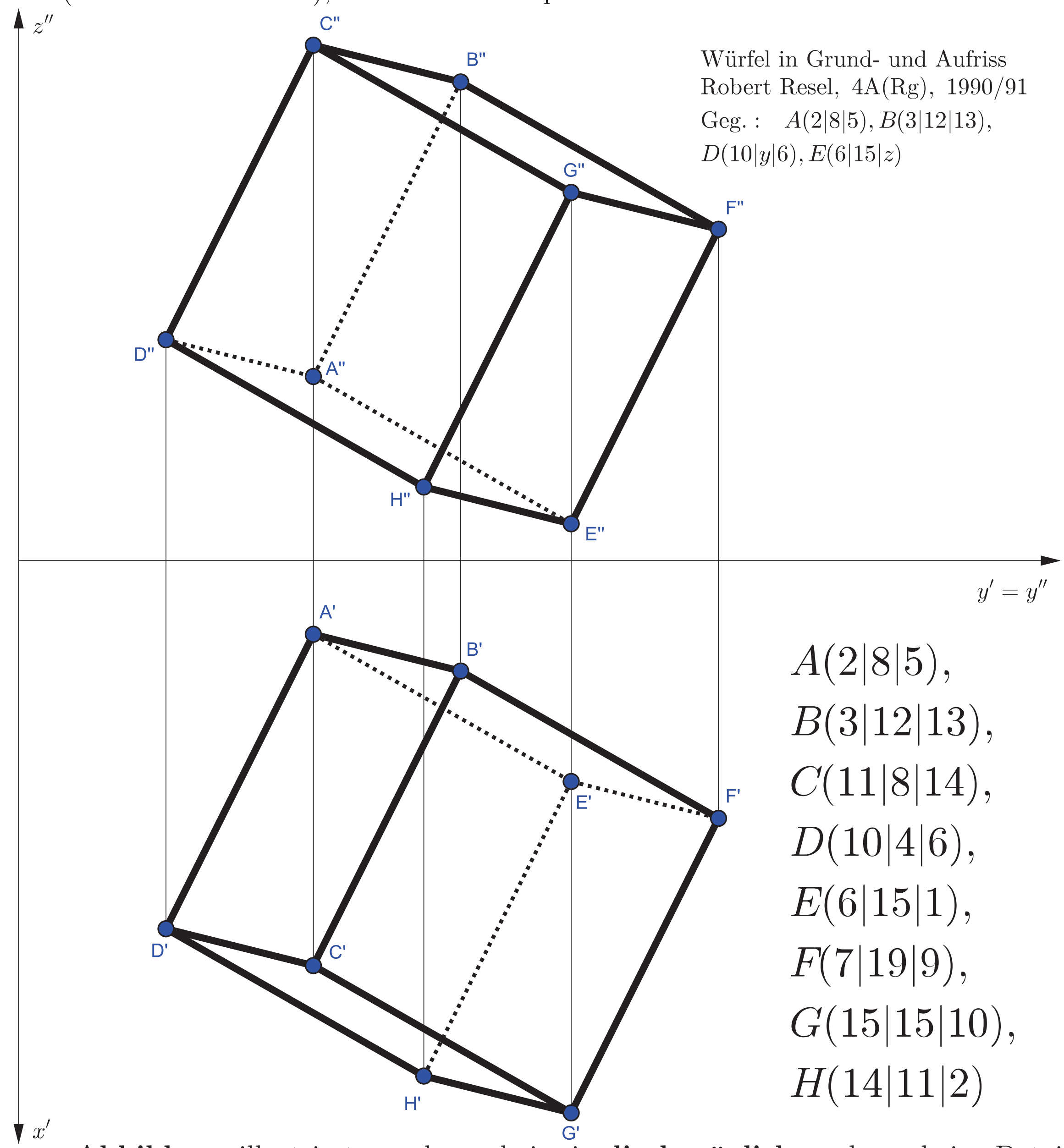
65 Der Würfel samt Umfeld in geometrisch Zeichnen

In Abschnitt ... wurde der in Österreich geführte Unterrichtsgegenstand "*Geometrisches Zeichnen*" (gebräuchliche Abkürzung: GZ) erwähnt, in welchem nebst Themen wie dem ebda behandelten (mathematischen Hintergrund des) Parabolspiegel(s) auch raumgeometrische Elemente eine entscheidende Rolle spielen. So ermöglicht etwa die von uns in B1, S. 28 erläuterte *Zweitafelprojektion* - welche auf niemand Geringeren als den Urvater der *Darstellenden Geometrie* schlechthin, nämlich Gaspard Monge (1746-1813), zurückgeht - die Ansicht eines Objekts unter Normalprojektion auf zwei zueinander normal stehende Bildebenen, wobei beide Bilder in ein und derselben Zeichenebene dargestellt werden können (Details dazu a.a.O!), wie das am Beispiel eines Würfels $ABCDEFGH$ in der



oberen Abbildung illustriert wurde, wobei wir **diesbezüglich** auch noch im Detail sowohl auf die **Angabe** (rechts oben in der Abbildung) als auch die **Darstellung der Sichtbarkeit** eingehen werden.

Beginnen wir mit der **Angabe**, welche aus vier (teilweise unvollständig) koordinatisierten

Würfeleckpunkten besteht, welche ein sogenanntes *orthogonales Dreibein* darstellen (bzw. aufgrund der Unvollständigkeit der Angabe: darstellen sollen), o.B.d.A sind dies in der obigen Problemstellung (wie auch den anschließend folgenden $\boxed{\text{zahlreichen Übungsaufgaben}}$[69]) die Punkte A, B, D und E, wobei im konkreten Fall die Punkte A und B vollständig koordinatisiert wurden und dadurch unter Anwendung des Lehrsatzes von PYTHAGORAS im Raum (ergo: Berechnung der Länge jeder der vier Raumdiagonalen d_i mit $1 \leq i \leq 4$ in einem Quader mit den Kantenlängen a, b und c via $d_i = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\ \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$) zunächst die Seitenlänge s des Würfels berechnet werden kann:

$$A(2|8|5),\ B(3|12|13) \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 1\ , \Delta y = 4,\ \Delta z = 8$$

$$\Rightarrow \quad s = \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$$

Für die fehlende y-bzw. z-Koordinate von D bzw. E gilt es nun

$$1) \quad \boxed{\overline{AD} = 9 \ \text{ sowie } \ \overline{BD} = 9\sqrt{2}}$$

und überdies

$$2) \quad \boxed{\overline{AE} = 9 \ \text{ sowie } \ \overline{BE} = 9\sqrt{2}}$$

zu fordern.[70]

- $\boxed{\text{ad 1):}}$

$$\overline{AD}: \quad \Delta x = 8,\ \Delta y = y - 8,\ \Delta z = 1 \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{8^2 + (y-8)^2 + 1^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 65 + (y-8)^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad (y-8)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad {}_1y_2 - 8 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 4,\ y_2 = 12$$

$$\overline{BD}: \quad \Delta x = 7,\ \Delta y = y - 12,\ \Delta z = -7 \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} = 9\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{7^2 + (y-12)^2 + 7^2} = 9\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 98 + (y-12)^2 = 81 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (y-12)^2 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad {}_3y_4 - 12 = \pm 8 \quad \Rightarrow \quad y_3 = 4,\ y_4 = 20$$

Wegen $y_1 = y_3$ ist demnach $D(10|4|6)$ der gesuchte Punkt.

---

[69] Dabei sind $\boxed{\text{selbige}}$ konkret aus dem GZ-Unterricht des Verfassers der vorliegenden Zeilen hervorgegangen, in welchem Schüler der 8. Schulstufe (letzte Klasse der sogenannten Unterstufe in Österreichs allgemeinbildend höheren Schulen) nach dem Erwerb der entsprechenden "Tools" derartige Problemstellungen selbst lösen sollten, und zwar mittels Computereinsatz, jedoch ohne untereinander Ergebnisse austauschen zu können.

[70] Nota bene: Nur jeweils eine der beiden Forderungen reicht nicht aus, da etwa die erste/zweite Forderung auf den Schnitt der Kugelfläche mit Mittelpunkt A/B und Radius $9/9\sqrt{2}$ mit einer Parallelen zur y-Achse hinausläuft, was auf zwei Schnittpunkte führt, womit also überhaupt nur dann ein "Lösungswürfel" existiert, wenn einer dieser Schnittpunkte auf beiden Kugelflächen liegt. Von einem (etwas überspitzt formuliert) höheren Standpunkt (Oberstufe $\rightarrow$ Vektorrechnung!) aus betrachtet würde die Vorgabe von jeweils einer Koordinate von D reichen, da durch die geforderte Orthogonalität alle gesuchten Punkte somit in einer Normalebene auf AB durch A, ferner in einer entsprechenden Hauptebene (bedingt durch die eine bekannte Koordinate) und schließlich auf einer Kugelfläche um A liegen, was auf den Schnitt der Kugelfläche mit der Schnittgerade der beiden involvierten Ebenen hinausläuft. Für E erhält man dann schließlich für jede Lösung von D via vektoriellem Produkt zwei Lösungen.

- $\boxed{\boxed{\text{ad 2):}}}$

$$\overline{AE}: \quad \Delta x = 4,\ \Delta y = 7,\ \Delta z = z - 5 \quad \Rightarrow \quad \overline{AE} = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{4^2 + 7^2 + (z-5)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad 65 + (z-5)^2 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad (z-5)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad {}_1z_2 - 5 = \pm 4 \quad \Rightarrow \quad z_1 = 1,\ z_2 = 9$$

$$\overline{BE}: \quad \Delta x = 3,\ \Delta y = 3,\ \Delta z = z - 13 \quad \Rightarrow \quad \overline{BE} = 9\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{3^2 + 3^2 + (z-13)^2} = 9\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 18 + (z-13)^2 = 81 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \quad (z-13)^2 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad {}_3z_4 - 13 = \pm 12 \quad \Rightarrow \quad z_3 = 1,\ z_4 = 25$$

Wegen $z_1 = z_3$ ist demnach $E(6|15|1)$ der gesuchte Punkt.

Durch Parallelverschieben und Schneiden ergeben sich dann auch noch die anderen vier Eckpunkte C, F, G und H.

Im **Anhang** dieses Abschnitts werden wir (sozusagen als Hintergrundwissen) außerdem noch auf eine an die zehn Ausgangskoordinaten geknüpfte Bedingung herleiten, damit die Problemstellung überhaupt lösbar ist und in diesem Zusammenhang noch auf eine besondere Überraschung stoßen.

Kommen wir nun zur **Sichtbarkeitsausführung**, welche auf einer an und für sich ganz simplen (aber keineswegs trivialen) Idee fußt: Dazu betrachten wir zunächst das Aufrissbild des Würfels in der Abbildung zu Beginn dieses Abschnitts, woran wir unmittelbar erkennen, dass E **bzw.** C **von allen acht Würfeleckpunkten die kleinste bzw. größte** z**-Koordinate aufweist, also etwas salopp formuliert am tiefsten bzw. am höchsten liegt**. Da nun aber im Grundriss gerade ebenjene "Höheninformation" fehlt (da ja die z-Koordinaten projektionsbedingt wegfallen), können wir selbige nun dadurch ausgleichen, indem wir uns **obige ergänzende Information** zunutze machen, indem wir wie folgt überlegen: Da der Würfelckpunkt E am tiefsten liegt, sind die drei von ihm ausgehenden Würfelkanten demnach in der Ausfertigung als unsichtbar (etwa strichliert oder punkt-strichliert ausgeführt) darzustellen, wohingegen (sozusagen als "Gegenprobe") alle von C ausgehenden Flächen sichtbar erscheinen.

Entsprechend überlegen wir ausgehend vom Grundriss und beobachten, dass **A bzw. G von allen acht Würfeleckpunkten die kleinste bzw. größte x-Koordinate aufweist, ergo wiederum umgangssprachlich ausgedrückt am weitesten hinten bzw. vorne liegt**. Indem im Aufriss aber gerade diese "Tiefeninformation" verloren geht, verwenden wir **genau diese Beobachtung**, um zu folgender Erkenntnis zu gelangen: Da der Würfeleckpunkt A am weitesten hinten liegt, sind die drei von ihm ausgehenden Würfelkanten demnach in der Ausfertigung als unsichtbar darzustellen, wohingegen (wiederum als "Gegenprobe") alle von G ausgehenden Flächen sichtbar erscheinen.

Im Folgenden findet sich nun eine reiche Vielzahl an Übungsaufgaben (samt - auch grafischen! - Lösungen), bei welchen für den Fall, dass A nicht zu den "vollständigen Punkten" gehört, eben via $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ oder $\overline{DE}$ zuerst $s\sqrt{2}$ berechnet wird.