The progress of mathematics can be viewed as progress from the infinite to the finite.
Gian-Carlo Rota

1 Einleitung

Die Mathematik schafft es wie keine andere Wissenschaft, potentiell unendlich viele Fliegen mit einer (oder zumindest deutlich weniger) Klappe(n) zu schlagen, was *ein* Verdienst ihres enormen Abstraktionsvermögens ist und durch obiges Zitat wahrhaft aphoristisch auf den Punkt gebracht wird.

Als Nachfolgeband des im selben Verlag erschienenen Buchs **Reise zum Mittelpunkt der Mathematik** heftet es sich auch das vorliegende Werk an die Fahnen, **Mathematik** anhand ausgewählter Abschnitte [wenn auch um 21 (passend zum Jahrhundert) reicher an der Zahl als 80, wobei wir dennoch einmal mehr Jules Verne huldigen wollen und bezüglich des entsprechenden Titelteils meinem lieben Kollegen Florian Wolf gedankt sei) in ihrer vollen Pracht dem werten L$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}$ser **als intellektuelles Erlebnis zuteil werden zu lassen**. Dabei wendet sich der Autor **deshalb** in dieser Form an sein Publikum, weil es sich bei der Mathematik [mit den Worten des österreichischen Mathematikers und Mathematikdidaktikers Hans-Christian Reichel (1945-2002) gesprochen] um alles andere als einen Zuschauersport handelt und der werte L$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}$ser deshalb in (noch) verstärkt(er)em Maße (als schon im obig zitierten Vorgänger) dazu eingeladen/aufgefordert wird, sich selbst kognitiv einzubringen, und dies **nicht nur** im rezeptiven Sinne **als Leser**, sondern auch (u.a., vgl. die folgende Fußnote) **als aktiver Löser von über**[1] **100 Übungsaufgaben**.

Vor der Begegnung mit zunächst (Abschnitt 2.1) und auch zum Abschluss (Abschnitt 2.3) elementaren statistischen Themen sowie bereits etwas anspruchsvollerer wahrscheinlichkeitstheoretischer Materie (Abschnitt 2.2) soll zunächst in Form einer kurzen *Tour d´horizon* sowohl das soeben kurz angedeutete Kapitel 2 über Stochastik (als Sammelbegriff für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie), als auch das Kapitel 3 bzw. 4 bzw. 5 über Analysis, Arithmetik und Algebra bzw. Geometrie (mehr oder minder kurz) über das Inhaltverzeichnis hinausgehend umrissen werden:

- Nach einer behutsamen Einführung in elementare statistische Grundbegriffe und einer ebenso elementaren komplexitätstheoretischen Analyse der Varianzberechnung endet Kapitel 2 mit einer interessanten (überraschenderweise wiederum elementaren) Anwendung statistischer Methoden in Kombination mit linearer Algebra, um sich vom mathematisch äußerst gehaltvollen Abschnitt 2.2 "erholen" zu können, da die dort vorgenommene detaillierte Behandlung einer (vom Autor der vorlie-

[1] Nebst der dezidiert angeführten (ergo als solche etikettierten) Übungsaufgaben wird der werte L$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{e}}{\text{ö}}$ser auch im "Fließtext" immer wieder einmal (im wahrsten Sinne des Wortes) angehalten, um über bestimmte Behauptungen des Autors genauer nachzudenken bzw. letztere zu überprüfen/beweisen.

genden Zeilen erdachten) Beweisführung des lokalen Grenzwertsatzes von Moivre-Laplace sehr tief in die Analysis (von Funktionen einer reellen Variablen[2]) eindringt und sich ebenda besonders schöner Techniken (etwa mit der Simpson-Regel einer numerischen Methode) bzw. Resultate bedient. Dabei werden letztere für den Fall, dass sie keine aus der Schulmathematik bekannten Sätze sind (wie etwa die Stirling-Formel, das Wallis-Produkt oder das Resultat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1/2)\cdot x^2} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$) ebenso bewiesen.

- Als Einstieg in die mehrdimensionale Differentialrechnung wurde aus methodischen Gründen die *Technik des impliziten Differenzierens begründet*, weil die *dazu führenden Argumente* im unmittelbaren Anschluss ein unverzichtbares Werkzeug zur Behandlung von Extrema mit Nebenbedingung(en) darstellen, wobei **nach Kenntnis des Autors dieser Zeilen erstmalig in der Literatur** auch ein der Methode der **Lagrange-Multiplikatoren angehängter Extremwerttest** hergeleitet wird (welcher ein wenig später an einer *reichen Vielzahl diverser Optimierungsaufgaben*[3] zur erfolgreichen Anwendung gelangt), welcher sich aus einer Kombination eines in einem gesonderten Abschnitt auch elementar bewiesenen Tests für Extrema von Funktionen zweier Variabler ohne Nebenbedingung(en) und der Lagrange-Methode ergibt. Dabei findet letztgenannter Test nach einer ganz elementaren Optimierungsaufgabe (welche zur Definition des Begriffs "Winkel zwischen Gerade und Ebene" führt, was im Geometriekapitel nochmals ohne Analysis behandelt wird) aus der eindimensionalen Analysis zwei besonders interessante Anwendungen in der Raumgeometrie, nämlich bei der Bestimmung resp. Definition des Winkelmaßes zwischen zwei Ebenen sowie dem Problem des kürzesten Abstands zweier windschiefer Geraden (wobei im letzten Fall auch eine Variante ohne Analysis vorgestellt wird). Auch in die komplexe Analysis wird eine Exkursion unternommen (was ebenso in Kapitel 4 im Rahmen eines Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra geschieht), um die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung im Komplexen (inkl. weiterer sich daraus ergebender Anwendungen) herauszuarbeiten (zumal dies in der Literatur zur Funktionentheorie eher selten geschieht). Nach einer elementaren[4] Behandlung von kürzesten (ebenen) Wegen auf der Kugel (sog. "Geodätische") bahnt sich auch der große schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) wieder seinen Weg in unsere (101 Abschnitte umfassende) Reise um die mathematische Welt (und dies nicht nur im Analysis-, sondern später auch noch im Geometriekapitel!), wobei uns im Analysis-Kapitel sowohl die berühmte Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ beim schon erwähnten funktionentheoretischen Abstecher als auch die auf Euler und den italienischen Mathematiker Lorenzo Mascheroni (1750-1800) zurückgehende Konstante γ (sowie im Geometriekapitel im Zuge der Berechnung höherdimensionaler Kugelvolumina ihre "große Schwester", nämlich die Eulersche Gammafunktion Γ) in deren Bann ziehen wird. Schließlich werden auch noch *unüblich(er)e* und damit nach Meinung des Autors dieser Zeilen zu umso *wertvolleren zusätzlichen Einsichten führende Zugänge* zu diversen Ableitungsregeln (nebst Produkt-, Quotienten- und Kettenregel auch für $y = x^x$) sowie zur Regel von de l'Hospital und zur Taylor-Formel (letztere beide in gegenseitiger Wechselwirkung) behandelt.

[2]Mithin handelt es sich also um einen elementaren Beweis!

[3]Dabei werden insbesondere isoperimetrische Vierecke mit einer enormen Methodenvielfalt analysiert!

[4]Das bedeutet in diesem speziellen Fall, dass abgesehen von Ableitungsregeln keinerlei differentialgeometrisches Werkzeug verwendet wird.

- Dass der Titel des vierten Kapitels nicht schlichtweg "Algebra", sondern "Arithmetik und Algebra" lautet, liegt an einem kurzen aber nach Meinung des Autors der vorliegenden Zeilen nichtsdestotrotz sehr wertvollen Abschnitt über die Arithmetik von Bruchzahlen, wonach unmittelbar zur (vorerst elementaren) Algebra übergegangen wird (wo zunächst die binomischen Formeln einer eingehenden methodischen[5] sowie didaktischen Analyse unterzogen werden, dann das harmonische Mittel in seiner vielseitigen Erscheinungsform mathematisches Denken sui generis geradezu paradigmatisch exemplifiziert und schließlich das Lösen quadratischer Gleichungen in einer Variable unter unterschiedlichsten Gesichtspunkten - aber *noch* elementar! - behandelt wird, was eine geeignete Ergänzung zu dieser bereits im eingangs zitierten Vorgänger erforschten Thematik darstellt). Auf bereits gehobenerem Niveau werden wir uns mit originellen Zugängen zu den komplexen Zahlen sowie deren Anwendung auf die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks (was auch zum Anlass der allgemeinen Behandlung symmetrischer Gleichungen genommen wird und zu äußerst interessanten - und vor allem unerwarteten! - Zusammenhängen führen wird), zu einem Zugang zum Lösen quadratischer Gleichungen vom höheren Standpunkt sowie zu einem Beweises des Fundamentalsatzes der Algebra (inkl. einem schon obig erwähnten funktionentheoretischen Exkurs) beschäftigen, um schließlich das Algebra-Kapitel mit einem kurzen (aber sehr feinen) Abschnitt über eine überraschende Präsenz der FIBONACCI-Zahlen im PASCAL-Dreieck gleichsam schön abzurunden.

- Das Geometriekapitel stellt nicht nur das *umfassendste aller Kapitel dieses Buches*[6] dar, sondern enthält auch zwei Abschnitte *einführenden Charakters*, in denen die *ebene analytische Geometrie* sowie die *Trigonometrie* genetisch entwickelt und auch zueinander in Beziehung gesetzt werden, was sich ganz besonders in der vektoriellen Grundlegung der Winkelfunktionen manifestiert, welche enorme methodische (aber auch didaktische) Vorteile gegenüber traditionellen (bottom-up) Zugängen bietet und überdies aufgrund der sich äußerst rasch ergebenden Folgerungen charakteristischer Eigenschaften am Einheitskreis bzw. rechtwinkligen Dreieck (top-down generiert, weshalb sonst übliche Definitionen freilich als Sätze folgen) ein Wechsel zu konventionellen Zugängen einfach möglich ist. In der ebenen analytischen Geometrie wird ebenso insofern top-down (also deduktiv) vorgegangen, alsdass deren grundlegendes Instrumentarium, nämlich die Vektorrechnung vom Determinantenbegriff (motiviert durch eine herausfordernde Aufgabenstellung) aus entwickelt wird, welcher über den (allgemeineren) Matrixbegriff zum (speziellen) Vektorbegriff führt, und zwar (zunächst) zu dessen arithmetischer Version. Auf den geometrischen Aspekt (Pfeilklassenkonzept), welcher sonst in der Regel doch sehr vom Himmel zu fallen pflegt, werden wir durch einen Standpunktwechsel bezüglich einer Erweiterung der ursprünglichen als Motivation dienenden Aufgabenstellung, also wiederum genetisch, geführt. Schließlich wird eine eingehende Analyse orientierter Abstände sowie Flächeninhalte auf Basis der genetisch erschlossenen Begriffe der Vektorrechnung vorgenommen und mit einer äußerst eleganten Anwendung auf die Theorie der linea-

[5]In diesem Zusammenhang werden sich einige überraschende Zusammenhänge ergeben, die man so wohl nicht vermutet hätte!

[6]*Dies* manifestiert sich nicht nur in der höchsten Seitenzahl, überdies liegt letztere auch über 50% des Gesamtinhalts!

ren Gleichungssysteme abgerundet (In einem später folgenden separaten Abschnitt werden die fundamentalen Begriffe ”Determinante” und ”Skalarpdoukt” nochmals unabhängig neu aufgerollt, um sie in unmittelbarer Wechselwirkung von einer anderen Seite kennenzulernen.). Weitere von uns erkundete exotische Schauplätze auf dem vorliegenden Streifzug durch die Geometrie bilden überdies zahlentheoretische Aspekte von Dreiecken (Erzeugung ganzzahliger Seitenlängen und Inkreisradien sowie Dreiecke im zweidimensionalen cartesischen Koordinatensystem mit Gittereck- und Inkreismittelpunkten), Dreiecke eo ipso im Hinblick auf besondere Punkte und Geraden sowie Bewegungen (Durchschnitt von ähnlichen Dreiecken), ebene (algebraische) Kurven (sowohl beliebigen Grades im Hinblick auf deren Erzeugung durch eine geeignete Anzahl von Punkten mittels der Methode ”Plückers μ” als auch exemplarisch anhand einer Vielzahl von Aufgabenstellungen für den werten L $\stackrel{e}{\text{ö}}$ ser in Wechselwirkung mit Parameterdarstellungen, was zunächst aber durch einleitende konkrete Beispiele motiviert wird), Raumflächen (wobei auch hier - wie bereits bei den ebenen Kurven - der werte L $\stackrel{e}{\text{ö}}$ ser erneut mit einer reichen Vielzahl an Aufgabenstellungen konfrontiert/herausgefordert wird und speziell den faszinierenden HP-Flächen ein eigener Abschnitt gewidmet wurde) und daraus abgeleitete besondere Raumkurven, Eigenwerte von linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ auf sich selbst[7], eine bereits erwähnte Alternative des auch im Analysis-Kapitel auftauchenden Themas ”Winkel zwischen Gerade und Ebene”[8] und last but alles andere als least die vier- und höherdimensionale Geometrie, auf die nun das vorliegende erste (Einleitungs-)Kapitel abschließend noch etwas genauer eingegangen werden soll:

- Nach einer behutsamen Ein- bzw. Hinführung zum $4D$-Würfel wird dieser elementargeometrisch auf beliebige Dimensionen ausgedehnt und kombinatorisch analysiert.
- Zurückgekehrt aus beliebig hohen Dimensionen in die ”konkrete” vierte Dimension untersuchen wir einen räumlichen Schnitt des $4D$-Würfels als Verallgemeinerung eines ebenen Würfelschnitts (wobei letzterer zur Motivation eingangs ebenso angerissen wird).
- Mathematisch überaus gehaltvoll, dafür bzw. gerade deshalb aber äußerst (kognitiv und nicht wahrnehmungspsychologisch betrachtet) sinnlich mutet der zweifelsohne abstrakte Abschnitt über Volumina höherdimensionaler Kugeln

[7] Dabei ist die im Abschnitt 5.5 aufkeimende Frage, welche Bedeutung der Koeffizient des linearen Gliedes im charakteristischen Polynom einer Matrix M aus $\mathbb{R}^{(3,3)}$ hat (da ja der Koeffizient des Gliedes mit zweithöchstem Exponenten bzw. des konstanten Gliedes bekannterweise - sogar für quadratische Matrizen beliebiger Dimension n - stets die Spur bzw. das $(-1)^{n+1}-$fache der Determinante von M ist), ja nur allzu berechtigt, zumal im Fall $n = 2$ ja nur die Spur bzw. Determinante auftauchen und erst bei $n = 3$ ein weiterer Koeffizient hinzukommt. Dennoch geht diese Frage nicht auf den Autor der vorliegenden Zeilen, sondern seinen werten Kollegen Mag. Oswald Redl zurück, dem an dieser Stelle für diese inspirierende Frage (welche im obig genannten Abschnitt hoffentlich zur Zufriedenheit aller potentiellen Nachfragenden beantwortet wird), aber auch für zahlreiche äußerst wertvolle Tips und Tricks zu diversen LaTeX-Fragen herzlichst gedankt sei.

[8] Dabei geht die Idee zu dieser Alternative auf meinen geschätzten Kollegen Mag. Günther Artner zurück, wofür ich ihm [als einen ewigen Verfechter der geometrischen Methode, was den darstellenden Geometer (der Wiener Schule) in ihm unterstreicht] an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausdrücken möchte.

an, dessen Faszination man sich angesichts der ebenda eingesetzten immens beeindruckenden Hilfsmittel aus der Analysis (in nur einer Variablen!), wie etwa der EULERschen Gammafunktion als Verallgemeinerung der Fakultätsfolge, so gut wie unmöglich entziehen kann.

– Aspekte der analytischen Geometrie im $\mathbb{R}^4$ werden anhand des in der vierten Dimension alles andere als trivialen Begriffs des Schnittwinkels zwischen zwei Ebenen (welcher sich als echter Plural herauskristallisieren wird) ausführlich behandelt.

Damit bleibt mir nun nur noch, dem werten L$\substack{\text{e}\\ \text{ö}}$ser eine anregende Reise durch 101 Abschnitte um die mathematische Welt zu wünschen, welche sowohl von zahlreichen kognitiven Sternstunden als auch einer großen Menge von Erfolgserlebnissen beim Bearbeiten der Übungsaufgaben gesegnet sein mag.

Wien, im August 2014. Robert Resel