dennoch: "Bino sen." ist heute cooler! ☺).



113) Rotiert der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{1}{10}\cdot x^5 + \frac{1}{6x^3}$ im Intervall $[1,\sqrt{2}]$ um die x-Achse so entsteht ein Drehkörper. Berechne seinen Mantelflächeninhalt und kommentiere Mad Mikes Resultat $\frac{119}{81}$!

114) Rotiert der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{1}{11}\cdot x^5\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{7x^3\cdot\sqrt{x}}$ im Intervall [1,2] um die x-Achse so entsteht ein Drehkörper. Berechne seinen Mantelflächeninhalt und kommentiere Mad Mikes Resultat $\frac{869}{16}$!

115) Rotiert der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{1}{5}\cdot x^2\cdot\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ im Intervall [1,2] um die x-Achse so entsteht ein Drehkörper. Berechne seinen Mantelflächeninhalt und kommentiere Mad Mikes Resultat $\frac{367}{33}$!

Lösungen der Aufgaben zu §5 (Komplanation)

101) a) $\left(\pm\frac{1}{4}\middle|\pm\frac{1}{16}\right)$, b) $M = \frac{31\pi}{256} = 0{,}380427235$

$\frac{35}{92} = 0{,}380434783$

105) a) $M = \frac{2791\pi}{540}\cdot r^2$, $V = \frac{69\pi}{40}\cdot r^3$, b) $r \approx 15$, c) $r \approx 66$

106) a) $y = f(x) = \frac{h\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{\sqrt{3h}}$

107) h=64cm, r=240cm

108) h=182mm, r=1248mm

109) a) v: $16a^2\cdot y^2 = x^2\cdot(2a^2-x^2)$, p: $4a^2\cdot y = x^3$, c) $\boldsymbol{A} = \frac{8\sqrt{2}-7}{48}\cdot a^2$, d) $\boldsymbol{M} = \frac{49\pi}{108}\cdot a^2$, e) a≈48

110) a) $276p^2\pi$, b) $M_{KEGELSTUMPF} : M_{PARABOLOIDKALOTTE} = 21 : 19$, $O_{KEGELSTUMPF} : O_{PARABOLOIDKALOTTE} = 26 : 23$

$V_{KEGELSTUMPF} : V_{PARABOLOIDKALOTTE} = 7 : 6$

111) a) $y = \frac{1}{18}\cdot x^3$, b) $\frac{304\pi}{15}$

112) a) $y = \frac{1}{108a^2}\cdot x^3$, b) $\text{Oberflächeninhalt}_{\text{"Newtonoid"}} = 20a^2\pi$, $\text{Oberflächeninhalt}_{\text{"Horn"}} = 8\sqrt{2a^2}\pi$, exaktes Verhätnis daher …

113) Das exakte Resultat lautet $M = \frac{3367\pi}{7200}$. ↑↑

114) Das exakte Resultat lautet $M = \frac{13120263\pi}{758912}$. Selbst!

115) Das exakte Resultat lautet $M = \frac{177\pi}{50}$.