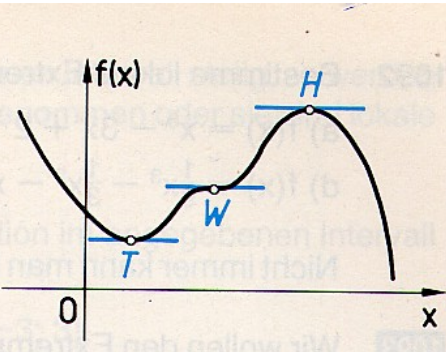
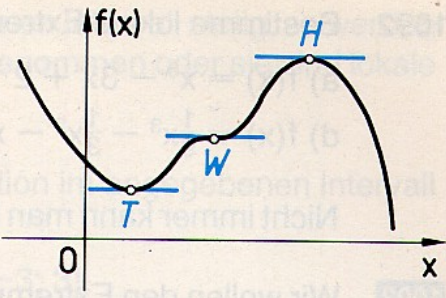
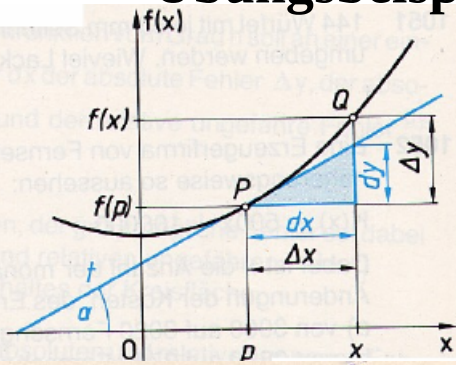
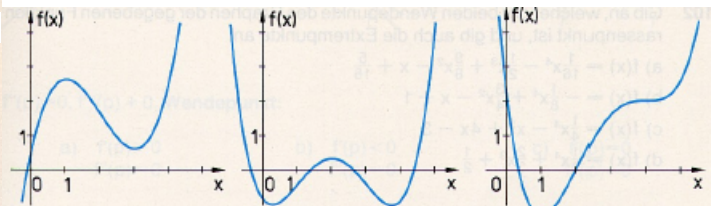


Übungsbeispiele für die 3. Schularbeit (zweistündig)

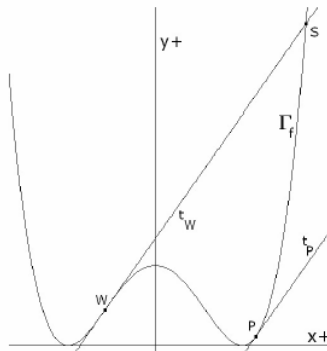
(7D, Gymnasium, 2011/12)



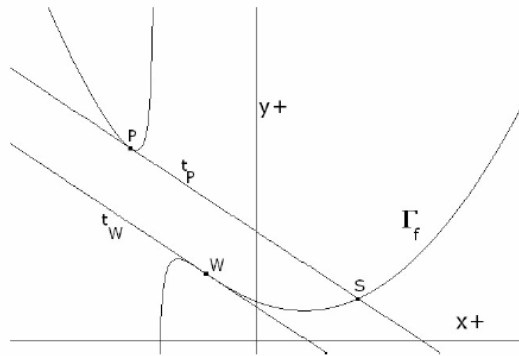
Diese Beispiele sollen durch jene für den zweiten Teil des Kapitels "Differentialrechnung" relevanten Grundaufgaben {Vertiefung der Eigenschaft von Kurventangenten: Sonderstellung von Wendetangenten, zueinander parallele Kurventangenten bei Graphen von Polynomfunktionen wie auch rationalen Funktionen, Bearbeiten sowohl inner- als auch außermathematischer Optimierungsprobleme mit besonderem Augenmerk auf die wesentlichen Schritte beim Lösen einer Optimierungsaufgabe [Aufstellen eines adäquaten mathematischen Modells, Beschreibung der zu optimierenden Größe durch eine Funktion ("Zielfunktion" oder "Hauptbedingung") in einer oder mehreren Variable(n), im letzteren Fall Formulieren einer / oder mehrerer entsprechenden/r Nebenbedingung/en zwecks Rückführung auf eine Zielfunktion in einer Variable, weitestgehende Vereinfachung der Zielfunktion (unter Verwendung entsprechender Sätze – inklusive exakter Formulierung und Herleitung! vor Anwendung des analytischen Apparats (Extremwerttest aus der Kurvendiskussion) samt Begründungen für sich daraus ergebende Konsequenzen]} führen, die du bei der dritten Schularbeit **in jedem Fall** unter Beweis stellen wirst müssen.



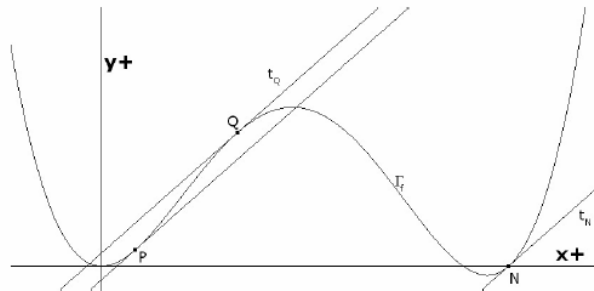
ACHTUNG! Ein bloßes "Auswendiglernen" der Beispiele ist sicher keine ausreichende Vorbereitung, da du deine erworbenen Kenntnisse bei der Schularbeit auf Problemstellungen anzuwenden hast, die zwar nicht gänzlich neuartig, aber zum Teil in der Form wie bei der Schularbeit gestellt in dieser Aufgabensammlung nicht enthalten sind! Ein eigenständiges Lösen dieser Aufgaben (bis auf jene, die wir in diversen Schulübungen gemeinsam bearbeiten werden) ist eine absolute Notwendigkeit für ein angemessenes Übungsprogramm!



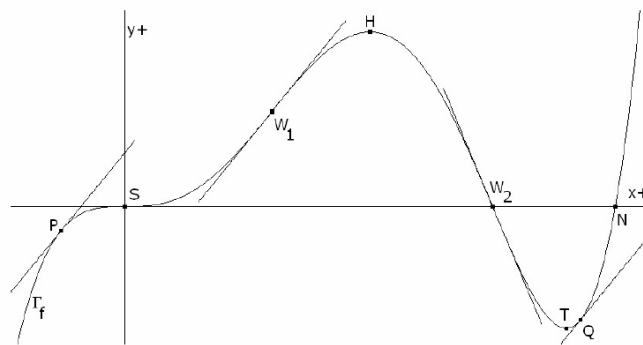
- 1) Ausgehend von der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = x^4 - 6x^2 + 9$ sind die Koordinaten jenes Kurvenpunkts P zu berechnen, in dem die Tangente t_P zur in obiger Abbildung eingezeichneten Wendetangente t_W parallel verläuft. Kontrolliere nach erfolgter Berechnung die für alle biquadratischen Polynomfunktionen gültige Formel $x_P = \frac{1}{2} \cdot (x_S - x_W)$!



- 2) Ausgehend von der Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{x^3+56}{x+4}$ sind die Koordinaten jenes Kurvenpunkts P zu berechnen, in dem die Tangente t_P zur Wendetangente t_W parallel verläuft. Berechne ferner die Koordinaten von S !



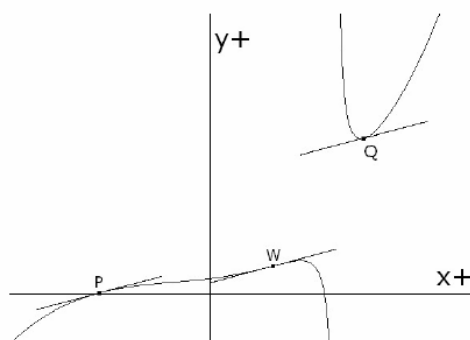
- 3) Gegeben ist die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \frac{1}{1728} \cdot (x^4 - 68x^3 + 1152x^2)$. Ermittle die Koordinaten jenes in obiger Abbildung eingezeichneten Punkts Q auf Γ_f , in welchem die Tangente t_Q parallel zur Tangente in der rechtesten Nullstelle verläuft. Stelle auch eine Gleichung von t_Q auf!
- 4) Zeige, dass der Graph Γ_f der rationalen Funktion $f [y = f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}]$ drei Wendestellen x_1, x_2 und x_3 aufweist ($x_1 < x_2 < x_3$). Lege dein Hauptaugenmerk auf den Wendepunkt $W_3(x_3|f(x_3))$ und zeige, dass es keine zur Wendetangente parallele Kurventangente gibt.



- 5) In obiger Figur ist der Graph der Polynomfunktion $f \left[y = f(x) = \frac{1}{512} \cdot (x^5 - 70x^4 + 1200x^3) \right]$ abgebildet.

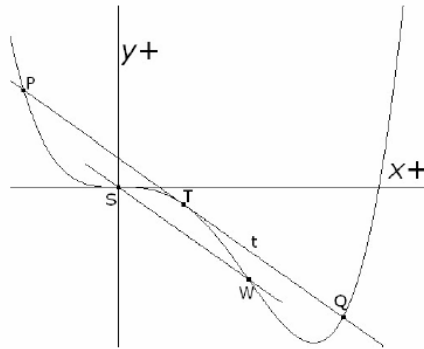
Bearbeite die folgenden Aufgabenstellungen:

- Diskutiere die Funktion. Zeige, dass zwei der drei Nullstellen auch Wendestellen sind.
- Berechne die x -Koordinaten jener Kurvenpunkte P und Q , in welchen die Tangenten an die Kurve parallel zur steigenden Wendetangente verlaufen. Verwende Wurzelausdrücke!

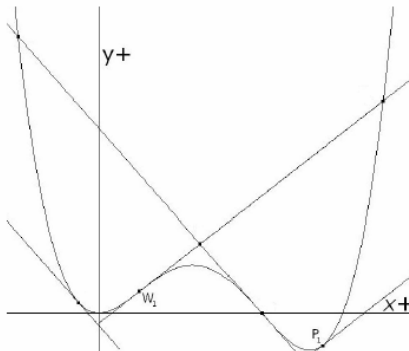


- 6) In obiger Figur ist der Graph Γ_f der rationalen Funktion $f \left[y = f(x) = \frac{x^4 - 11}{x - 2} \right]$ zusammen mit einem seiner Wendepunkte abgebildet.

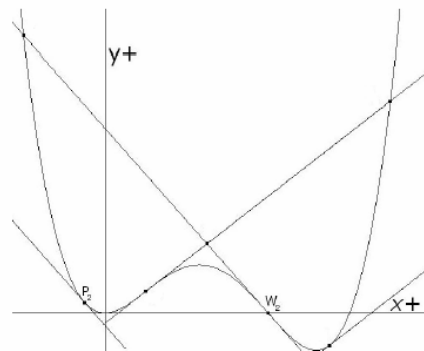
Berechne die x -Koordinaten jener Kurvenpunkte P und Q auf Γ_f , in welchen die Tangenten an die Kurve parallel zur eingezeichneten Wendetangente verlaufen. Verwende Wurzelausdrücke!



7. In obiger Figur ist der Graph der Funktion f [$y = f(x) = x^4 - 4x^3$] zusammen mit seinem Sattelpunkt S und seinem (gewöhnlichen) Wendepunkt W abgebildet. Zeige, dass es drei Punkte auf Γ_f gibt, in denen die Tangente an Γ_f parallel zu g_{SW} verläuft und berechne die Koordinaten des Gitterpunkts T unter diesen drei Punkten. Zeige, dass $T = M_{PQ}$ gilt. (Zusatz: Zeige, dass für die anderen beiden Punkte $T_1(x_1|y_1)$ und $T_2(x_2|y_2)$ die Gleichung $\frac{x_1+x_2}{2} = x_T$ gilt!)



8. Ausgehend vom obig abgebildeten Graphen der Funktion f [$y = f(x) = x^4 - 20x^3 + 96x^2$] sind die Koordinaten jenes Kurvenpunkts P_1 zu ermitteln, in dem die Tangente an Γ_f parallel zur Wendetangente t_{W_1} verläuft!



9. Ausgehend vom obig abgebildeten Graphen der Funktion f [$y = f(x) = x^4 - 20x^3 + 96x^2$] sind die Koordinaten jenes Kurvenpunkts P_2 zu ermitteln, in dem die Tangente an Γ_f parallel zur Wendetangente t_{W_2} verläuft!

10) Der nebenstehend abgebildete

Graph Γ_f der Funktion f mit

der Funktionsgleichung

$$y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$$

geht durch den Punkt

$T(1|-15)$ und weist dort

eine Steigung von -32 auf.

a) Ermittle die Parameter a und b !

[Zeige, dass $(a|b)=(-4|-12)$ gilt.]

b) Zeige, dass für die Schnittpunkte

P und Q der Tangente t_T an Γ_f

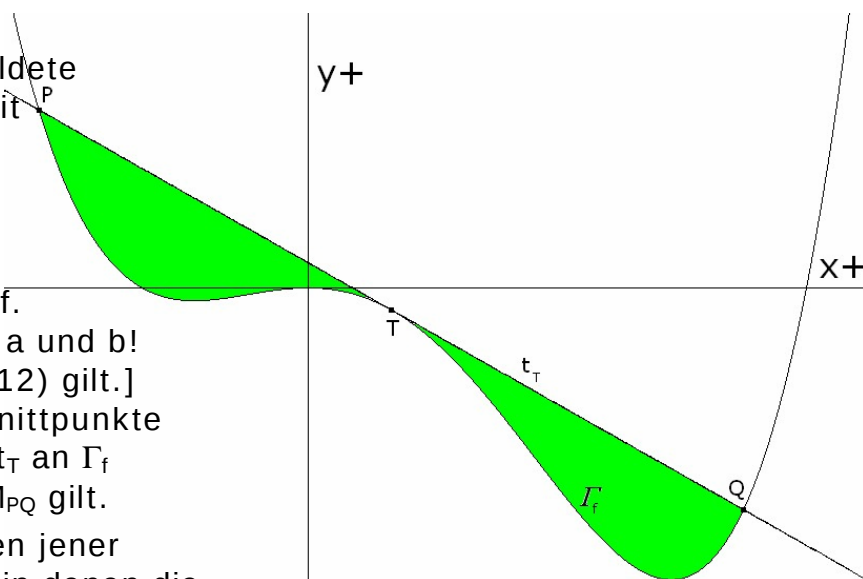
in T die Beziehung $T=M_{PQ}$ gilt.

c) Ermittle die Koordinaten jener

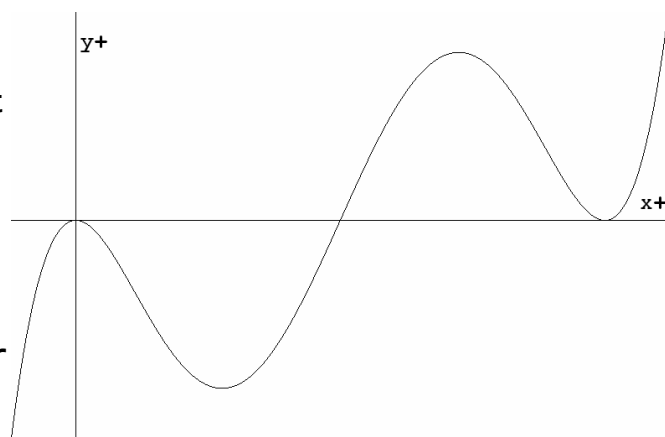
Punkte R und S auf Γ_f , in denen die

Tangenten an Γ_f parallel zu t_T verlaufen.

d) Berechne den Schnittpunkt von t_R und t_S ! Was fällt dir auf? Begründe dies!



11) Gemäß nebenstehender
Abbildung ist der Graph
der Polynomfunktion f mit
der Funktionsgleichung
 $y=f(x)=x^5-5x^4+8x^3+ax^2+bx$
gegeben, wobei $x=2$ für
 f sowohl Null- als
auch Wendestelle ist.



a) Ermittle die Parameter
 a und b [Zeige, dass
 $(a|b)=(-4|0)$ gilt!].

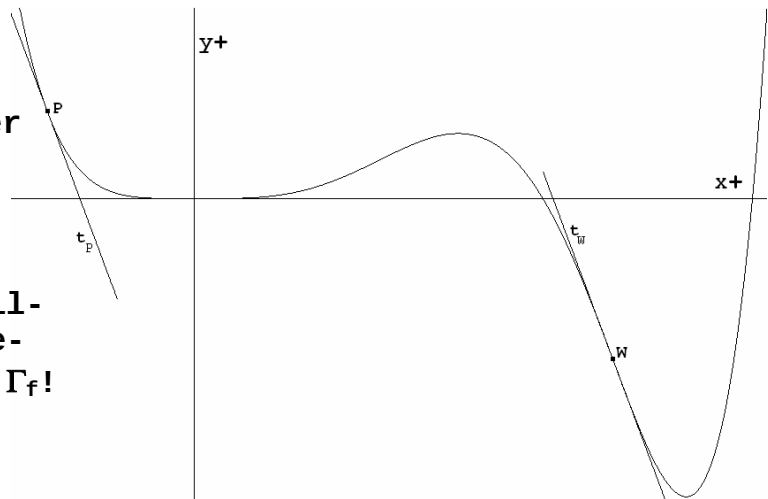
b) Diskutiere die Funktion und begründe obige Gestalt von
 Γ_f ! Für die differentialgeometrische wichtigen
Punkte reicht es, die x -Koordinaten zu berechnen,
jedoch unter Verwendung von Wurzelausdrücken!

c) Ermittle unter Verwendung von Wurzelausdrücken die x -Ko-
ordinaten jener Punkte auf Γ_f , in welchen die Tangenten
parallel zur Tangente im mittleren Wendepunkt W
verlaufen!

Freiwilliger Zusatz: d)

Γ_f verläuft punktsymmetrisch w.
Formuliere dies über eine
entsprechende Funktional-
gleichung und beweise diese!

- 12) Gemäß nebenstehender Abbildung ist der Graph der Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^6-39x^5+360x^4$ gegeben.

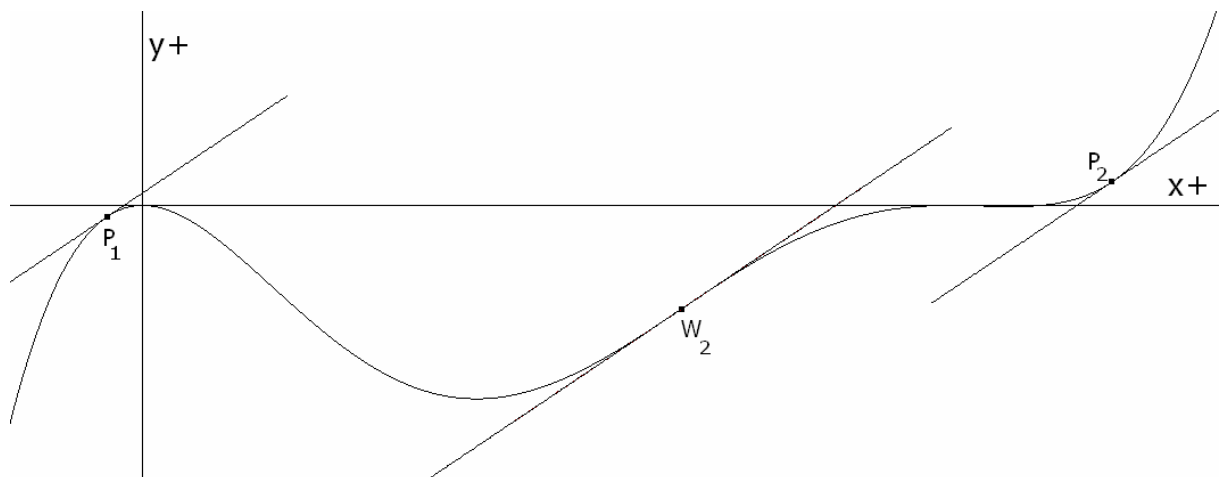


- a) Berechne alle Nullstellen und Wendepunkte von f und Γ_f ! Klassifiziere letztere auch!
- b) Begründe, warum die x -Koordinate jenes Kurvenpunkts P , in welchem die Tangente t_P parallel zur fallenden Wendetangente von Γ_f verläuft, im Intervall $[-3; -2]$ liegt.

13)

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung. $y=f(x)=x^5-28x^4+261x^3-810x^2$

Zeige, dass Γ_f u.a. den Wendepunkt $W_2(6|y)$ besitzt und berechne unter Verwendung von Wurzelausdrücken die x -Koordinaten (und nur diese!) jener Kurvenpunkte P_1 und P_2 , in welchen die Tangenten an Γ_f parallel zur Wendetangente an Γ_f in W_2 verlaufen (siehe Abbildung unten). Kontrolliere die relativ gute Übereinstimmung mit den Werten $-\frac{109}{280}$ und $\frac{205}{19}$!

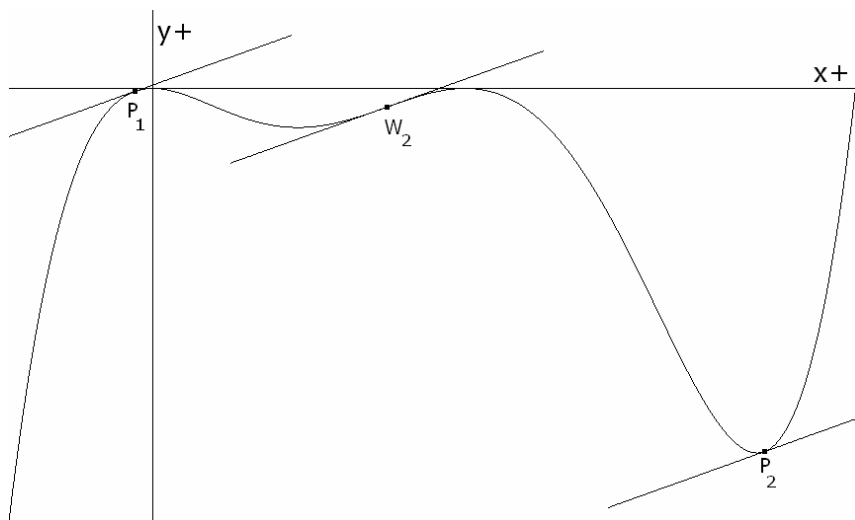


14)

Gegeben ist die Polynomfunktion f mit
nebenstehender Funktionsgleichung.

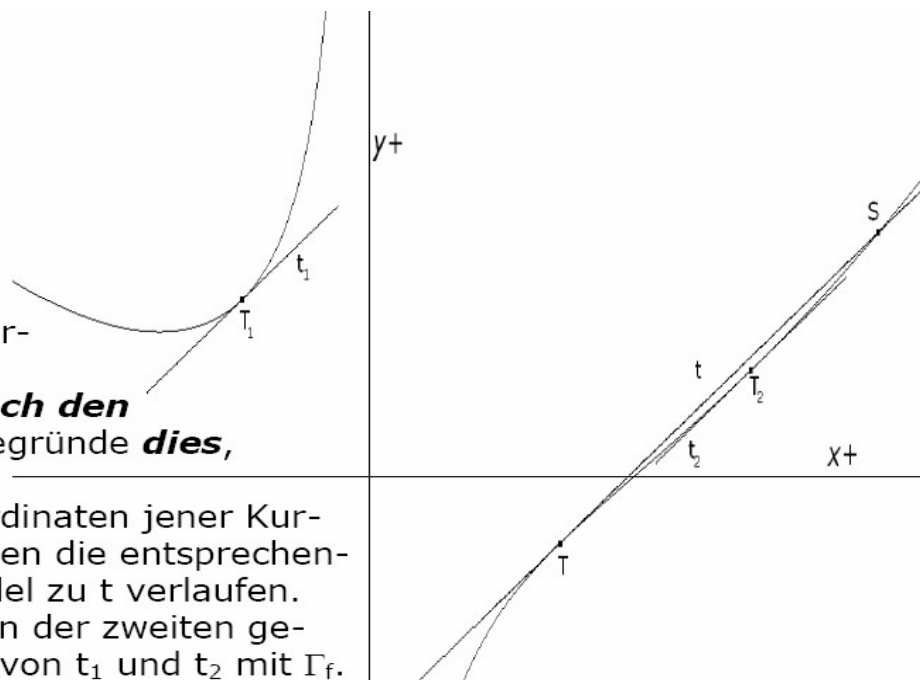
$$y = f(x) = x^5 - 17x^4 + 88x^3 - 144x^2$$

Zeige, dass Γ_f u.a. den Wendepunkt $W_2(3|y)$ besitzt und berechne unter Verwendung von Wurzel ausdrücken die x -Koordinaten (und nur diese!) jener Kurvenpunkte P_1 und P_2 , in welchen die Tangenten an Γ_f parallel zur Wendetangente an Γ_f in W_2 verlaufen (siehe Abbildung unten). Kontrolliere die relativ gute Übereinstimmung mit den Werten $-\frac{20}{87}$ und $\frac{368}{47}$!



15)

In nebenstehender Figur ist der Graph der Funktion f ($y=f(x)=x^2-72x^{-1}$) zusammen mit **seiner Tangente t** im Kurvenpunkt $T(3|y_T)$ abgebildet, **welche mit Γ_f außerdem noch den Punkt S gemeinsam hat**. Begründe **dies**, berechne die Koordinaten von S und ermittle ferner die Koordinaten jener Kurvenpunkte T_1 und T_2 , in welchen die entsprechenden Tangenten t_1 und t_2 parallel zu t verlaufen. Berechne auch die Koordinaten der zweiten gemeinsamen Punkte S_1 und S_2 von t_1 und t_2 mit Γ_f .



Anwendungen der Differentialrechnung

Themengebiet: Anwendungsorientierte Optimierungsaufgaben

Klasse: 7A(G), 2011/12



16) Nebstehend ist die Verpackung einer Tiefkühlkost zu sehen, wobei die exakte Situation in obigem Szenario dargestellt ist. Aus Lagerungsgründen soll y eine feste Länge von 16cm aufweisen, wobei der Inhalt der Packung 1,44 Liter betragen soll.

a) Ermittle jenes Wertepaar $(x|z)$, für welches der Materialverbrauch für die Packung minimal ist und begründe sowohl das Vorliegen einer entsprechenden Minimumstelle als auch die Eindeutigkeit der Lösung! Verwende (falls überhaupt notwendig, denn hier gilt bei der Anwendung des Horner-Schemas ausnahmsweise einmal: Probieren geht über Studieren!) die Resultate der Übungen $(w^2+10w+60) \cdot (w-6) = \dots$ sowie $(w^2+15w+135) \cdot (w-15) = \dots!$

			z
x		x	z
y			y

b) Produktionschef Ritzi wollte Zeit sparen (Warum als Produktionschef Differentialrechnung anwenden, wenn man sich von der noch dazu hübschen Tochter des Chefs zu einer Party einladen lassen kann? ☺) und entschied sich für $(x|z) = (10|9)$. Zeige, dass die Lösung aus a) gegenüber Ritzis "Lösung" fast 9% Materialkosten einspart!

17) Wie obige Aufgabe 16), nur dass jetzt x aus Lagerungsgründen 16cm lang sein soll und der Inhalt der Packung 0,768 Liter aufzuweisen hat! Zeige, dass Ritzis Lösung – Dieses Mal hinderte ihn ein Candlelight-Dinner mit der anderen Tochter des Chefs an seiner Arbeit! ☹ – $(y|z) = (8|6)$ gegenüber der optimalen Lösung um 10% mehr Materialkosten verursacht! Verwende (falls überhaupt notwendig, denn auch hier gilt bei der Anwendung des Horner-Schemas wiederum: Probieren geht über Studieren!) die Resultate der Übungen $(w^2+12w+48) \cdot (w-4) = \dots$ sowie $(w^2+12w+48) \cdot (w-12) = \dots!$



18) Ein ehemaliges Maturabeispiel deines Mathematikprofessors:

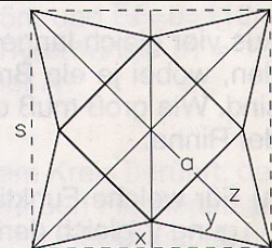
- 4) Das Jüngste Gericht - eines der Hauptwerke von Michelangelo Buonarroti - ziert die Altarwand der Sixtinischen Kapelle in Rom. Das Fresko ist annähernd rechtwinkelig, ungefähr ~~10m~~ breit und ~~17,04m~~ hoch. 1,42 Meter tiefer als der untere Rand des Gemäldes befindet sich das Auge eines Betrachters. Welcher Ort in der Kapelle ist als günstigster Standpunkt zur Betrachtung des Kunstwerkes auszuwählen, sodass der Sehwinkel möglichst groß wird? Gib die dafür notwendige Entfernung sowie den größtmöglichen Sehwinkel an!

6P.

Hast du eine Erklärung dafür, weshalb der Schüler den Textteil "10m breit" durchgestrichen haben könnte?

19) Ebenso ein ehemaliges Maturabeispiel:

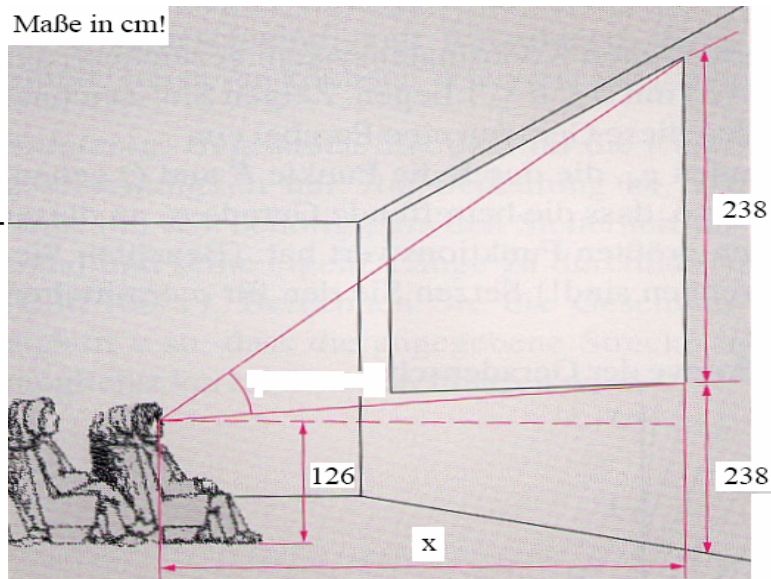
- 3) Gegeben ist ein quadratisches Blech mit der Seitenlänge s . Von den Seiten aus werden gleichschenkelige Dreiecke, die die Quadratseiten zur Basis haben, ausgeschnitten. Es entsteht ein sternförmiges Netz einer quadratischen Pyramide (Fig. samt Beschriftung!). Wie groß muß die Höhe x obiger Dreiecke sein, damit die aus dem Netz bildbare Pyramide das größtmögliche Volumen besitzt? Ermittle ferner die Länge der Basiskante a und der Höhe h , sowie das Volumen V der Pyramide in Abhängigkeit der Quadratseite s .



- 20) Christine hat sich Max für "ihr" Loft (in das sie mit mindestens einem weiteren Sonntagskind gezogen ist und welches eine äußerst großzügige Raumhöhe besitzt, wie der Abbildung zu entnehmen ist) auf ein 288,1cm hohes Poster ban-
nen lassen, welches nun über ihrem Bett in einer Aughöhe von 25,8cm hängt. In welchem Normalabstand von der "Posterwand" sollte sich unser Sonntagskind liegend auf ihr Bett "knotzen", um Maxi unter maximalem Sehwinkel genießen zu können? Wie groß ist dieser maximale Sehwinkel?



- 21) Nicht nur die Sonntagskinder der Maturaklasse 8A (2012/13), sondern auch Anna, Denise und Ulli gründen mit Studienbeginn eine WG (wo sie – siehe unten! – auch gerne mal wilde Faschingsparties feiern), für die Denise aufgrund ihrer florierenden company [(SCH)MOL-Tankstellen! ☺] sofort ein Heimkino kauft, was die drei Damen gleich am Einweihungsabend vor ein (nona!) elementarmathematisches Problem stellt: In welchem Abstand x von der Leinwand (genaue Maße und Positionierung: vgl. Abbildung rechts oben!) erblicken die Zuschauer der ersten Reihe die Leinwand unter maximalem Sehwinkel? Wie groß ist dieser maximale Sehwinkel?



- 22) Conny und Julia wollen beim nächsten Schulfest ihren Film "Comeo und Julian" auf DVD verkaufen. Um optimalen Gewinn zu erzielen, haben die beiden Damen eine Umfrage durchgeführt, welche zu folgenden beiden Erkenntnissen führte:

- Ein Verkaufspreis von 6€ pro DVD würde zum Absatz aller Exemplare führen.
- Jeder € Preiserhöhung bewirkt einen Käuferschwund von 5%.

- a) Wie viel € sollten die ehrenwerten Produzentinnen für eine DVD verlangen, um optimalen Gewinn zu erzielen?
- b) Prompt können sich Conny und Julia [unter Befolgung von a)!] am Abend des Schulfests 2012 über den Absatz so mancher Exemplare freuen und haben damit 1014€ eingenommen. Wie viele Exemplare haben sie somit mitgebracht und wie viele bleiben ihnen übrig?



- 23) Es ist ja nun wahrlich nicht so, dass nur Christine gerne ein Poster von Maxi hätte, viel mehr möchte jetzt auch Hammy ein "**Lemmy**"-Poster (für den Fall, dass sich Lemmy noch einmal für über ein Semester nach "Fraungreisch" vertschüssst), wobei folgendes Problem auftritt: Leisten kann sie sich "nur" einen Druck auf einen $3,6\text{m}^2$ großen rechteckigen Bogen, wobei sie aus ästhetischen Gründen links bzw. unten einen 5 bzw. 8cm breiten Rahmen wünscht und aus nahe liegenden Gründen fordert, dass der mit Lemmy bedruckte Teil des Bogens einen möglichst großen Flächeninhalt aufweist.

- a) Wie groß sollte daher die Länge bzw. Breite des Bogens gewählt werden?
- b) Wie viel Prozent des Bogens nimmt das Lemmy-Poster ein?

24) Aus dem [ebenso wie in Aufgabe 23)!] verzerrungs-fähigen Maxi(malen! ☺) Bild für Christine aus Auf-gabe 20 soll eben gerade für unser Sonntagskind ein Poster gemacht werden, wobei Kommilitonin Caro ihr dies als Einstandsgeschenk für ihr Loft (vgl. Auf-gabe 20!) überreichen möchte. Finanziell kann sie sich einen Druck auf einen $2,88\text{m}^2$ großen rechtecki-gen Bogen leisten, wobei sie sich aufgrund proporti-onaler Erwägungen für einen linken Rand von 20mm Breite und einen unteren wie oberen Rand von jeweils 45mm entscheidet und ferner (für Christine) möchte, dass der [mit Maxi(mal)] bedruckte Teil des Bogens größtmöglichen (maximalen) Flächeninhalt aufweist.

- Berechne die sich aus obigen Forderungen ergebende Länge bzw. Breite des Bogens!
- Wie viel % des Bogens nimmt Maxi(mal) ein?

25) Die 8A (2012/13) hat eine Maturazeitung geschrieben (siehe rechte Abbildung!). Ihr Klassenvorstand hat sich am potentiellen Käufermarkt erkundigt, wie viel Geld die Interessenten denn bereit wären, auszugeben und kam zur Erkenntnis, dass bei einem Verkaufspreis von 2€ pro Zeitung die gesamte Auflage restlos aufgekauft sein würde. Für jeden € Preissteigerung würde der Käufermarkt um (nur!) 10% schwinden.

- Um wie viel € pro Zeitung sollte das Machwerk daher verschertelt werden?
- Wie hoch war die Auflage, wenn die Kassachefs Karin und Karim am Ende des Verkaufsmarathons 1080€ eingenom-men haben und wie viele Exemplare bleiben für die Lehrer und Schüler der 8A als Gratisexemplare übrig?

26) Um die Frage nach der optimalen Gewinnerzielung beim Verkauf der von Lehrern der 8A (2012/13) geschriebenen Maturazeitung (Prof. R. zeichnet für die Spitznamen auf dem nebenstehenden Titelblatt verantwortlich, der Gewinn wird zum Großteil für die Maturafeier verwendet!) zufriedenstellend be-antworten zu können, wird Bora-Bora-Nora von Prof. R. mit einer entsprechenden Umfrage beauftragt. Nach nur wenigen Tagen rückt die emsige Bora-Bora-Nora mit folgendem Ergebnisbericht heraus: Bei einem Verkaufspreis von 4€ (viele Farbfotos!) pro Zeitung würde die gesamte geplante Auflage von 200 Stück gekauft werden. Bei einer Erhö-hung des Verkaufspreises sinkt die Käufer-zahl pro € Preisanstieg um 20 Stück.

- Wie viel € sollten die Lehrer der 8A daher für eine Zeitung verlangen, um möglichst viel Ge-winn (für eine schöne Maturafeier) zu erwirt-schaften? Wie hoch ist dieser Gewinn dann?
- Wie viele Exemplare bleiben für die 8A und ihre Lehrer als Freiexemplare übrig?

