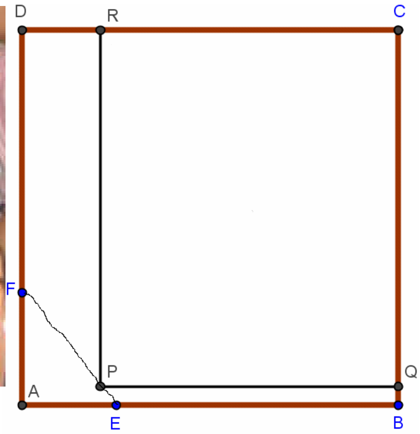
47) Die kleine Sonja und die kleine Anna beschädigen beim Spielen eine quadratische Glasplatte der Seitenlänge s=120 (E: cm), wobei die Bruchkurve annähernd eine Strecke ist, wobei $\overline{AE} = 30$ und $\overline{AF} = 36$ gilt.



Nun soll ein Teil der Glasplatte gerettet werden, indem man durch einen Punkt P auf der "Strecke" EF Parallele zu den Quadratseiten legt, wodurch das Rechteck PQCR entsteht.
Für welche Lage von P erhält man das flächeninhaltsgrößte aller Rechtecke?
Zeige ohne Taschenrechner, dass geringfügig mehr als ¾ der Glasplatte gerettet werden können und exaktifiziere "geringfügig mehr" (Mehr oder weniger als 1 Prozent bzw. 1 Promille?)!

48) **<u>… und wieder ein ehemaliges Maturabeispiel:</u>**

Mathematik 8A (Rg)

Aus einem Halbkreis mit gegebenem Radius soll das Rechteck mit dem größtem Flächeninhalt geschnitten werden. Wieviel % beträgt der Abfall? Wie kann man ohne Verwendung der 2. Ableitung zeigen, daß ein Maximum vorliegt?

49) Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten $a = 8$ und $b = 9$ und dem Winkel $\gamma = 30°$ soll durch eine möglichst kurze Strecke halbiert werden, deren Endpunkte auf a und b liegen. Wie lang ist diese Teilungsstrecke und wie weit sind ihre Endpunkte vom Eckpunkt C des Dreiecks entfernt?

50) **<u>Ein ehemaliges kurzes (von ingesamt sechs) Maturabeispiel(en):</u>**

6. Eine Ellipse in erster Hauptlage mit der halben Hauptachsenlänge a und der halben Nebenachsenlänge b rotiert zusammen mit dem Dreieck $\Delta ABC[A(-a|0), B(a|0), C(-a|b)]$ um die $x-$Achse. In welchem Punkt der Rotationsachse ist normal dazu ein Schnitt zu führen, damit der Flächeninhalt des entstehenden Kreisringes maximal wird?

51) Einer Ellipse mit den Halbachsenlänge a und b ist die flächeninhaltskleinste Raute berührend umzuschreiben (d. h. die Seiten der Raute sind Ellipsentangenten). Beweise, dass die Diagonalenlängen der Rauten im gleichen Verhältnis stehen wie die Halbachsenlängen der Ellipse!

52) Einem Halbkreis ist das flächeninhaltsgrößte gleichschenklige Trapez einzubeschreiben, wobei eine Parallelseite der Halbkreisdurchmesser d ist. Beweise, dass durch Spiegelung dieses optimalen Trapezes an d ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

53) Eine Gebäudefront soll die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten gleichseitigen Dreieck haben.

a) **Nur für Rg-Schüler:**

Beweise: Soll der Umfang bei vorgegebenem Flächeninhalt minimal sein, so gilt für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks sowie für die zweite Rechteckseite x die gerahmte Gleichung.

$$\boxed{x : s = \sqrt{6} \cdot \sin 15°}$$

b) **Sowohl für G- als auch für Rg-Schüler:**

Berechne s in der Einheit dm auf eine Dezimalstelle genau, wenn der Flächeninhalt der gesamten Figur 280m^2 betragen soll.

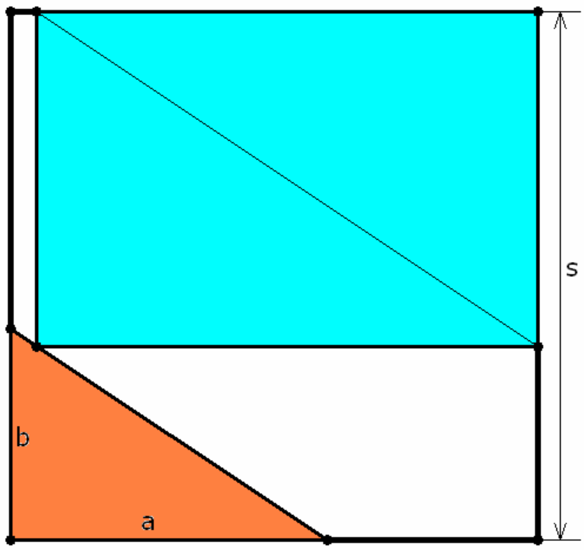
54) Aus:

Klausurarbeit aus Mathematik

8D, Realgymnasium, Herbsttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

1) Von einer quadratischen Glasplatte der Seitenlänge s=60cm ist wie in der nebenstehenden Abbildung illustriert ein Eck geradlinig abgebrochen, wobei a=36cm und b=24cm gilt.



9P. a) Ermittle Länge und Breite jenes Rechtecks, welches maximal gerettet werden kann, begründe das Vorliegen eines Maximums und zeige ferner ohne Taschenrechner, dass ein wenig mehr als 60% der Glasplatte gerettet werden können (Mehr oder weniger als ein Prozent bzw. ein Promille mehr? Begründe!)! Verwende (d.h. beschrifte) die Abbildung für deine Zwecke!

3P. b) Verifiziere anhand des vorliegenden Beispiels, dass jede durch die eingezeichnete Diagonale entstehende Hälfte des maximal rettbaren Rechtecks zum Bruchdreieck ähnlich ist, und zwar mit dem Ähnlichkeitsfaktor $k = \frac{s}{H(a,b)} - \frac{1}{2}$, wobei H(a,b) das harmonische Mittel von a und b bezeichnet

55) Einer gleichseitigen Ellipse ell soll jenes Rechteck mit zu ell parallelen Seiten einbeschrieben werden, welches bei Rotation um die Nebenachse von ell den volumsgrößten aller Zylinder generiert.

a) Beweise, dass die Tangenten an ell in den Eckpunkten des Rechtecks ein Quadrat bilden.

b) Rotiert das Quadrat aus a) ebenso um die Nebenachse von ell, so entsteht ***ein Doppelkegel***. Beweise, dass sich ***sein*** Volumen zum Rauminhalt des volumsgrößten Zylinders wie 9:4 verhält.

56) Jedem gleichschenkligen Dreieck kann genau ein Quadrat einbeschrieben werden, von dem zwei Eckpunkte auf der Basis und je ein Eckpunkt auf den Schenkeln des Dreiecks liegt. Mit dem Ansatz 2c für die Basis (unnötigen – zusätzlichen! – Bruch vermeiden!) und h = kc für die Höhe des Dreiecks bearbeite man folgende Aufgabenstellungen:

a) Beweise, dass dieses Quadrat maximal 50% des Dreiecksflächeninhalts einnehmen kann.

b) **<u>Für G-Schüler:</u>**

Gib *<u>mindestens eine</u>* verbale Beschreibung der Form jenes Dreiecks, für welches das einbeschriebene Quadrat genau 50% der Dreiecksfläche einnimmt.

c) **<u>Für Rg-Schüler:</u>**

Zeige, dass der Extremalfall aus a) genau dann eintritt, wenn die Beziehung $\boxed{\frac{bu}{4A} = \tau}$ gilt, worin b für die Länge der Basis des Dreiecks, u bzw. A für den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks sowie $\tau>1$ für das Verhältnis des *Goldenen Schnitts* steht.

57) Die Summe der Volumina einer Kugel und eines Würfels, deren Oberflächeninhaltssumme konstant ist, soll minimiert werden. In welchem Verhältnis muss diesfalls die Seitenkante des Würfels zum Durchmesser stehen?

58) Projiziert man einen Punkt P der Hyperbel $xy = 1$ normal auf die $x-$Achse, so erhält man einen Punkt P_x. Für welche Hyperbelpunkte wird der Umfang des Dreiecks OPP_x minimal? Begründe die Art des Extremums (nicht notwendigerweise mit der zweiten Ableitung)!

59) **<u>Ein ehemaliges (von ingesamt fünf) Maturabeispiel(en):</u>**

5. Der Ellipse ell [ell: $x^2 + 3y^2 = 12$] ist das flächengrößte gleichschenkelige Dreieck einzuschreiben, dessen Basis parallel zur $x-$Achse verläuft.

(a) Berechne die Koordinaten A, B und C der Eckpunkte dieses Dreiecks und seinen Flächeninhalt.

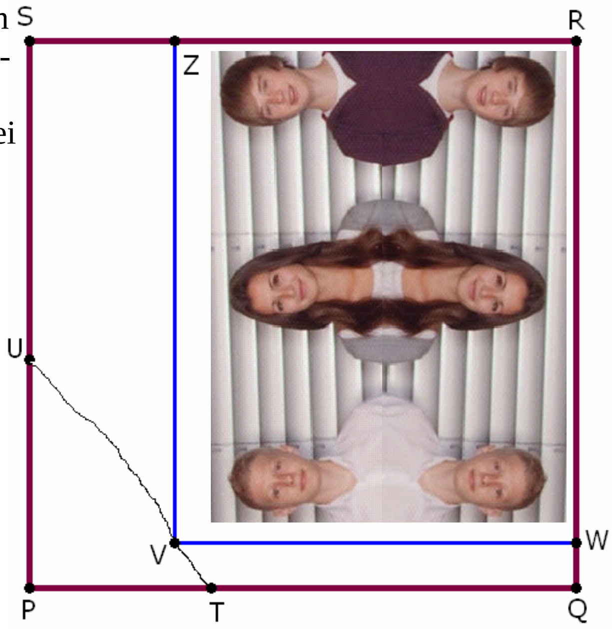
(b) Lege in A, B und C die Tangenten an ell und zeige, dass das daraus resultierende *Tangentendreieck* dem vierfachen Flächeninhalt des Dreiecke ΔABC aufweist.

60) (a) Unter allen geraden Kreiskegeln vorgegebenen Mantelflächeninhalts sind die Abmessungen jenes Drehkegels zu bestimmen, der maximales Volumen aufweist.

(b) Unter allen geraden Kreiskegeln vorgegebenen Oberflächeninhalts sind die Abmessungen jenes Drehkegels zu bestimmen, der maximales Volumen aufweist.

(c) Zeige ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel, dass das Maß des Öffnungswinkels des idealen Kegels aus (a) dem Maß des Neigungswinkels des idealen Kegels aus (b) entspricht.

61) Ritzi und Xandi streiten sich darüber, wer Hammy zum Schulball 2012 begleiten darf. Dabei geht eine wertvolle Tischplatte (Seitenlänge 60cm) zu Bruch, und zwar annähernd entlang einer geraden Bruchkante UT, wobei $\overline{PT} = 20\,\text{cm}$ und $\overline{PU} = 25\,\text{cm}$ gilt.



a) Welcher Punkt V auf der "Bruchkante" UT generiert auf die in der Abbildung illustrierte Art und Weise das flächeninhaltsgrößte "rettbare" Rechteck PQRS? Bestätige ohne Taschenrechner, dass ein wenig mehr als $\frac{2}{3}$ "gerettet" werden können, jedoch weniger als 1% mehr als $\frac{2}{3}$!

b) Verifiziere an diesem konkreten Beispiel die Formel $\boxed{A = \frac{[b(s-a)+as]^2}{4ab}}$ für den Flächeninhalt A des "maximal rettbaren Rechtecks"!

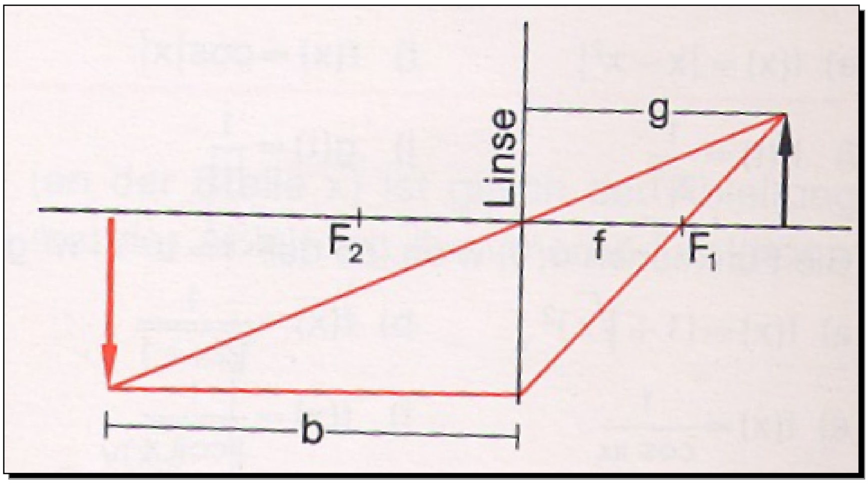
62) **<u>Eine ehemalige (von vier) Aufgabe(n) einer dreistündigen Schularbeit:</u>**

3. (a) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes der Ellipse ell [ell:$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$] im ersten Quadranten, im welchem die Tangente an ell mit den Koordinatenachsen das flächeninhaltskleinste Dreieck begrenzt.

(b) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes der Ellipse ell [ell:$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$] im ersten Quadranten, im welchem die Normale an ell mit den Koordinatenachsen das flächeninhaltsgrößte Dreieck begrenzt.

(c) Berechne den minimalen bzw. maximalen Flächeninhalt aus (a) bzw. (b) und zeige, dass das Produkt der beiden Flächeninhalte $\frac{e^4}{4}$ ergibt, wobei e die Brennweite von ell bezeichnet.

63) Erzeugt eine Sammellinse der "Brennweite" f von einem Gegenstand, der sich im Abstand g (g>f) von ihr befindet, ein Bild im Abstand b von der Linse, so besteht zwischen den Parametern b ("Bildweite"), f und g ("Gegenstandweite") die besondere Beziehung $\boxed{\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}}$ ("Linsengleichung", kurz: LG).



a) Leite LG aus der obenstehenden Abbildung her!

b) Für welche Entfernung des Gegenstandes von der Linse ist seine Entfernung von seinem Bild minimal? (Anleitung: Drücke dir die zu minimierende Summe b+g durch g und f aus und differenziere den Ausdruck nach ……...! Ergänze: Diese minimale Entfernung kann nie kleiner sein als ....

↑↑

Na wonach wohl? ☺

Grundlage für die Aufgaben 64) bis 66) ist der folgende Text:

JULIUS PFLÜGER stellte im Jahre 1915 eine „Schönheitsbedingung“ für „einfache geometrische Gebilde“ auf. Danach ist eine geschlossene Figur mit gegebenem Umfang dann „am schönsten“, wenn sie eine möglichst große Fläche begrenzt. Weil ähnliche Figuren dasselbe Schönheitsmaß haben sollten, definierte er den Quotienten

$T=\frac{A}{U^2}$ (A: Flächeninhalt; U: Umfang) als „ästhetische Maßzahl“.

64) Welches Rechteck fester Länge a und variabler Breite x ist "am schönsten"? Wie(viel) schön ist es?

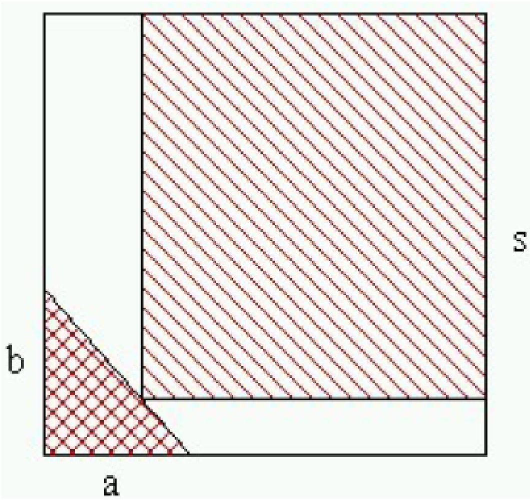
65) Welches gleichschenklige Dreieck mit fester Basis a und variabler Schenkellänge ist "am schönsten"? Wie(viel) schön ist es?

66) Beweise: Ein Kreissektor ist genau dann "am schönsten", wenn sein Bogen genau so lang ist wie die beiden Begrenzungsradien zusammen. Wie(viel) schön?

67) Eine Streichholzschachtel soll 5cm lang sein und 90cm^3 Rauminhalt haben. Bei welcher Breite und Höhe ist am wenigsten Material zur Herstellung notwendig (Rahmen nicht inkludiert!)? Wie groß ist dieser minimale Materialverbrauch?

68) Aus einer ehemaligen Nachtragsschularbeit:

2) Von einer quadratischen Glasplatte der Seitenlänge s=60cm ist wie in der nebenstehenden Abbildung illustriert ein Eck geradlinig abgebrochen, wobei a=50cm und b=30cm gilt.



a) Ermittle Länge und Breite jenes Rechtecks, welches maximal gerettet werden kann, begründe das Vorliegen eines Maximums und zeige ferner ohne Taschenrechner, dass ein wenig mehr als die Hälfte der Glasplatte gerettet werden können (Mehr oder weniger als 1% mehr? Begründe!)!

b) Verifiziere für den Umfang u des flächengrößten Rechtecks aus a) die Formel $\boxed{u=\frac{1}{k}\cdot(k+1)^2\cdot s-a-b}$, wobei k eines der Verhältnisse der Katheten des Sprungdreiecks bezeichnet. Zeige allgemein (also für beliebiges k), dass es nicht auf die Reihenfolge von Dividend und Divisor ankommt!

69) In welchem Punkt T der Parabel par [par: $y^2 = 4ax$ bzw. wenn dir dies (zum Aufwärmen!) mehr beliebt: par: $y^2 = 8x$] gilt, dass der Tangentenabschnitt auf t_T zwischen T und dem Schnittpunkt L von t_T mit der Leitgerade von par minimal ist? Bestätige, dass $\overline{ST} = ¾\cdot p$ gilt, wobei S bzw. p den Parabelscheitel bzw. den Parabelparameter bezeichnet.

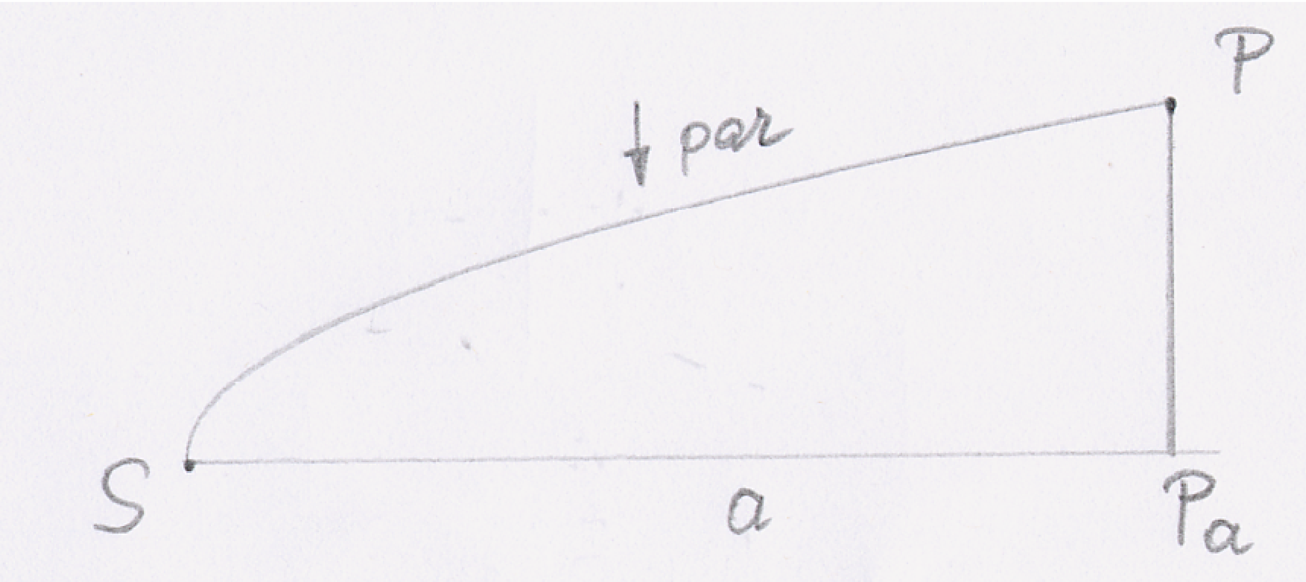
Technische Hinweise: 1) Der Ansatz T(….|2az) mag hilfreich sein, dann Spaltform usw.!

↑↑
SELBST!

2) Berechne $(2t^2+t-1)\cdot(t+1)$, das wirst du ***in jedem Fall*** *noch brauchen!*
(t wird im Laufe der Rechnung die durch $z^2 = t$ definierte Ersatzvariable!)

70) Berechne die Koordinaten jener Punkte der Hyperbel hyp [hyp: $2x^2 - 3y^2 = 6$], welche vom Punkt P(5|0) den kleinsten Abstand haben. Weise das Minimum nach!

71) Untenstehend abgebildetem Parabelsegment (S … Parabelscheitel, a … Parabelachse) ist ein Rechteck einzubeschreiben, von dem eine Seite auf a zu liegen kommt. Beweise, dass es unter allen möglichen Rechtecken genau dann ein nicht entartetes umfangsgrößtes gibt, wenn die Tangente an die Parabel in P gegenüber a unter weniger als 45° ansteigt! Zeige ferner, dass dieser maximale Umfang dann gleich der Summe aus der „doppelten Segmenthöhe“ (auf a gemessen) und dem Parabelparameter ist.



72) **<u>Zur Abwechslung einmal wieder ein ehemaliges Maturabeispiel:</u>**

4. In einem Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, wird die Tangente t_P gelegt.

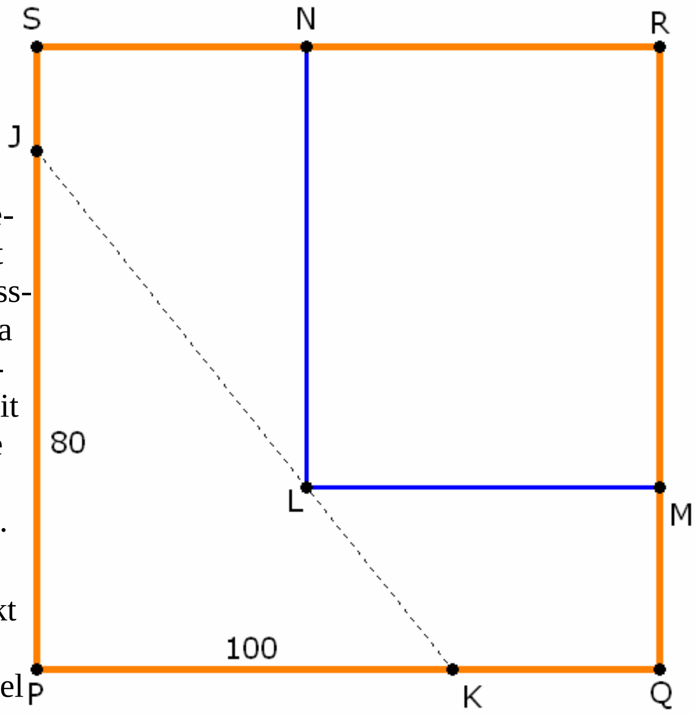
   (a) Ermittle in Abhängigkeit der Koordinaten von P die Halbachsenlängen der flächengrößten Ellipse in Hauptlage, welche t_P als Tangente besitzt und zeige, dass dieser maximale Flächeninhalt nur vom Parameter der Hyperbel, nicht aber von der Wahl des Punktes P abhängt.

   (b) Was läßt sich über die Lage des Berührungspunktes von t_P mit der Ellipse aussagen?

73) a) Berechne $(y^2+4y-12)\cdot(y-4)$!

b) Welcher Punkt der Parabel par [par: $y^2 = 2x$] liegt dem Punkt P(15|–24) am nächsten?

74) Einer Kugel (Radius R) soll der volumskleinste Drehkegel berührend umschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?



75) Ulli geht in der Pause in die 7B auf Besuch (Sie trauert noch "ihrer alten Wohnung" nach … ☺) und reisst dort versehentlich von einem quadratischen Karton der Seitenlänge 120cm ein "Eck" ab, was diese beiden Herren ein wenig in Schwierigkeiten bringt und äußerst missmutig macht, da Ulli deren Meinung nach damit vorsätzlich ihre Aggressionen abbauen wollte.

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

a) Wie läßt sich jetzt noch ein möglichst großes Rechteck LMRN durch einen geeigenten Punkt L auf der Sprungkante JK "retten"?

b) Überprüfe am vorliegenden Beispiel die Formel $\boxed{A = \frac{[s(a+b)-ab]^2}{4ab}}$ für den Flächeninhalt A des "maximal rettbaren Rechtecks"!

c) Zeige, dass sich trotzdem nur ein wenig mehr als 40% retten lassen (Um mehr oder weniger als 1% bzw. 1 Promille mehr als 40%?). Bearbeite beide(!) Fragestellungen ohne Taschenrechner!

76) Einer Kugel (Radius R) soll der volumsgrößte Drehkegel eingeschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?

77) Einer Kugel (Radius R) soll der volumsgrößte Drehzylinder eingeschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Zylinder- und Kugelvolumen?

78) Einer Halbkugel (Radius R) soll der volumskleinste Drehkegel berührend umschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?

79) und 80) aus:

Klasse: 7B(G) **28. 05. 2008**

2. Schularbeit (zweistündig)

Pflichtmodul PM4: *Differentialrechnung*

2) Aus zwei kongruenten quadratischen Kartons (siehe Abbildungen 1 und 2!) der Seitenlänge a sollen wie in den Abbildungen 1 und 2 illustriert durch Wegschneiden von "Eckenquadraten" zwei verschiedene Schachteln mit jeweils größtmöglichem Volumen hergestellt werden, wobei die erste Schachtel (vgl. Abbildung 1) vier und die zweite Schachtel (vgl. Abbildung 2) nur zwei Stellwände benötigt. Beweise, dass das Volumen der Schachtel mit zwei Stellwänden doppelt so groß als das Volumen der Schachtel mit vier Stellwänden ist, der Anteil des anfallenden Abfalls aber für beide Varianten derselbe ist.

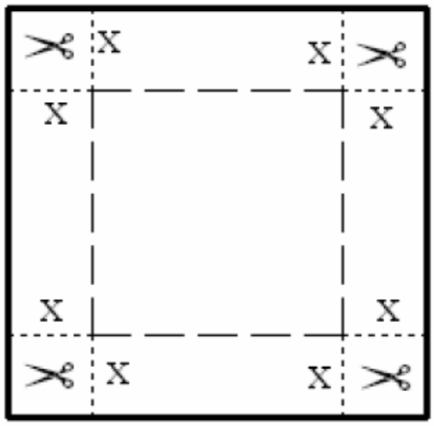


Abbildung 1

3) **Das Ibrahim-Glücksbringer-Poster der letzten Schularbeit (unter Abbildung 2!) nun als Gegenstand eines interessanten Optimierungsproblems:**

Bei der grafischen Planung des Posters lauteten die Vorgaben folgendermaßen: Das Motiv soll auf einem rechteckigen Bogen mit einem Flächeninhalt von $2{,}16\text{m}^2$ gedruckt werden, wobei der obere und untere Rand jeweils 45mm sowie der linke und der rechte Rand jeweils 30mm breit sein soll.

a) Wie sollen Länge und Breite des Bogens gewählt werden, damit der bedruckte Bereich möglichst groß wird?

b) Wie viel Prozent des Bogens nimmt das Motiv ein?

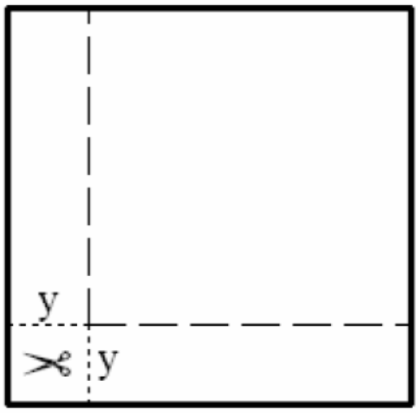
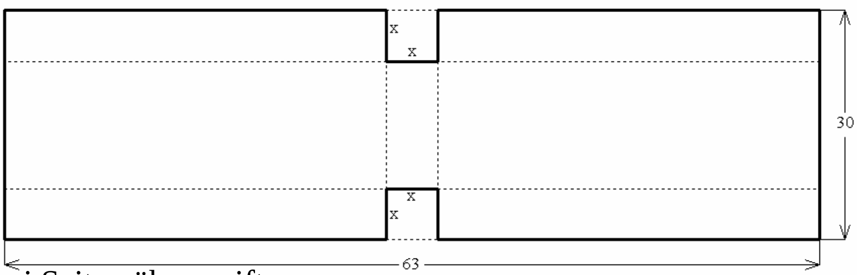


Abbildung 2

Maße in dm!

81) Aus nebenstehend abgebildetem Rechteck (a=63dm, b=30dm) soll durch Wegschneiden von zwei symmetrisch liegenden Quadraten der Seitenlänge x das Netz einer nach einer Seite hin offenen Schachtel gebildet werden, wobei der Deckel auf zwei Seiten übergreift.



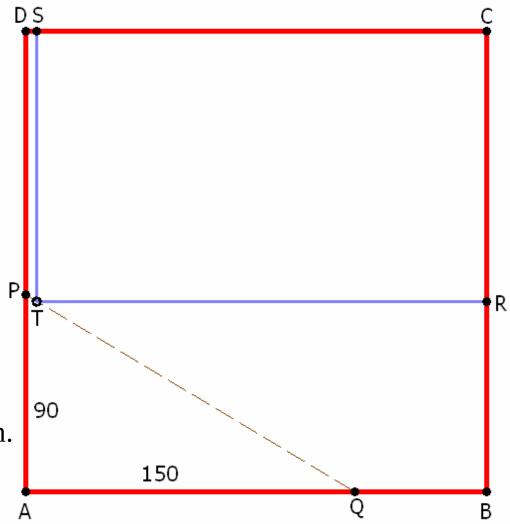
a) Wie groß ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

b) Berechne dieses maximale Volumen V und überprüfe am konkreten Beispiel **nebenstehende allgemeingültige Formel**!

$$\boxed{V = \frac{abx}{4} - \frac{x^3}{2}}$$

82) Unsere beiden Sonntagskinder waren bei Anna auf einer Party eingeladen und haben das Motto "It´s party time!" [ebenso wie Ritzi und seine Freundin aus den Aufgaben 16) und 17)!] etwas zu wörtlich genommen, wodurch ein wertvoller großer quadratischer Glastisch mit einer Seitenlänge von 210cm zu Bruch ging. Detailliert sieht die Situation so aus, dass das rechtwinklige Dreieck ΔAQP aus der Abbildung abgebrochen ist.

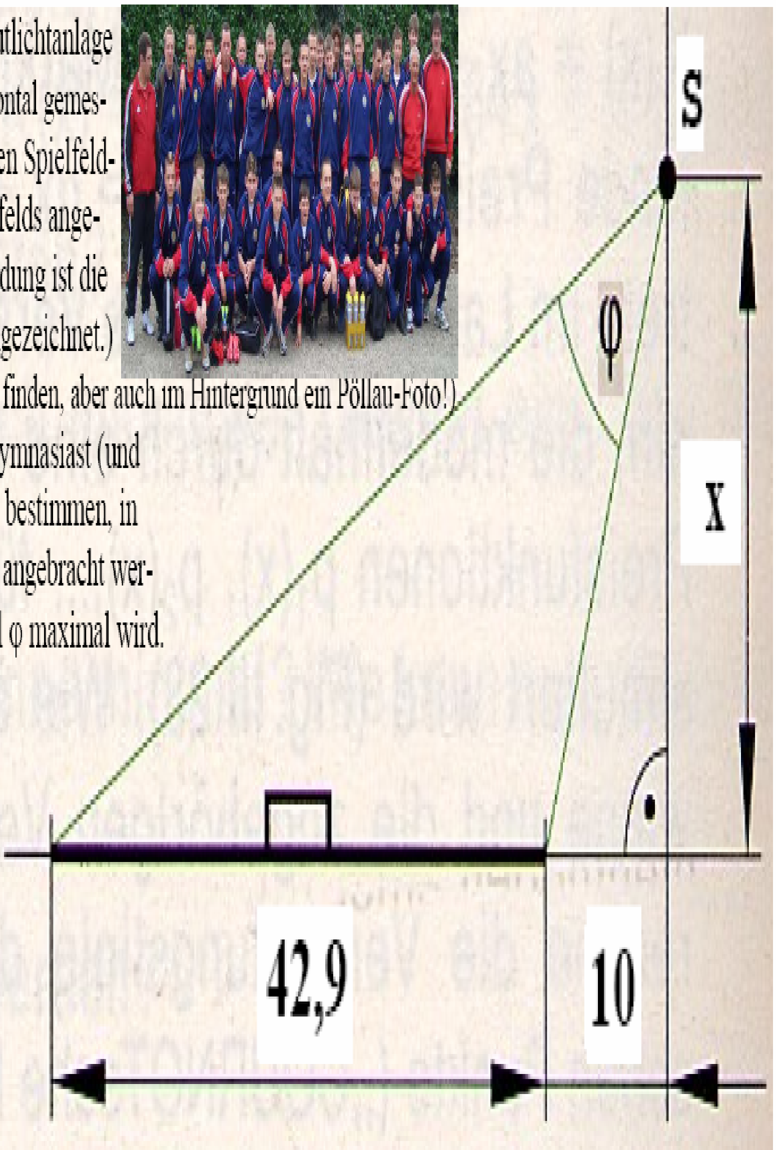
a) Welcher Punkt T auf der Sprungkante PQ erzeugt in der in der Figur visualisierten Art und Weise das flächeinhaltsgrößte "rettbare" Rechteck TRCS? Zeige ohne Tasschenrechner, dass ein wenig mehr als $\frac{4}{7}$ "gerettet" werden können. Sind es mehr oder weniger als ein <u>Promille mehr als $\frac{4}{7}$ (auch ohne Taschenrechner zu lösen)!</u>



b) Verifiziere am vorliegenden Beispiel für den Umfang u des flächeninhaltsgrößten Rechtecks die Formel $\boxed{u=\left(k+\frac{1}{k}+2\right)\cdot s-a-b}$, wobei k eines der Verhältnisse der Katheten des Sprungdreiecks bezeichnet. Begründe allgemein (also für beliebiges k), dass es nicht auf die Reihenfolge von Dividend und Divisor ankommt!

83) Aus der Schularbeit der 7C(Rg) vom 30. 05. 2008:

2) Passend zur EM 2008 ein entsprechendes Optimierungsproblem:



Ein 42,9m breiter Fußballplatz soll eine Flutlichtanlage bekommen, wobei die Scheinwerfer (horizontal gemessen! vgl. rechte Abbildung!) 10m vom rechten Spielfeldrand entlang der gesamten Länge des Spielfelds angebracht werden sollen. (In der rechten Abbildung ist die variable Position eines Scheinwerfers S eingezeichnet.) Tommy B. (in der Abbildung rechts oben zu finden, aber auch im Hintergrund ein Pöllau-Foto!) soll nun als mathematisch gebildeter Realgymnasiast (und natürlich "Weltklassekicker"!) jene Höhe x bestimmen, in der die Scheinwerfer über dem Boden (☺) angebracht werden müssen, damit der Beleuchtungswinkel φ maximal wird.

Da aber auch du diese Schularbeit zu bestreiten hast, gilt die (folgende) Aufgabenstellung selbstverständlich ebenso für dich:

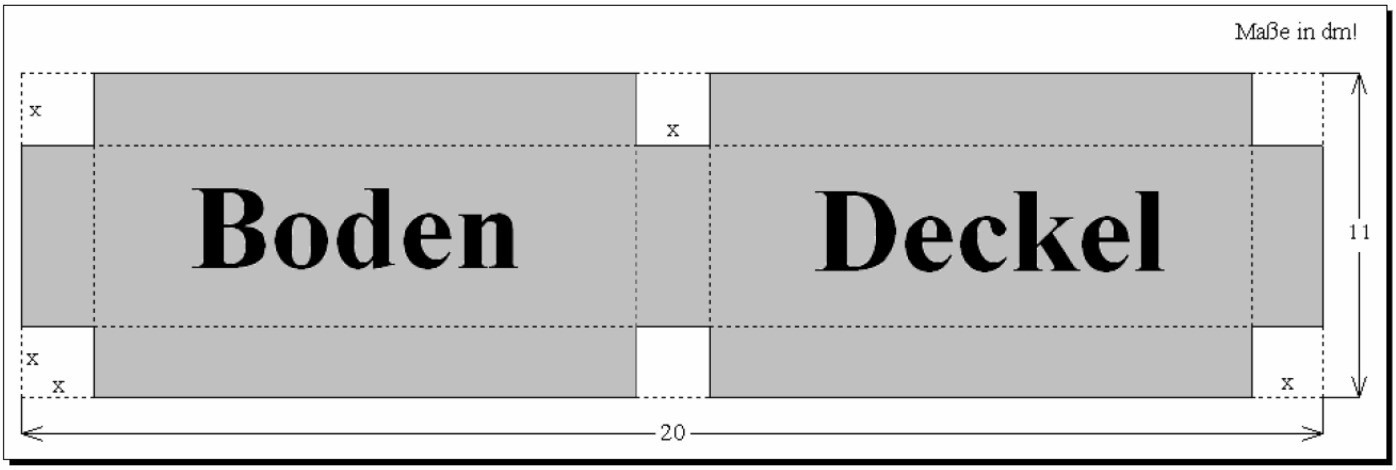
a) Berechne die erforderliche Höhe x!
(Die zweite Ableitung kann entfallen!)

b) Ermittle den sich daraus ergebenden maximalen Beleuchtungswinkel φ!

84) und 85) aus:

Klasse: 7D(Rg) **2. Schularbeit (zweistündig)** 29. 05. 2009

Pflichtmodul PM4: *Differentialrechnung*

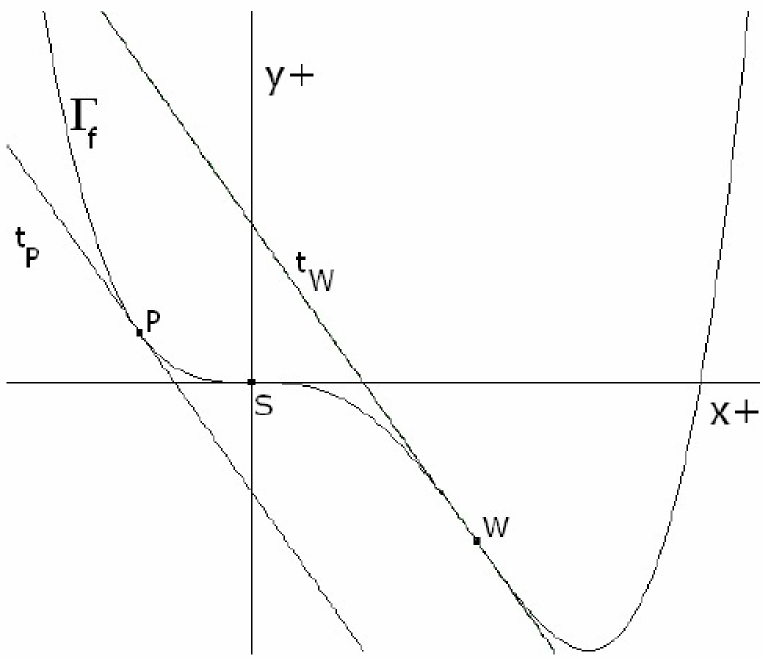


3) Von einem rechteckigen Karton (a=20dm, b=11dm) sollen wie in obiger (nicht maßstabsgetreuer!!) Abbildung illustriert sechs kongruente Quadrate der Seitenlänge x derart weggeschnitten werden, dass der verbleibende Teil des Kartons die volumsgrößte Schachtel ergibt, deren Deckel auf drei Seiten übergreift.

Wie groß ist daher die Einschnitt-Tiefe x zu wählen? Begründe die Eindeutigkeit der Lösung und weise das Maximum nach! Beschreibe die Form der daraus hervorgehenden volumsgrößten Schachtel! Welches maximale Volumen ergibt sich?

4) Ausgehend von der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 4x^3$ sind die Koordinaten jenes Kurvenpunkts P zu berechnen, in dem die Tangente t_P zur Wendetangente t_W parallel verläuft
Orientiere dich dabei an der Abbildung 2!

Abbildung 2 (zu Aufgabe 4) →



86) aus:

Klausurarbeit aus Mathematik

Klasse 8D (Realgymnasium), Haupttermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

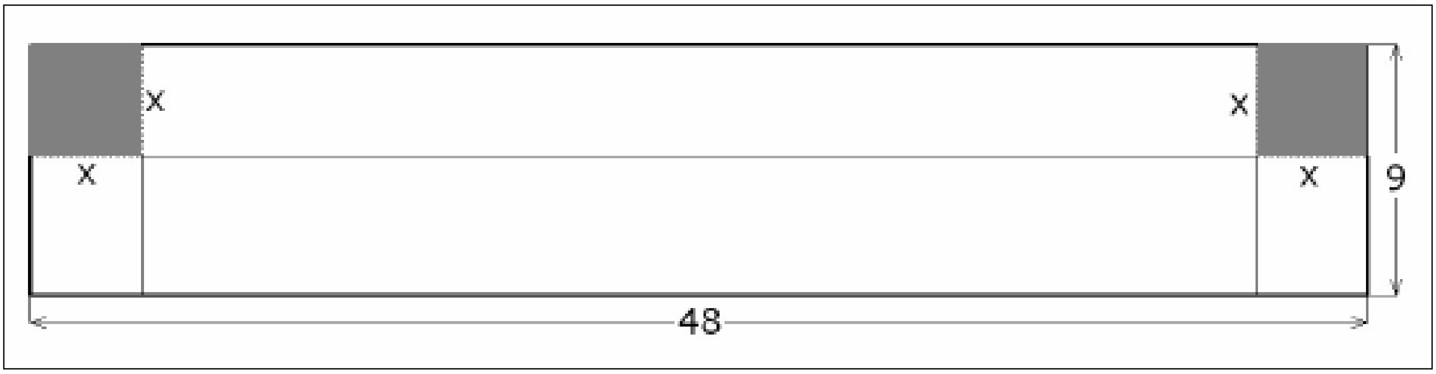
Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

2. Aus einem 48dm langen und 9dm breiten Karton soll durch Wegschneiden von Eckenquadraten der Länge x das Teil(!)-Netz eines nach zwei Seiten offenen Quaders hergestellt werden (siehe mittlere Abbildung), wobei das Quadervolumen möglichst groß sein soll.

   (a) Zeige, dass das mathematische Modell zwei "Lösungen" x_1 und x_2 liefert und begründe, warum nur eine davon in Frage kommt! Weise das Maximum nach! **6P**

   (b) Berechne das maximale Quadervolumen und begründe ohne Taschenrechner mittels Bruchrechnung, warum der Abfall weniger als 10% beträgt! **2P**

   (c) Ermittle jenen Wert x_3 für x, sodass sich aus den weggeschnittenen Quadraten eine Deckfläche des Quaders herstellen ließe und verifiziere, dass x_3 gleich dem harmonischen Mittel von x_1 und x_2 ist! **2P**

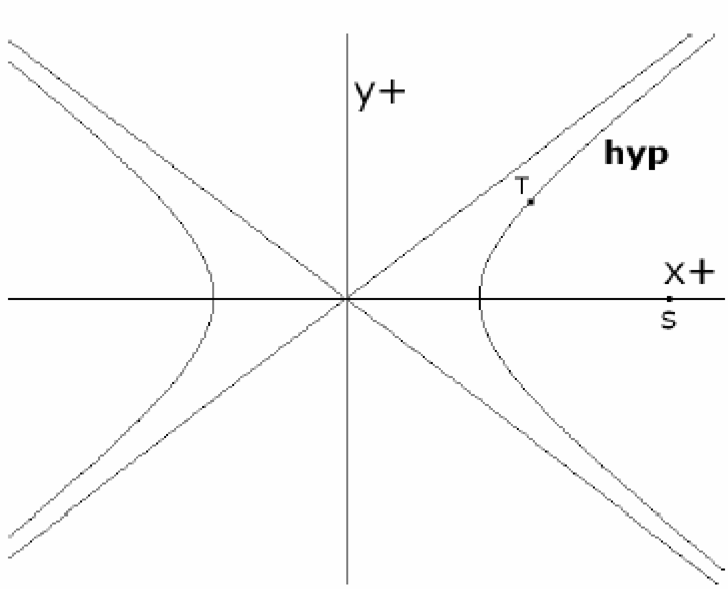


87 und 88) aus:

Klasse: 7D(Rg) **08. 06. 2009**

2. Schularbeit (PM4, Differentialrechnung)

Nachtragstermin für Tina Maria VORSTANDLECHNER

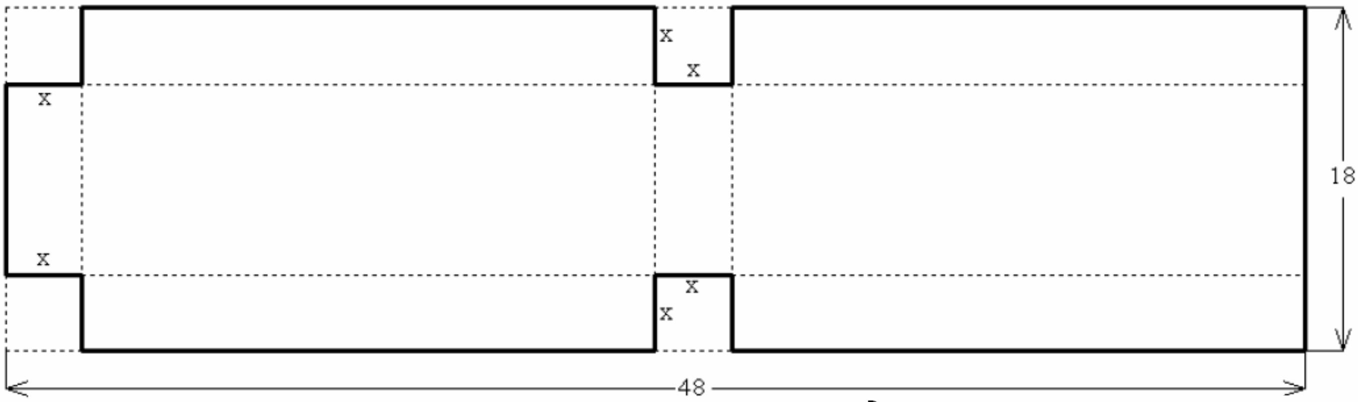


2) Berechne die Koordinaten jenes Punkts T(x|y>0) auf der Hyperbel hyp [hyp: $3x^2 - 4y^2 = 624$], welcher vom Punkt S(35|0) den kleinsten Abstand hat und berechne diesen Abstand (vgl. obige Abbildung!). Vergiss nicht auf den Nachweis des Maximums!

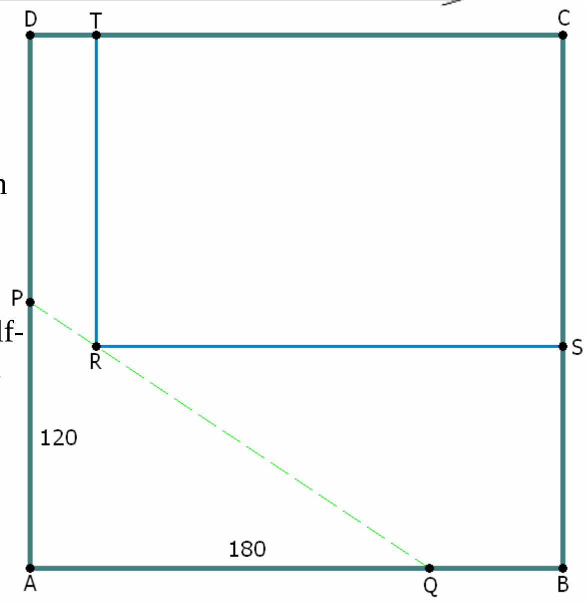
3) Aus dem abgebildeten rechteckigen Karton (a=48cm, b=18cm) soll durch Wegschneiden von vier Quadraten der Seitenlänge x das Netz einer Schachtel gebildet werden, wobei der Deckel auf zwei Seiten übergreift.

- Wie groß ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel maximal wird (Nachweis des Maximums!)?
- Begründe, warum die Lösung eindeutig ist!
- Fasst die volumsgrößte Schachtel mehr oder weniger als ¾ Liter (Begründung)?
- Fasst die volumsgrößte Schachtel mehr oder weniger als 1 Liter (Begründung)?

Maße in cm!



89) Eine quadratische Platte von 240cm Seitenlänge wird durch enorme Belastung beschädigt, indem das in der Abbildung eingezeichnete Dreieck ΔAQP wegbricht.



a) Welcher Punkt R der Bruchkante PQ generiert auf die in der Abbildung illustrierten Weise das größte aller möglichen Rechtecke RSCT? Zeige ohne Taschenrechner, dass mehr als die Hälfte der Platte "gerettet" werden kann (Mehr oder weniger als 5 bzw. 10% mehr als die Hälfte? Auch diese Frage ist ohne Taschenrechner bearbeiten)!

b) Verifiziere an diesem konkreten Beispiel die Formel $\boxed{A = \frac{[a(s-b)+bs]^2}{4ab}}$ für den Flächeninhalt A des "maximal rettbaren Rechtecks"!

90) aus:

Klausurarbeit aus Mathematik

8D, Realgymnasium, Frühjahrstermin 2009/10, Prüfer: Dr. Robert Resel

Verwendete Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-30) und Formelsammlung (Kraft/Bürger/Unfried/Götz)

4) a) Multipliziere aus: $(2x^2+5)\cdot(x-3) =$ **1P.**

b) Löse unter Verwendung von 4a): Welcher Punkt auf der Parabel mit der Gleichung $y=x^2-2x-3$ (*) hat vom Punkt P(15|–3) den kürzesten Abstand? Welche Bedeutung hat dieser Punkt für die hinter (*) steckende Funktion? Weise das Minimum mittels zweiter Ableitung nach und begründe allfällige Vereinfachungen der Zielfunktion! **10P.**

Viel Freude beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juli 2011.

Dr. Robert N. Resel, e. h.