



49. Österreichische Mathematische Olympiade 2017

Kurswettbewerb für Anfänger

Kursleiter: Dr. Robert Resel

Termin: Di, 15. Mai 2018

Arbeitszeit: 3 Stunden

1. Beweise: Sind a , b und c die Seitenlängen eines nicht entarteten und auch nicht gleichschenkligen Dreiecks mit der längsten Seite c , dann hat die Gleichung

8P

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{x+c}$$

stets zwei reelle Lösungen.

Zeige ferner, dass nur eine Vorzeichenkombination der beiden Lösungen möglich ist.

2. In der nebenstehenden Abbildung wurden die Seiten eines Rechtecks in jeweils vier gleich lange Teile geteilt, woraus sich das innerhalb des Rechtecks gefärbte Viereck ergibt. Beweise, dass es sich dabei um ein Parallelogramm handelt und zeige, dass selbiges mehr als die Hälfte der Rechtecksfläche einnimmt. Ferner gebe man den exakten Bruchteil des Parallelogrammflächeninhalts am Rechtecksflächeninhalt an (und nutze die bereits vorhandene Figur - zumindest - für sinnvolle Beschriftungen).

8P

3. Beweise für alle $a \in \mathbb{R}^+$ sowie für alle $b \in \mathbb{R}^+$ die Ungleichung

8P

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

und untersuche auch den Fall der Gleichheit!

Gutes Gelingen!

