

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 4 |
| 2 | Stochastik | 9 |
| 2.1 | Elementare Statistik und ebenso elementare Komplexitätstheorie | 9 |
| 2.2 | Der lokale Grenzwertsatz von MOIVRE-LAPLACE | 11 |
| 2.3 | Elementare Wählerstromanalyse | 24 |
| 3 | Analysis | 27 |
| 3.1 | Implizites Differenzieren | 27 |
| 3.2 | LAGRANGE-Multiplikatoren | 30 |
| 3.3 | Extrema von Funktionen in zwei Variablen | 34 |
| 3.4 | Extrema I: Winkel Ebene/Gerade | 41 |
| 3.5 | Extrema II: Winkel Ebene/Ebene | 43 |
| 3.6 | Extrema III: Treffnormalen | 44 |
| 3.6.1 | Ein geometrischer Zugang | 44 |
| 3.6.2 | Ein analytischer Weg | 46 |
| 3.7 | Extrema IV: Isoperimetrische Vierecke | 48 |
| 3.8 | Extrema V: Anwendungen der LAGRANGE-Multiplikatoren | 54 |
| 3.8.1 | Günstigste Stromleitung zum abseits gelegenen Haus | 54 |
| 3.8.2 | Volumsgrößter Drehzylinder in einer Kugel | 56 |
| 3.8.3 | Volumskleinsten Drehkegel um einen coaxialen Drehzylinder | 58 |
| 3.8.4 | Volumsgrößter Drehkegel in einer Kugel | 59 |
| 3.8.5 | Volumskleinsten Drehkegel um eine Kugel | 61 |
| 3.8.6 | Maximaler Sehwinkel zum Genuss eines Bildes | 63 |
| 3.8.7 | Drehkegel minimalen Mantelflächeninhalts bei vorgegebenem Volumen | 65 |
| 3.8.8 | Die ideale Eprouvette | 67 |
| 3.8.9 | Volumsgrößter Drehzylinder in einem coaxialen Drehkegel | 68 |
| 3.8.10 | Materialverbrauchsfreundlichster Zylinder | 70 |
| 3.8.11 | Ausblick 1: Fassungsreichster Zylinder | 71 |
| 3.8.12 | Ausblick 2: Volumsgrößte Pyramide aus einem Quadrat | 72 |
| 3.8.13 | Ausblick 3: Kürzeste Verbindung zweier Punkte über eine Gerade | 73 |
| 3.8.14 | Ausblick 4: Kugel und Würfel | 74 |
| 3.8.15 | Ausblick 5: Trapez in Halbkreis | 75 |
| 3.9 | Eigenschaften der komplexen Ableitung | 75 |
| 3.10 | Geodätische Kurven auf der Kugel | 78 |
| 3.11 | Die EULER-MASCHERONI-Konstante | 79 |
| 3.12 | Linearapproximationen und Ableitungsregeln | 81 |
| 3.13 | Ein heuristischer Weg zur TAYLOR-Formel | 84 |
| 3.14 | Potenzfunktion, Exponentialfunktion oder keines von beiden? | 87 |
| 4 | Arithmetik und Algebra | 89 |
| 4.1 | Zur Division von Brüchen | 89 |
| 4.2 | Auf dem Weg zu binomischen Formeln | 90 |
| 4.2.1 | Die erste binomische Formel und der Lehrsatz von PYTHAGORAS | 90 |
| 4.2.2 | Die zweite binomische Formel mit Hilfe der ersten binomischen Formel | 91 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.3 | Die dritte binomische Formel via Abbildungsgeometrie | 92 |
| 4.2.4 | Von der Prozentrechnung über die BERNOULLISCHE Ungleichung zur ersten binomischen Formel | 93 |
| 4.2.5 | Vermischte Aufgaben zum Herleiten binomischer Formeln | 94 |
| 4.3 | Das harmonische Mittel - phänomenologische Vielfalt | 95 |
| 4.3.1 | Zum Lösen von Textaufgaben - ein Stück angewandter Mathematik | 95 |
| 4.3.2 | Zum Prozess des Abstrahierens - ein Stück reiner Mathematik . . . | 97 |
| 4.4 | Lösungsformeln für quadratische Gleichungen: Diverse <i>elementare</i> Wege . . | 106 |
| 4.4.1 | Quadratische Gleichungen selbst gemacht | 106 |
| 4.4.2 | Ein Gleichungssystem als Schlüssel | 112 |
| 4.4.3 | Symmetrie als Schlüssel | 113 |
| 4.4.4 | Pythagoras als Schlüssel | 114 |
| 4.4.5 | Die dritte binomische Formel als Schlüssel | 116 |
| 4.4.6 | Produkt-Nullsatz als Schlüssel | 116 |
| 4.4.7 | Ein multiplikativer Ansatz als Schlüssel | 118 |
| 4.4.8 | Ein achter Zugang in Form einer Übungsaufgabe | 121 |
| 4.4.9 | Ein neunter Zugang in Form einer Übungsaufgabe | 121 |
| 4.5 | Das Pentagon und komplexe Zahlen | 122 |
| 4.6 | Symmetrische algebraische Gleichungen und eine Ergänzung zur VIÈTA- Gruppe | 124 |
| 4.6.1 | Symmetrische Gleichungen höheren Grades: Ein Ausblick | 124 |
| 4.6.2 | Erweiterung der Satzgruppe von VIÈTA | 126 |
| 4.7 | Steigungsadditionen und komplexe Zahlen | 127 |
| 4.8 | Zugänge zu den komplexen Zahlen | 131 |
| 4.9 | Der Fundamentalsatz der Algebra | 135 |
| 4.10 | Lösungsformeln für quadratische Gleichungen vom höheren Standpunkt . . | 139 |
| 4.10.1 | Komplexe Zahlen und Matrizen als Wegbereiter | 139 |
| 4.10.2 | Komplexe Zahlen und Polynome als Wegbereiter | 140 |
| 4.11 | Fibonacci-Zahlen und Binomialkoeffizienten | 142 |
| 5 | Geometrie | 143 |
| 5.1 | Grundlagen der <i>ebenen</i> analytischen Geometrie | 143 |
| 5.1.1 | Eine Flächeninhaltsformel | 143 |
| 5.1.2 | Matrizen, Vektoren und Determinanten: Basics | 144 |
| 5.1.3 | Präzisierung des Vektorbegriffs | 145 |
| 5.1.4 | Ausweitung des Vektorbegriffs | 146 |
| 5.1.5 | Rechnen mit Vektoren | 148 |
| 5.1.6 | Betrag von Vektoren | 153 |
| 5.1.7 | Orthogonalität von Vektoren: Das skalare Produkt | 154 |
| 5.1.8 | Die Kippregel | 157 |
| 5.1.9 | Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts | 159 |
| 5.1.10 | Die (HESSEsche) Normalvektorform der Geradengleichung | 162 |
| 5.1.11 | Die CRAMERSche Regel | 165 |
| 5.2 | Grundlagen der Trigonometrie | 167 |
| 5.2.1 | Sinus und Cosinus am Einheitskreis I: Determinante und Skalarpro- dukt | 167 |
| 5.2.2 | Sinus und Cosinus am Einheitskreis II: Koordinaten | 167 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 5.2.3 | Additionstheoreme für Sinus und Cosinus | 169 |
| 5.2.4 | Sinus, Cosinus (und Tangens nicht nur) im rechtwinkligen Dreieck . | 170 |
| 5.2.5 | Symbiose zwischen Vektorrechnung und Trigonometrie | 171 |
| 5.3 | Geometrie und Zahlentheorie: Ganze Dreiecke | 177 |
| 5.4 | Eine Ergänzung zu Determinante und Skalarprodukt | 181 |
| 5.5 | Spuren, Determinanten und mehr davon | 183 |
| 5.6 | Vier- und höherdimensionale Geometrie | 185 |
| 5.6.1 | Der vier- (sowie n)-dimensionale ($n \geq 4$) Würfel und | 185 |
| 5.6.2 | ... einer seiner räumlichen Schnitte | 191 |
| 5.6.3 | Hypervolumina höherdimensionaler Sphären | 193 |
| 5.6.4 | Kegel im \mathbb{R}^n und deren Beziehungen zu Sphären | 202 |
| 5.6.5 | Winkel zwischen zwei Ebenen im \mathbb{R}^4 | 205 |
| 5.6.6 | Sonderfälle für Winkelmaße zwischen Ebenen | 209 |
| 5.6.7 | Charakterisierung isogonaler Ebenenpaare | 210 |
| 5.7 | Durchschnitt von Polygonen: Ein Spezialfall | 213 |
| 5.8 | Plückers μ für algebraische Kurven höherer Ordnung | 215 |
| 5.9 | Ebene Kurven in Parameterdarstellung (PDST) | 220 |
| 5.9.1 | Ein simples, aber überraschendes Einstiegsbeispiel | 220 |
| 5.9.2 | Weitere Aufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven | 222 |
| 5.9.3 | Übungsaufgaben zu(nächst zu) ebenen Kurven | 228 |
| 5.10 | Eine Ergänzung zum Winkel zwischen Gerade und Ebene | 240 |
| 5.11 | Dreiecksgeometrie | 242 |
| 5.11.1 | Kopunktales Geraden I: Streckensymmetralen und Höhen | 242 |
| 5.11.2 | Kopunktales Geraden II: Schwerlinien und Winkelsymmetralen . . . | 244 |
| 5.11.3 | Kollineare Punkte I: Die EULER-Gerade | 251 |
| 5.11.4 | Kollineare Punkte II: Die WALLACE-Gerade | 253 |
| 5.11.5 | Kopunktales Geraden III: Orthologische Dreiecke I | 257 |
| 5.11.6 | Kopunktales Geraden IV: Orthologische Dreiecke II | 258 |
| 5.12 | HP-Flächen | 260 |
| 5.12.1 | $z = x^2 - y^2$ | 260 |
| 5.12.2 | Zum eigenständigen Üben: $z = xy$ | 262 |
| 5.12.3 | Ein windschiefes Viereck | 263 |
| 5.12.4 | Ein weiteres windschiefes Viereck zum eigenständigen Üben | 267 |
| 5.13 | Raumkurven und Raumflächen in PDST | 268 |
| 5.13.1 | Einstieg: Die kleine Lösungsformel als Fläche | 268 |
| 5.13.2 | Weitere(s zu) Flächen (und Kurven) im Raum (und der Ebene) – Übungsaufgaben | 271 |