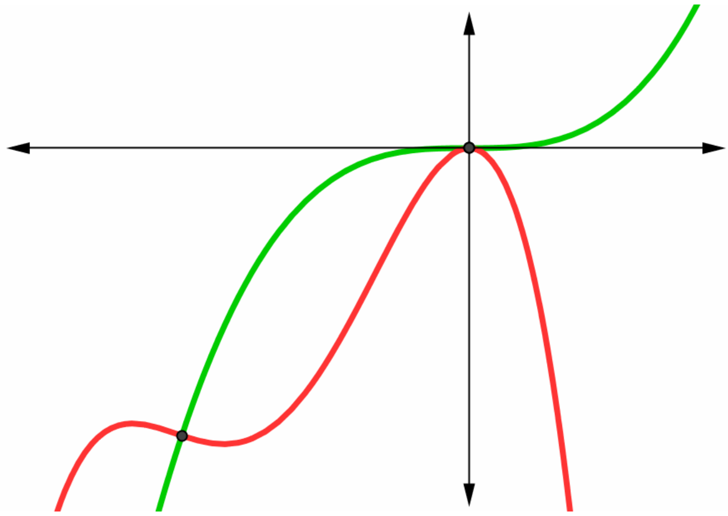
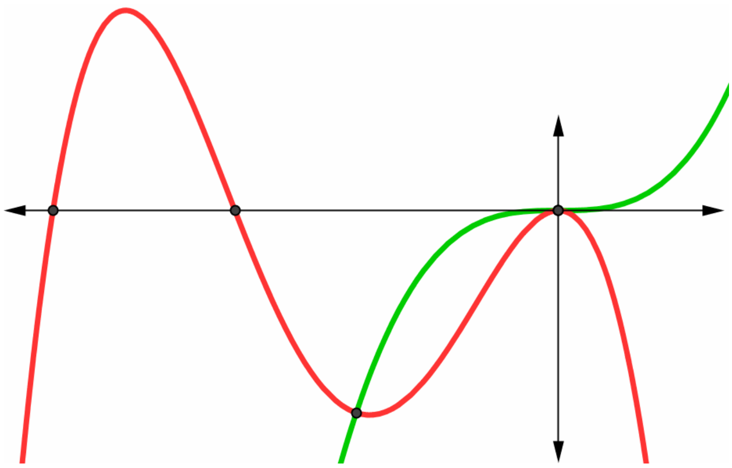
97) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3$ und $y=g(x)=\frac{-1}{3}\cdot(10x^4+27x^3+20x^2)$ samt aller Nullstellen und Schnittpunkte beider Graphen abgebildet.



a) Ordne jeder Kurve den entsprechenden Funktionsgraphen zu (Begründung)!

b) Berechne alle Nullstellen beider Funktionen sowie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen. Zeige insbesondere, dass die beiden Kurven einander in einem der Schnittpunkte rechtwinklig schneiden!

98) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3$ und $y=g(x)=\frac{-1}{9}\cdot(10x^4+41x^3+40x^2)$ samt aller Nullstellen und Schnittpunkte beider Graphen abgebildet.

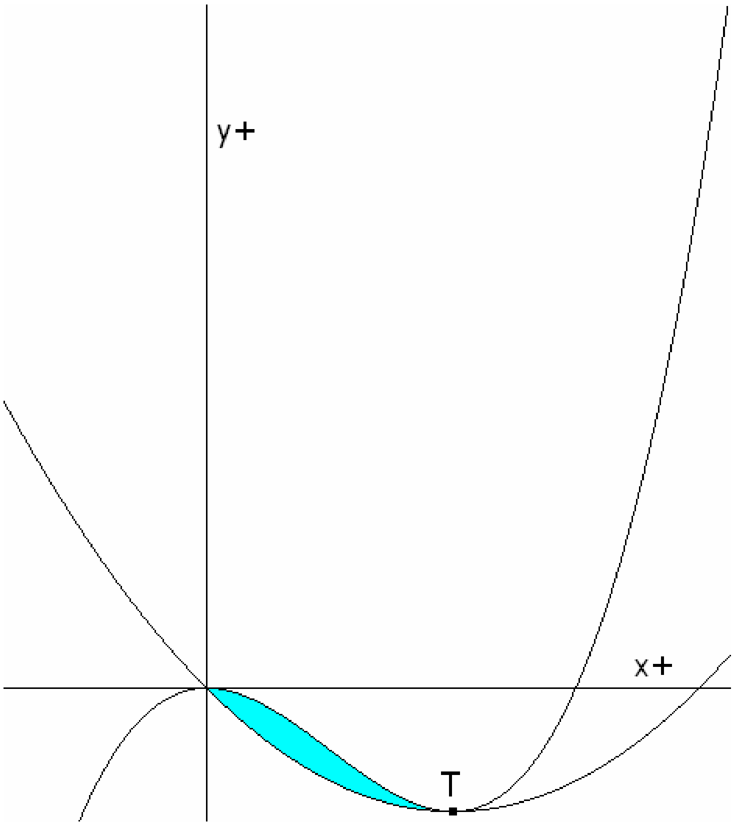


a) Ordne jeder Kurve den entsprechenden Funktionsgraphen zu (Begründung)!

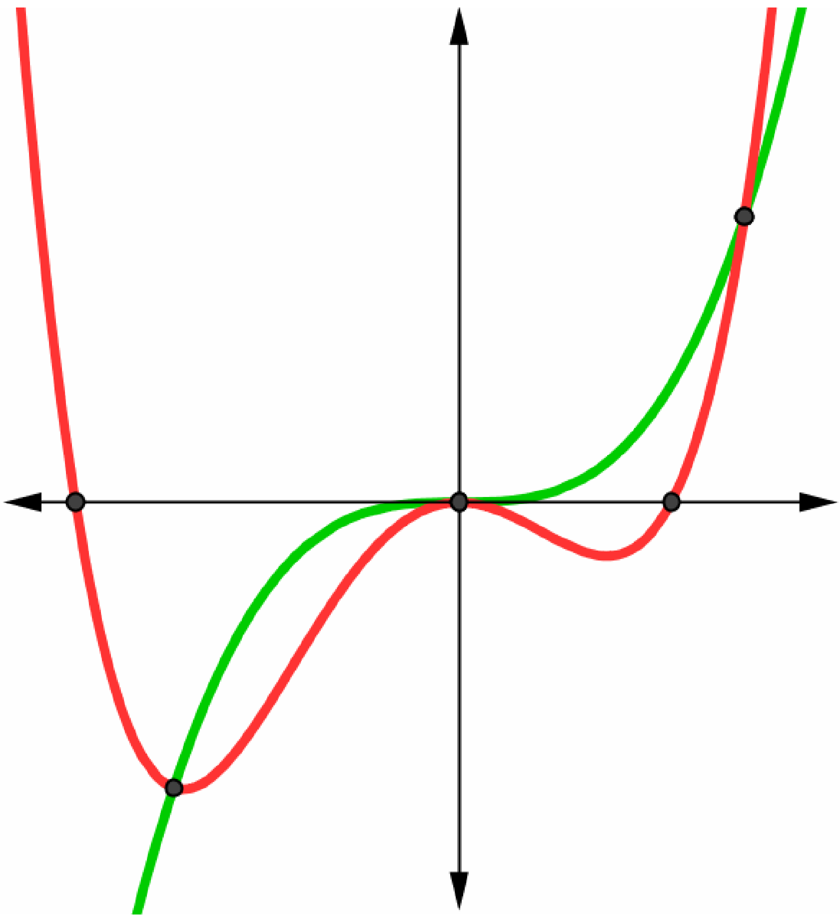
b) Berechne alle Nullstellen beider Funktionen sowie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen. Zeige insbesondere, dass die beiden Kurven einander in einem der Schnittpunkte rechtwinklig schneiden!

99) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=3x^3-9x^2$] und g [$y=g(x)=3x^2-12x$] zu (Begründung)!

b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung schneiden und im gemeinsamen Tiefpunkt berühren



100) In nebenstehender Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3$ und $y=g(x)=\frac{1}{3}\cdot(5x^4+3x^3-5x^2)$ samt aller Nullstellen und Schnittpunkte beider Graphen abgebildet.

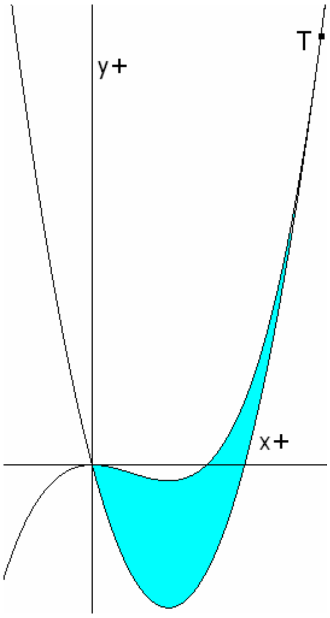


a) Ordne jeder Kurve den entsprechenden Funktionsgraphen zu (Begründung)!

b) Berechne alle Nullstellen beider Funktionen sowie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen. Zeige insbesondere, dass die beiden Kurven einander in einem der Schnittpunkte rechtwinklig schneiden!

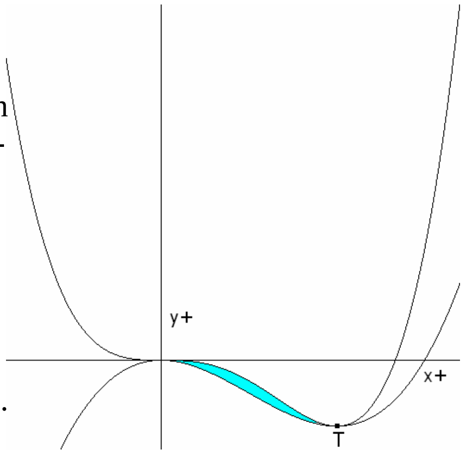
101) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=x^3-3x^2$] und g [$y=g(x)=9x^2-36x$] zu (Begründung)!

b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung schneiden und in einem weiteren Punkt berühren.



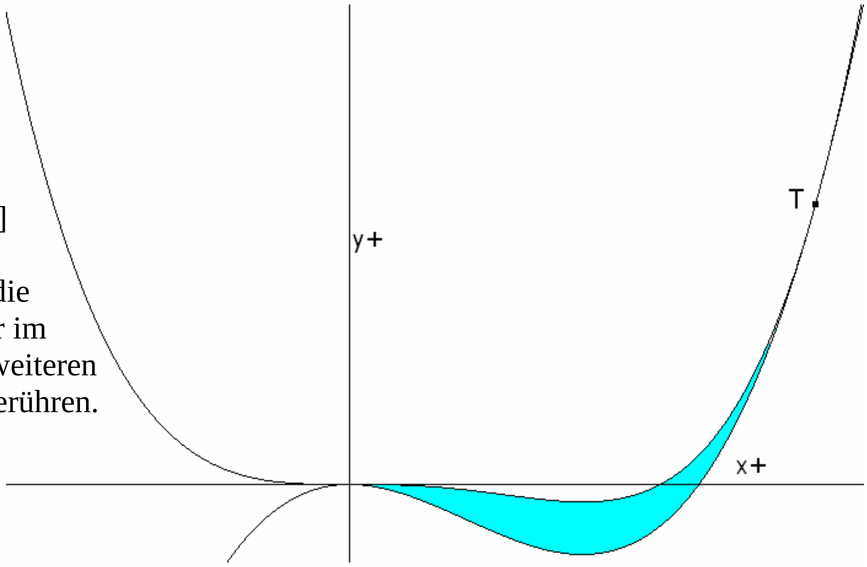
102) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=20x^3-180x^2$] und g [$y=g(x)=5x^4-40x^3$] zu (Begründung)!

b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung und im gemeinsamen Tiefpunkt T berühren.



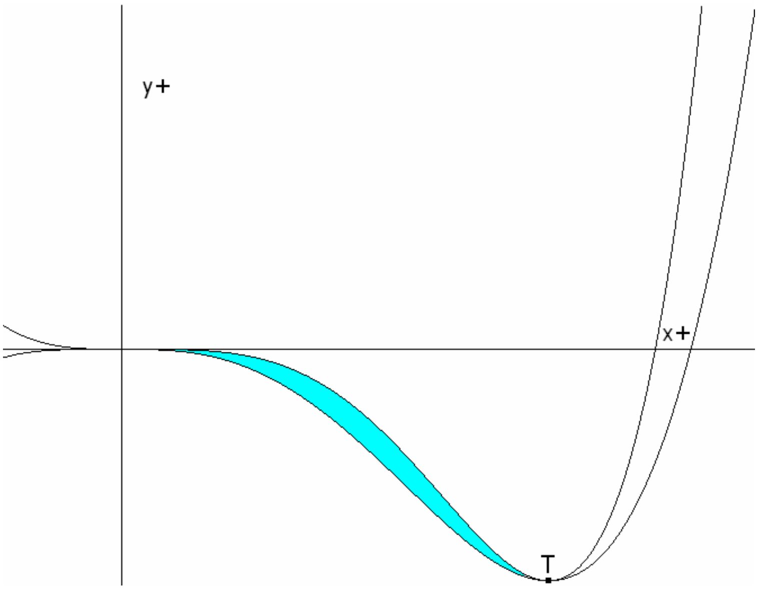
103) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=80x^3-720x^2$] und g [$y=g(x)=5x^4-40x^3$] zu (Begründung)!

b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung und in einem weiteren gemeinsamen Punkt T berühren.



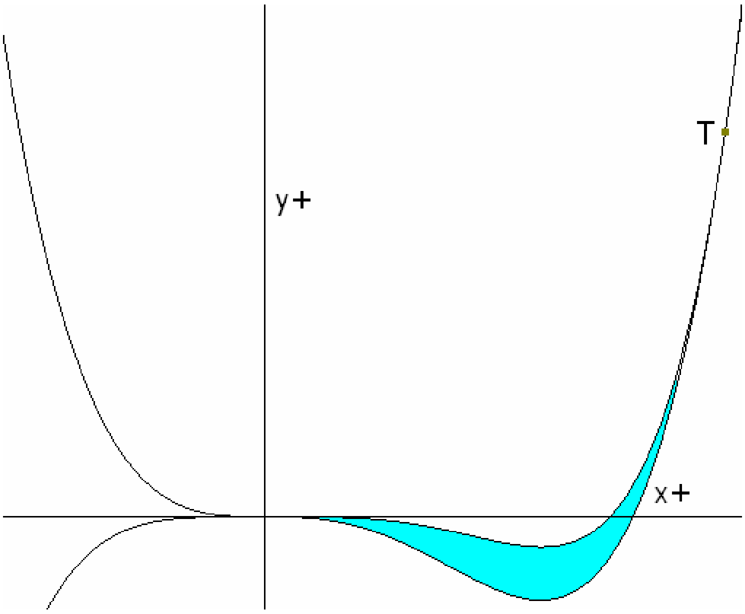
104) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=5x^5-75x^4$] und g [$y=g(x)=45x^4-720x^3$] zu (Begründung)!

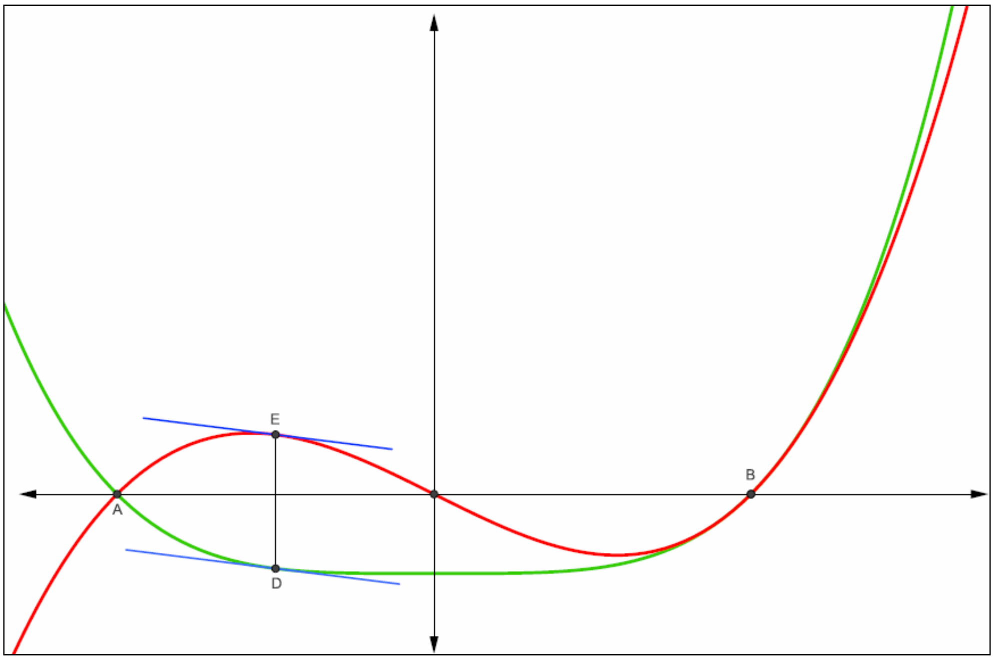
b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung und in einem weiteren gemeinsamen Punkt T berühren.



105) a) Ordne die Kurven in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Polynomfunktionen f [$y=f(x)=15x^5-225x^4$] und g [$y=g(x)=375x^4-6000x^3$] zu (Begründung)!

b) Zeige rechnerisch, dass die beiden Graphen einander im Ursprung und in einem weiteren gemeinsamen Punkt T berühren.



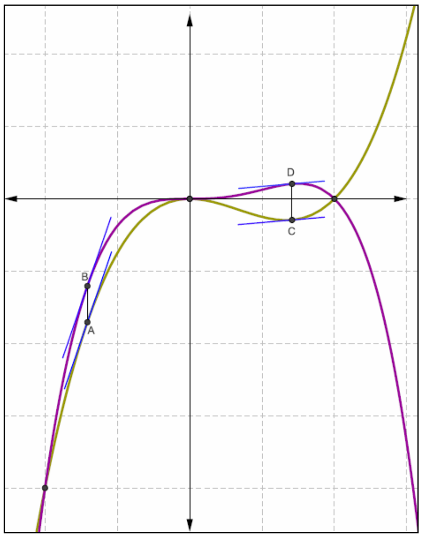


106) Gegeben sind die reellen Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=\frac{1}{8}\cdot(x^3-4x)$ sowie $y=g(x)=\frac{1}{32}\cdot(x^4-16)$.

a) Ordne den Kurven in der Abbildung den jeweiligen Funktionsgraphen zu. Begründe!

b) Zeige, dass die beiden Kurven einander je in einem Punkt der x-Achse orthogonal schneiden bzw. oskulieren.

c) Berechne Lage und Länge des längsten zur y-Achse parallelen Durchmessers DE dieses Gebiets! Begründe, warum die Tangenten an die Kurven in D und E zueinander parallel sein müssen!



107) Gegeben sind die reellen Funktionen mit den Funktionsgleichungen $y=f(x)=x^3-x^2$ sowie $y=g(x)=x^3-x^4$.

a) Ordne den Kurven in der Abbildung den jeweiligen Funktionsgraphen zu. Begründe!

b) Zeige, dass die beiden Kurven einander im Ursprung beühren und sich ein weiteres Mal auf der x-Achse orthogonal schneiden.

c) Berechne Lage und Länge des längsten zur y-Achse parallelen Durchmessers AB bzw. CD dieses Gebiets! Begründe, warum die Tangenten an die Kurven in A und B bzw. C und D zueinander parallel sein müssen und zeige, dass AB und CD gleich lang sind.

108) Satz. Jeder Vertreter der durch die gerahmte Gleichung definierte Kurvenschar weist genau einen Extrempunkt auf, der auf der Gerade g [g: $y=\frac{3}{2}\cdot x$] liegt.

$$\boxed{y=f_t(x)=\frac{x^3-2t^3}{x^2+t^2}}$$

Verifiziere diesen Satz für f_{-2} unter Verwendung des Trockentrainings $(x-2)\cdot(x^2+2x+16)$ und klassifiziere den Extrempunkt

109) Satz. Die Extrempunkte der durch die Gleichung $(x^3+64t^3)y=x-5t$ beschriebenen Kurvenschar (mit dem Scharparameter t) liegen alle auf der kubischen Kurve k mit der Gleichung k: $3x^2y=1$. Verifiziere diesen Satz für den Scharparameter t=1!

110) Für jede rationale Funktion f der Bauart $\boxed{y = f(x) = \frac{x^2}{x^2 + px + q}}$ gilt der folgende

SATZ. Sind u und v die Nullstellen des Nenners von f, dann weist f nebst $x_1=0$ auch noch die Extremstelle $x_2=H(u,v)$ auf, wobei H das harmonische Mittel von u und v ist.

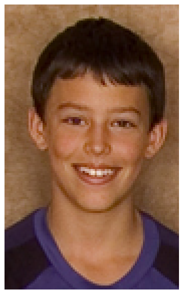
Kontrolliere die Gültigkeit dieses Satzes an einem selbstgewählten Beispiel (Hinweis: Verwende die VIETA-Gruppe!) mit zwei unterschiedlichen reellen Nullstellen des Nenners!

111) Bearbeite für die durch die rechte Gleichung definierte Kurvenschar mit dem Scharparameter t: $\boxed{y=\frac{x^2-t^2(8t-3)}{x^2+3t^2}}$

- Zeige, dass die Wendepunkte dieser Kurvenschar auf dem Geradenpaar mit der Gleichung $(1-y)^2=4x^2$ zu liegen kommen (Ein konkretes Beispiel für einen selbst gewählten Wert des Scharparameters t reicht aber auch aus! ☺).
- Beweise bzw. verifiziere an (d)einem (gewählten) Beispiel, dass die Wendetangenten jedes Vertreters dieser Schar stets aufeinander orthogonal stehen.

112) Ein Satz der elementaren algebraischen Geometrie besagt, dass unabhängig von der Wahl der Parameter a und b jede Kurve der Kurvenschar mit der Gleichung $(x-b)^2y=(x-a)^2$ genau einen Wendepunkt hat und alle Wendepunkte die y-Koordinate $\frac{1}{9}$ aufweisen. Beweise dies oder verifiziere an einem konkreten Beispiel!
Tipp für den Fall der Verifikation: Wähle a und b BEIDE gerade oder ungerade!

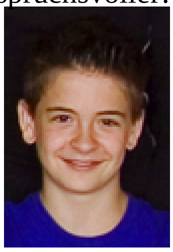
Doch keine Sorge, gleich wird es interessanter …
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑



113) a) Berechne das Produkt [für Frl. T.D.:Auch wenn das "fade Arbeit" bedeutet, die sowohl sie auch ihr Bruder länger nicht mehr machen!] $(x^2+x-20)\cdot(x+20)$!
↓↓↓↓↓↓↓↓
→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

b) Ermittle die Koordinaten der ***relativen Extrempunkte*** des Graphen der Funktion $\boxed{y=f(x)=\frac{x^3+800}{x+14}}$. Klassifiziere ***selbige*** und begründe dies jeweils analytisch oder geometrisch!

Doch keine Sorge, gleich wird es anspruchsvoller!
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑



114) a) Berechne das Produkt [für Anna: Auch wenn das "fade Arbeit" bedeutet, die sowohl sie als auch ihr Bruder schon lange nicht mehr machen!] $(x^2-6x-27)\cdot(x+6)$!
↓↓↓↓↓↓↓↓
→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

b) Ermittle die Koordinaten der ***relativen Extrempunkte*** des Graphen der Funktion $\boxed{y=f(x)=\frac{x^3+81}{x^2-21}}$. Klassifiziere ***selbige*** und begründe dies jeweils analytisch oder geometrisch!

115) Gegeben ist die rationale Funktion mit der Funktionsgleichung $\boxed{y=f(x)=58320000\cdot\frac{x^2+5}{(x+7)^4}}$.

a) Ermittle die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion (und bestimme wenn möglich schon die ggf. damit korrespondierenden Extrempunkte inkl. Klassifikation).

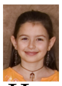
b) Ermittle die Koordinaten der Wendepunkte von Γ_f inkl. Klassifikation [und klassifiziere spätestens jetzt – so nicht schon in a) geschehen! – die Extrempunkte]!

116) Zeige, dass die Kurven mit den Gleichungen $y=6.25x-x^3$ und $y=\sqrt{2}\cdot(6.25-x^2)$ einander im mittleren Schnittpunkt rechtwinklig schneiden.

Doch keine Sorge, gleich wird es gehaltvoller!
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

117) a) Berechne das Produkt [für Sonja:]: Auch wenn das "fade Arbeit" bedeutet, die sie und auch ihre Schwester schon lang nicht mehr machen!] $(x^2-4x-12)\cdot(x-3)$!
↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓
→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

b) Ermittle die Koordinaten der ***relativen Extrempunkte*** des Graphen der Funktion $\boxed{y=\frac{x^3-72}{3x-14}}$. Klassifiziere ***selbige*** und begründe dies jeweils analytisch oder geometrisch!



118) a) Berechne das Produkt [für Hammy: Auch wenn das "fade Arbeit" bedeutet, die sowohl sie als auch ihre Schwester schon lange nicht mehr machen!] $(x^2+4x-5)\cdot(x-4)$!

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

b) Ermittle die Koordinaten der ***relativen Extrempunkte*** des Graphen der Funktion $\boxed{y=f(x)=\frac{x^3-10}{x^2-7}}$.
Klassifiziere ***selbige*** und begründe dies jeweils analytisch oder geometrisch!

119) Gegeben ist die rationale Funktion mit der Funktionsgleichung $\boxed{y=f(x)=\frac{x^4-9}{x^2-5}}$.

a) Ermittle die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion und bestimme [wenn möglich, sonst via b)!] schon die ggf. damit korrespondierenden Extrempunkte inkl. Klassifikation.

Schadet zur Übung aber keinesfalls [und ist Grundlage für c)!]!

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

b) Wenn nötig: Bilde die zweite Ableitungsfunktion und benutze selbige zur Klassifikation der potentiellen Extremstellen/Extrempunkte aus a)!

c) Erkläre ohne jegliche Rechnung (Erläuterungen und SKIZZEN!):

- Ø Wie viele Wendestellen muss f mindestens (In welchem/n Intervall/en ist dies zwingend? Begründe!) bzw. kann f höchstens (Begründung!) aufweisen?
- Ø *Wie viele weitere gemeinsame Punkte könnte jede der Wendetangenten von Γ_f scheinbar höchstens mit Γ_f haben?* Warum kann dieser "maximale" Fall nicht eintreten und wie lautet daher die eindeutige Antwort auf *die(se) Frage*?

Doch keine Sorge, gleich…

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑…wird`s würziger!

120) a) Berechne das Produkt [für Lemmy: Auch wenn das "fade Arbeit" bedeutet, die sie und ihre Schwester schon lange nicht mehr machen!] $(x^2+3x-108)\cdot(x+36)$!

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

b) Ermittle die Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion von $\boxed{y=f(x)=\frac{x^3-972}{(x-13)^4}}$ und bestimme [wenn möglich, sonst via c)!] schon die ggf. damit korrespondierenden Extrempunkte inkl. Klassifikation.

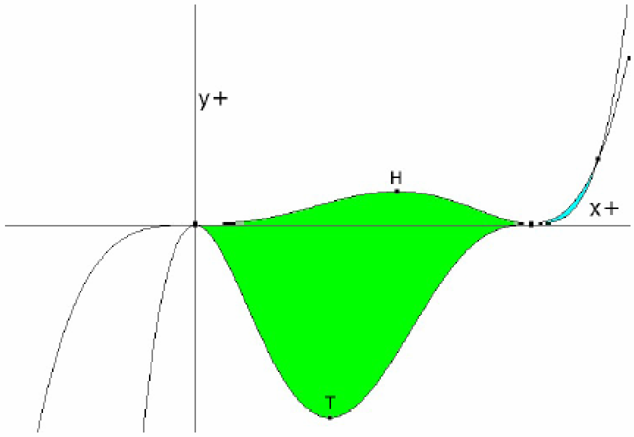
Schadet zur Übung aber keinesfalls [und ist Grundlage für d)!]!

↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑

c) Wenn nötig: Bilde die zweite Ableitungsfunktion und benutze selbige zur Klassifikation der potentiellen Extremstellen/Extrempunkte aus b)!

d) Erkläre ohne jegliche Rechnung (Erläuterungen und SKIZZEN!):

- Ø Wie viele Wendestellen muss f mindestens (In welchem/n Intervall/en ist dies zwingend? Begründe!) bzw. kann f höchstens (Begründung!) aufweisen? Worin besteht hier der wesentliche Unterschied zur Aufgabe 119)?
- Ø Wie viele weitere gemeinsame Punkte könnte jede der Wendetangenten von Γ_f prinzipiell mit Γ_f haben? Welcher Fall tritt jeweils ein? Begründe!

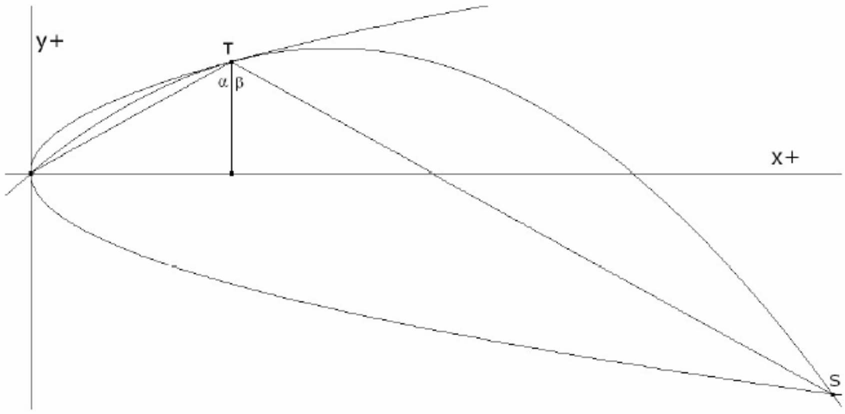


121) In obiger Figur sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $y = f(x) = x^3(x-5)^2$ und $y = g(x) = 6x^2(x-5)^3$ abgebildet. Berechne die Koordinaten von H und T und begründe deine Zuordnungen!

122) a) Lege im Punkt $P(1/y_P)$ der Kurve ν mit der Gleichung $\nu: y = \frac{57}{100} \cdot x^3$ die Tangente an ν und ermittle die Koordinaten des zweiten gemeinsamen Punkts Q von t_P mit ν.

b) Bereche das Maß jenes Winkels φ, unter dem ν in Q von t_P geschnitten wird.

123)

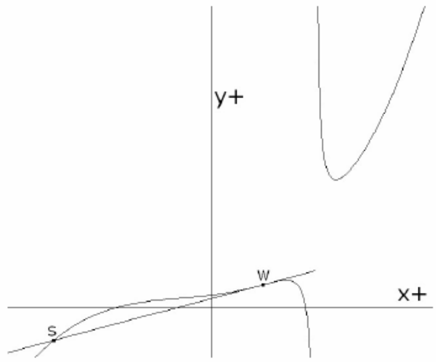


Die Parabeln mit den Gleichungen $y^2 = 2px$ und $y = ax^2 + bx$ gehen beide durch den Punkt $T(8|4)$ (vgl. obige Abbildung) und berühren einander ebenda.

(a) Begründe, warum die beiden Parabeln nebst T sowie dem Ursprung noch genau einen weiteren gemeinsamen Punkt S haben (müssen) und berechnen die Koordinaten von S.

(b) Kontrolliere den allgemeingültigen Satz, dass $\alpha = \beta$ sowie $x_S = 4x_T$ und $y_S = (-2) \cdot y_T$ gilt!

124)



In obiger Figur ist der Graph Γ_f der rationalen Funktion f $\left[y = f(x) = \frac{x^4 - 11}{x - 2}\right]$ zusammen mit einem seiner Wendepunkte inkl. Wendetangente abgebildet.
Berechne die Koordinaten von S und begründe analytisch wie auch algebraisch, warum die Wendetangente und der Graph nebst W und S keine weiteren Punkte mehr gemeinsam haben können.

125) **Klasse: 7C(Rg)** **28. 03. 2008**

1. Schularbeit (zweistündig)

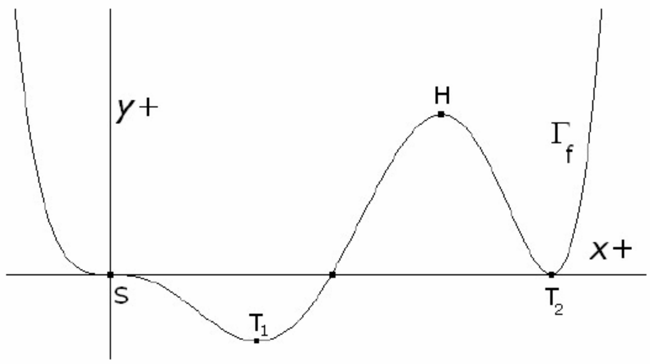
Pflichtmodul PM4: *Differentialrechnung*

$$\boxed{y = f(x) = 3 \cdot \frac{x^4 + 7}{x^3 - 5}}$$

1) a) Rechne nach, dass folgende Identität gilt:
$(x^2–2x–3)\cdot(x^2+2x+7) = x^4 – 20x – 21$

b) Ermittle unter Verwendung des Resultats aus a) die Koordinaten der Extrempunkte (inkl. Klassifikation mittels zweiter Ableitung) des Graphen der Funktion f mit nebenstehender Funktionsgleichung! *Mit dem Hinweis, dass bei x=0 keine Extremstelle, sondern eine Wendestelle vorliegt, kann die dritte Ableitung entfallen!* ☺

126)



In obiger Figur ist der Graph der Polynomfunktion f $\left[y = f(x) = x^6 - 30x^5 + 288x^4 - 864x^3\right]$ abgebildet.
Ermittle die Null- und Extremstellen von f und triff (inkl. Begründungen!) Aussagen über (nebst S!) weitere Wendepunkte von Γ_f!

127) **<u>Aus der gleichen Schularbeit wie das Übungsbeispiel 125):</u>**

4) a) Bestimme den Parameter a in $\boxed{\text{nebenstehender Funktionsgleichung}}$ derart, dass $x=-4$ eine Nullstelle von g ist!

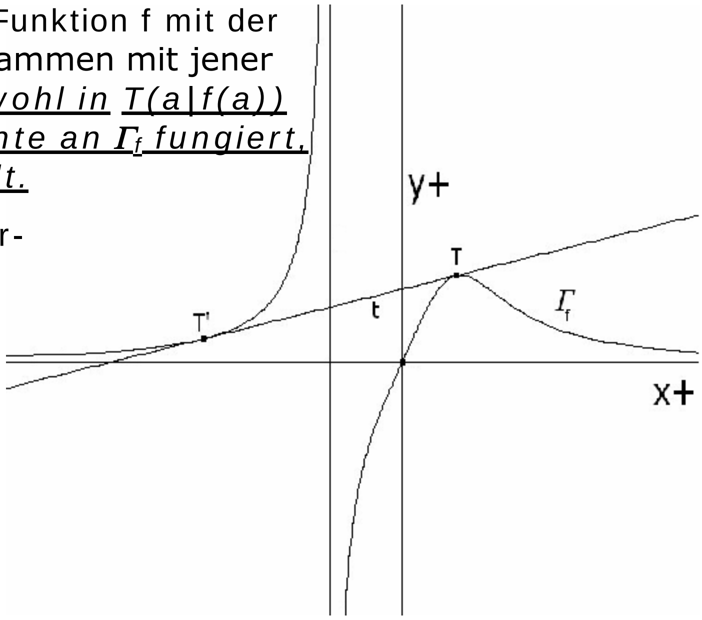
$$\boxed{y = g(x) = x^4 - 18x^2 + ax}$$

b) Berechne die restlichen Nullstellen sowie die Wendestellen (inkl. Klassifikation, jedoch ohne y-Koordinaten der Wendepunkte) von g (keine Dezimalzahlen, sondern Wurzelausdrücke verwenden!).

c) Stelle in $P(3|y_P)$ eine Gleichung der Tangente t_P an Γ_g auf und berechne die Koordinaten weiterer gemeinsamer Punkte von t_P und Γ_g. Interpretiere das Ergebnis!

128) Nebenstehend ist der Graph Γ_f der Funktion f mit der Funktionsgleichung $(x^3+1)\cdot y=x$ zusammen mit jener Tangente t abgebildet, *<u>welche sowohl in</u>* *<u>$T(a|f(a))$ als auch in $T'(b|f(b))$ als Tangente an Γ_f fungiert, wobei $a=\sqrt{3}-1$ und $b=-\sqrt{3}-1$ gilt.</u>*

Weise *<u>diese Behauptung</u>* ohne Verwendung von Dezimalzahlen nach!



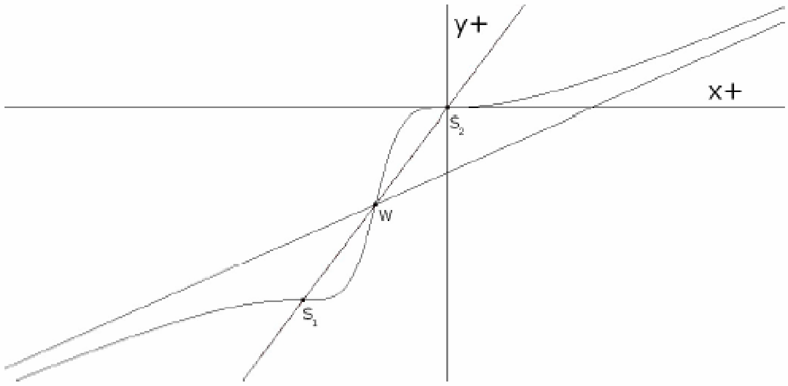
129) **<u>… aus der gleichen Schularbeit wie die Übungsbeispiel 125 und 127):</u>**

4) Rechne nach, dass die rationale Funktion R mit $\boxed{\text{nebenstehender Funktionsgleichung}}$→→ untenstehende Differentialgleichung erfüllt!

$$\boxed{y = R(x) = \frac{x^2}{x^5+1}}$$

↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓↓

$$\boxed{y' = \frac{5y^2}{x^3} - \frac{3y}{x}}$$



130) In obiger Figur ist der Graph Γ_f der rationalen Funktion f mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 6x + 12}$ zusammen mit seinen drei Wendepunkten abgebildet.

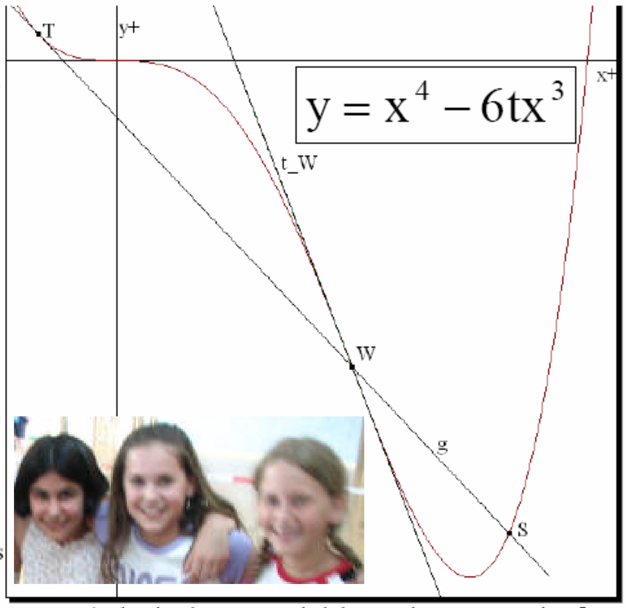
(a) Begründe, warum es keine senkrechte Asymptote/n gibt!

(b) Zeige, dass Γ_f zwei Sattelpunkte und einen gewöhnlichen Wendepunkt aufweist und verifiziere folgenden Satz der *Algebraischen Geometrie*:
Die Verbindungsgerade zweier Wendepunkte einer kubischen Kurve enthält immer auch einen dritten Wendepunkt.

(c) Beweise, dass Γ_f punktsymmetrisch zu seinem gewöhnlichen Wendepunkt verläuft!

131) **… und schließlich die letzten beiden (vier) Fotomodels:**

In der rechten Abbildung ist ein Vertreter der durch die gerahmte Gleichung definierten Kurvenschar zu sehen.

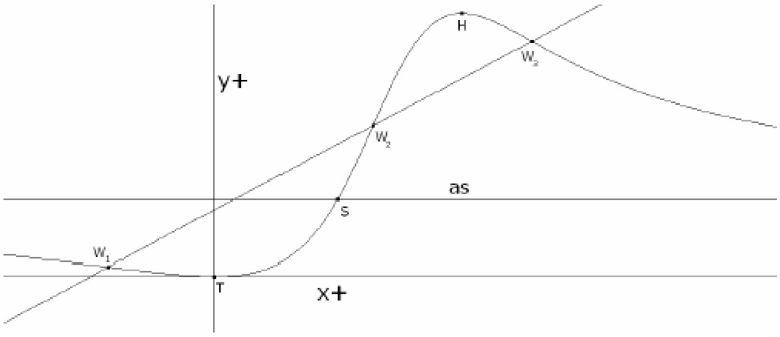


a) Berechne die Koordinaten des gewöhnlichen Wendepunkts W und stelle auch eine Gleichung der Wendetangente t_W auf!

b) Zeige, dass die Gerade g_{SW} [mit $S(5t|y_S)$] eine Tangente an die Kurve ist und berechne die Koordinaten des Berührungspunkts T!

c) Berechne für den Scharparameterwert $t = \frac{4}{5}$ das Maß des spitzen Schnittwinkels φ zwischen g_{SW} und t_W!

d) Nora, Tamara und Christine (Foto rechts!) aus der 8A (2012/13) behaupten aufgrund angestellter Kalkulationen aus der Integralrechnung, dass die von g und dem Kurvenbogen von W nach S begrenzte Fläche einen Inhalt von $\frac{168}{5} \cdot t^5$ aufweist. Könnte das stimmen [Hinweis: Tiefpunkt T miteinbeziehen, Dreieck und Trapez (zwei Eckpunkte auf Tiefpunkttangente!) als ein- bzw. umschriebene Figur verwenden!]?



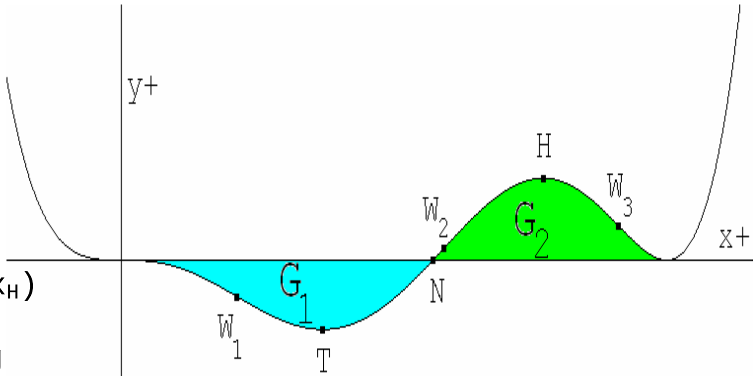
132) In obiger Figur ist der Graph Γ_f der rationalen Funktion mit der Funktionsgleichung $y = f(x) = \dfrac{400x^2}{49x^2 - 972x + 6804}$ zusammen mit seinen differentialgeometrisch wichtigen Punkten abgebildet.

(a) Begründe, warum es keine senkrechte Asymptote/n gibt!

(b) Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch. Zeige in diesem Zusammenhang insbesondere, dass Γ_f drei gewöhnliche Wendepunkte aufweist, dass $x_H = 2 \cdot x_S$ gilt und verifiziere folgenden Satz der *Algebraischen Geometrie*: **Die Verbindungsgerade zweier Wendepunkte einer kubischen Kurve enthält immer auch einen dritten Wendepunkt.**

(c) Verläuft Γ_f punktsymmetrisch zu S (ausführliche Begründung!)?

133) Die Polynomfunktion f mit der Funktionsgleichung $y=f(x)=x^3 \cdot(x-4)\cdot(x-7)^2$ ist gegeben. Ihr Funktionsgraph Γ_f ist in der rechten Figur abgebildet.



a) Verifiziere möglichst kurz, dass $x_N = \frac{1}{2}\cdot(x_T+x_H)$ gilt!

b) Prüfe unter Verwendung des HORNER-Schemas die Gültigkeit der Ungleichungen $1<x_{W1}<2$, $4<x_{W2}<5$ sowie $6<x_{W3}<7$.

134) Für rationale Funktionen f der Bauart $y = f(x) = \frac{x}{x^2+ax+b^2}$ gilt der folgende

$\boxed{\text{SATZ.}}$ Bezeichnet O den Ursprung, H den Hoch- sowie T den Tiefpunkt von Γ_f, so ergibt sich der Flächeninhalt μ des Dreiecks ΔOTH über die Formel $\mu = \frac{\mathcal{H}(a,2b)\cdot y_T}{4}$, wobei $\mathcal{H}(u,v)$ für das harmonische Mittel von u und v steht.

(a) Verifiziere am Beispiel der Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x^2+13x+36}$, dass die $x-$Koordinaten der Extrempunkte betragsgleich sind.

(b) Bestätige anhand der Funktion aus (a) den obigen Satz!

(c) Gilt speziell $a = 2b$, ergo: $y = f(x) = \frac{x}{(\dots\dots\dots)^2}$ (Fülle zunächst die Lücke!), so weist f genau eine Extrem- sowie exakt eine Wendestelle x_E bzw. x_W auf, für welche $x_W = 2 \cdot x_E$ gilt. Kontrolliere dies am Beispiel der Funktion $y = f(x) = \frac{x}{x^2+4x+4}$!

(d) Überprüfe am Beispiel der Funktion in (c), dass der Flächeninhalt des Dreiecks ΔOEW unabhängig von der Wahl für b exakt $\frac{5}{36}$ beträgt.

135) **<u>… aus einer Nachtragsschularbeit:</u>**

4) Gegeben ist die rationale Funktion g mit $\boxed{\text{nebenstehender Funktionsgleichung}}$.

$$y = g(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 6}$$

a) Berechne die Nullstellen x_1 und x_2 von g!

b) Ermittle die Extremstellen x_3 und x_4 von g und bestimme (inkl. Klassifikation mittels zweiter Ableitung!) die Koordinaten der entsprechenden Extrempunkte $E_1(x_3|y_3)$ und $E_2(x_4|y_4)$!

c) Kontrolliere anhand deiner Resultate aus a) und b) am konkreten Beispiel der vorliegenden Funktion g die folgenden für Funktionen der Bauart $y = g(x) = \frac{x^2+px+q}{x-r}$ allgemeingültigen Formeln (wobei x_1, x_2, x_3, x_4, y_3 und y_4 die gleiche Bedeutung wie in a) und b) haben!] :

$\boxed{y_3 = 2x_3 - x_1 - x_2}$, $\boxed{y_4 = 2x_4 - x_1 - x_2}$, $\boxed{g''(x) = \frac{2(x_3+r)^2}{(x+r)^3} = \frac{2(x_4+r)^2}{(x+r)^3}}$

136) Klasse: 7A(Rg) $\boxed{\text{3. Schularbeit (zweistündig), Nachtragstermin}}$ 24. 03. 2003

<u>Aufgabe 1 (Rationale Funktion):</u>

Für rationale Funktionen mit Funktionsgleichungen $\boxed{\text{nebenstehender Bauart}}$ gelten die folgenden Sätze:

$$y = f(x) = \frac{x + a}{(x + b)^2}$$

SATZ 1. Der Extrempunkt E von Γ_f liegt auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{1}{4(x+a)}$.

SATZ 2. Der Wendepunkt W von Γ_f liegt auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{2}{3(x+b)}$.

SATZ 3. Der zweite gemeinsame Punkt S von Γ_f und der Tangente in der Nullstelle von f liegt auf der Kurve mit der Gleichung $y = \frac{2}{x+b}$.

SATZ 4. $\boxed{x_S = 4x_E - 3x_W}$

SATZ 5. $\boxed{y_S : y_E : y_W = (-72) : 9 : 8}$

Bestätige all dies am konkreten Beispiel der Funktion f mit $\boxed{y = f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}}$!

Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Juli 2011. Dr. Robert Resel, e. h.

P.S.: Lösungen zu ausgewählten Aufgaben werden Ende/Anfang des ersten/zweiten Semesters auf www.matheprof.at erscheinen …