71) **… und wieder ein ehemaliges Maturabeispiel:**

Mathematik 8A (Rg)

Aus einem Halbkreis mit gegebenem Radius soll das Rechteck mit dem größtem Flächeninhalt geschnitten werden. Wieviel % beträgt der Abfall? Wie kann man ohne Verwendung der 2. Ableitung zeigen, daß ein Maximum vorliegt?

72) Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten $a = 8$ und $b = 9$ und dem Winkel $\gamma = 30°$ soll durch eine möglichst kurze Strecke halbiert werden, deren Endpunkte auf a und b liegen. Wie lang ist diese Teilungsstrecke und wie weit sind ihre Endpunkte vom Eckpunkt C des Dreiecks entfernt?

73) **Ein ehemaliges kurzes (von ingesamt sechs) Maturabeispiel(en):**

6. Eine Ellipse in erster Hauptlage mit der halben Hauptachsenlänge a und der halben Nebenachsenlänge b rotiert zusammen mit dem Dreieck $\Delta ABC[A(-a|0), B(a|0), C(-a|b)]$ um die $x-$Achse. In welchem Punkt der Rotationsachse ist normal dazu ein Schnitt zu führen, damit der Flächeninhalt des entstehenden Kreisringes maximal wird?

74) Einer Ellipse mit den Halbachsenlänge a und b ist die flächeninhaltskleinste Raute berührend umzuschreiben (d. h. die Seiten der Raute sind Ellipsentangenten). Beweise, dass die Diagonalenlängen der Rauten im gleichen Verhältnis stehen wie die Halbachsenlängen der Ellipse!

75) Einem Halbkreis ist das flächeninhaltsgrößte gleichschenklige Trapez einzubeschreiben, wobei eine Parallelseite der Halbkreisdurchmesser d ist. Beweise, dass durch Spiegelung dieses optimalen Trapezes an d ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

76) Eine Gebäudefront soll die Form eines Rechtecks mit einem aufgesetzten gleichseitigen Dreieck haben.

a) **Nur für Rg-Schüler:**
Beweise: Soll der Umfang bei vorgegebenem Flächeninhalt minimal sein, so gilt für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks sowie für die zweite Rechteckseite x die gerahmte Gleichung.

$$\boxed{x : s = \sqrt{6} \cdot \sin 15°}$$

b) **Sowohl für G- als auch für Rg-Schüler:**
Berechne s in der Einheit dm auf eine Dezimalstelle genau, wenn der Flächeninhalt der gesamten Figur 280m^2 betragen soll.

77) Einer gleichseitigen Ellipse ell soll jenes Rechteck mit zu ell parallelen Seiten einbeschrieben werden, welches bei Rotation um die Nebenachse von ell den volumsgrößten aller Zylinder generiert.

a) Beweise, dass die Tangenten an ell in den Eckpunkten des Rechtecks ein Quadrat bilden.

b) Rotiert das Quadrat aus a) ebenso um die Nebenachse von ell, so entsteht ***ein Doppelkegel***. Beweise, dass sich ***sein*** Volumen zum Rauminhalt des volumsgrößten Zylinders wie 9:4 verhält.

78) Jedem gleichschenkligen Dreieck kann genau ein Quadrat einbeschrieben werden, von dem zwei Eckpunkte auf der Basis und je ein Eckpunkt auf den Schenkeln des Dreiecks liegt. Mit dem Ansatz 2c für die Basis (unnötigen – zusätzlichen! – Bruch vermeiden!) und h = kc für die Höhe des Dreiecks bearbeite man folgende Aufgabenstellungen:

a) Beweise, dass dieses Quadrat maximal 50% des Dreiecksflächeninhalts einnehmen kann.

b) **<u>Für G-Schüler:</u>**

Gib <u>*mindestens eine*</u> verbale Beschreibung der Form jenes Dreiecks, für welches das einbeschriebene Quadrat genau 50% der Dreiecksfläche einnimmt.

c) **<u>Für Rg-Schüler:</u>**

Zeige, dass der Extremalfall aus a) genau dann eintritt, wenn die Beziehung $\boxed{\frac{bu}{A} = \tau}$ gilt, worin b für die Länge der Basis des Dreiecks, u bzw. A für den Umfang bzw. den Flächeninhalt des Dreiecks sowie $\tau>1$ für das Verhältnis des *Goldenen Schnitts* steht.

79) Die Summe der Volumina einer Kugel und eines Würfels, deren Oberflächeninhaltssumme konstant ist, soll minimiert werden. In welchem Verhältnis muss diesfalls die Seitenkante des Würfels zum Durchmesser stehen?

80) Projiziert man einen Punkt P der Hyperbel $xy = 1$ normal auf die $x-$Achse, so erhält man einen Punkt P_x. Für welche Hyperbelpunkte wird der Umfang des Dreiecks OPP_x minimal? Begründe die Art des Extremums (nicht notwendigerweise mit der zweiten Ableitung)!

81) Projiziert man einen Punkt P der Kurve $x^2y = 1$ normal auf die $x-$Achse, so erhält man einen Punkt P_x. Für welche Hyperbelpunkte wird der Umfang des Dreiecks OPP_x minimal? Begründe die Art des Extremums (nicht notwendigerweise mit der zweiten Ableitung)!

Hinweis: Substituiere beim Nullsetzen der ersten Ableitung $z = x^3$, was dann auf eine kubische Gleichung mit der Lösung $z_1 = 0$ führt und beachte, dass Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist!

82) **<u>Ein ehemaliges (von ingesamt fünf) Maturabeispiel(en):</u>**

5. Der Ellipse ell [ell: $x^2 + 3y^2 = 12$] ist das flächengrößte gleichschenkelige Dreieck einzuschreiben, dessen Basis parallel zur $x-$Achse verläuft.

(a) Berechne die Koordinaten A, B und C der Eckpunkte dieses Dreiecks und seinen Flächeninhalt.

(b) Lege in A, B und C die Tangenten an ell und zeige, dass das daraus resultierende *Tangentendreieck* dem vierfachen Flächeninhalt des Dreiecke ΔABC aufweist.

83) (a) Unter allen geraden Kreiskegeln vorgegebenen Mantelflächeninhalts sind die Abmessungen jenes Drehkegels zu bestimmen, der maximales Volumen aufweist.

(b) Unter allen geraden Kreiskegeln vorgegebenen Oberflächeninhalts sind die Abmessungen jenes Drehkegels zu bestimmen, der maximales Volumen aufweist.

(c) Zeige ohne Verwendung elektronischer Hilfsmittel, dass das Maß des Öffnungswinkels des idealen Kegels aus (a) dem Maß des Neigungswinkels des idealen Kegels aus (b) entspricht.

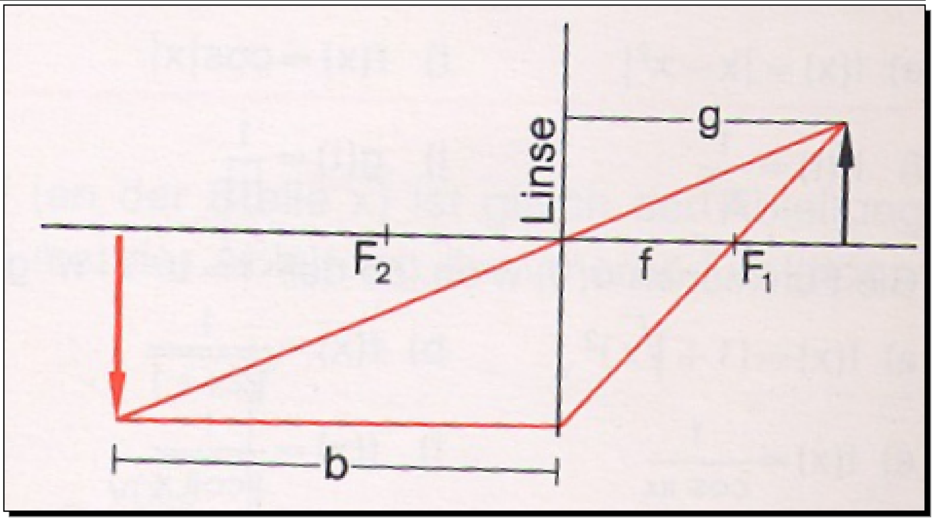
84) **Eine ehemalige (von vier) Aufgabe(n) einer dreistündigen Schularbeit:**

3. (a) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes der Ellipse ell [ell:$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$] im ersten Quadranten, im welchem die Tangente an ell mit den Koordinatenachsen das flächeninhaltskleinste Dreieck begrenzt.

(b) Ermittle die Koordinaten jenes Punktes der Ellipse ell [ell:$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$] im ersten Quadranten, im welchem die Normale an ell mit den Koordinatenachsen das flächeninhaltsgrößte Dreieck begrenzt.

(c) Berechne den minimalen bzw. maximalen Flächeninhalt aus (a) bzw. (b) und zeige, dass das Produkt der beiden Flächeninhalte $\frac{e^4}{4}$ ergibt, wobei e die Brennweite von ell bezeichnet.

Schüler der 4B oder 4E (2005/06)
↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑↑



85) **(Für manche von euch) eine Reise in die Vergangenheit:** (und zwar um exakt 3 Jahre!)

Erzeugt eine Sammellinse der "Brennweite" f von einem Gegenstand, der sich im Abstand g (g>f) von ihr befindet, ein Bild im Abstand b von der Linse, so besteht zwischen den Parametern b ("Bildweite"), f und g ("Gegenstandweite") die besondere Beziehung $\boxed{\frac{1}{b}+\frac{1}{g}=\frac{1}{f}}$ ("Linsengleichung", kurz: LG).

a) Leite LG aus der obenstehenden Abbildung her!

b) Für welche Entfernung des Gegenstandes von der Linse ist seine Entfernung von seinem Bild minimal? (Anleitung: Drücke dir die zu minimierende Summe b+g durch g und f aus und differenziere den Ausdruck nach ……...! Ergänze: Diese minimale Entfernung kann nie kleiner sein als ....

↑↑
Na wonach wohl? ☺

Grundlage für die Aufgaben 86) bis 88) ist der folgende Text:

JULIUS PFLÜGER stellte im Jahre 1915 eine „Schönheitsbedingung“ für „einfache geometrische Gebilde“ auf. Danach ist eine geschlossene Figur mit gegebenem Umfang dann „am schönsten“, wenn sie eine möglichst große Fläche begrenzt. Weil ähnliche Figuren dasselbe Schönheitsmaß haben sollten, definierte er den Quotienten

$T=\frac{A}{U^2}$ (A: Flächeninhalt; U: Umfang) als „ästhetische Maßzahl“.

86) Welches Rechteck fester Länge a und variabler Breite x ist "am schönsten"? Wie(viel) schön ist es?

87) Welches gleichschenklige Dreieck mit fester Basis a und variabler Schenkellänge ist "am schönsten"? Wie(viel) schön ist es?

88) Beweise: Ein Kreissektor ist genau dann "am schönsten", wenn sein Bogen genau so lang ist wie die beiden Begrenzungsradien zusammen. Wie(viel) schön?

89) Eine Streichholzschachtel soll 5cm lang sein und $45cm^3$ Rauminhalt haben. Bei welcher Breite und Höhe ist am wenigsten Material zur Herstellung notwendig (Rahmen nicht inkludiert!)? Wie groß ist dieser minimale Materialverbrauch?

90) In welchem Punkt T der Parabel par [par: $y^2 = 4ax$ bzw. wenn dir dies (zum Aufwärmen!) mehr beliebt: par: $y^2 = 8x$] gilt, dass der Tangentenabschnitt auf t_T zwischen T und dem Schnittpunkt L von t_T mit der Leitgerade von par minimal ist? Bestätige, dass $\overline{ST} = \frac{3}{4}\cdot p$ gilt, wobei S bzw. p den Parabelscheitel bzw. den Parabelparameter bezeichnet.

Technische Hinweise: 1) Der Ansatz T(….|2az) mag hilfreich sein, dann Spaltform usw.!

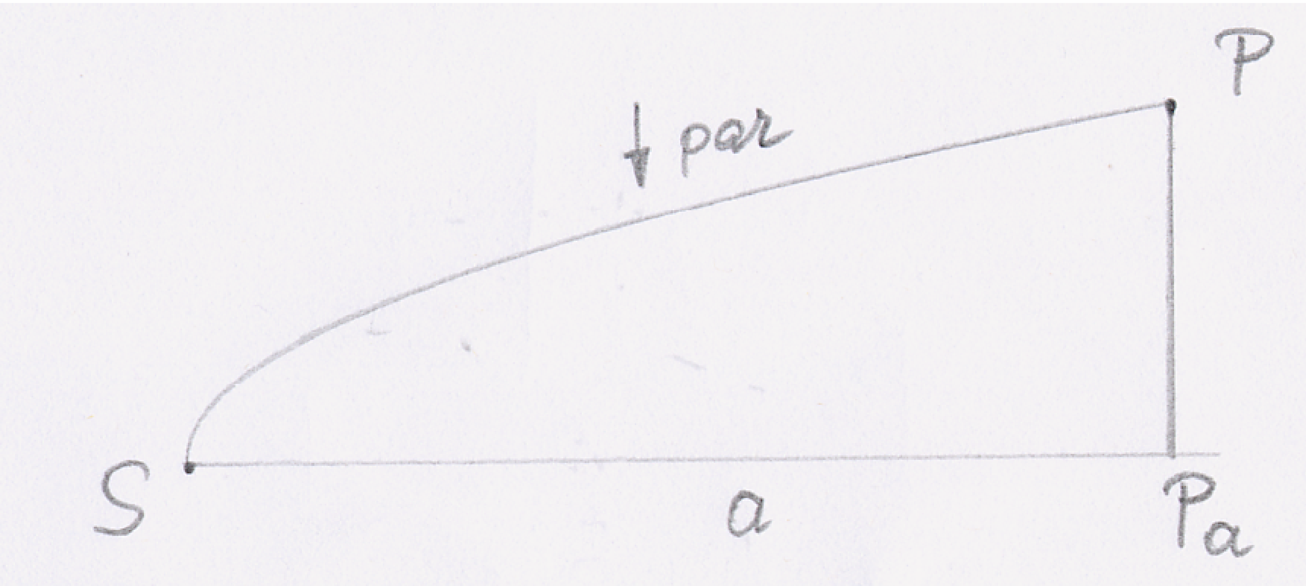
↑↑

SELBST!

2) Berechne $(2t^2+t-1)\cdot(t+1)$, das wirst du ***in jedem Fall*** *noch brauchen!*
(t wird im Laufe der Rechnung die durch $z^2 = t$ definierte Ersatzvariable!)

91) Berechne die Koordinaten jener Punkte der Hyperbel hyp [hyp: $2x^2 - 3y^2 = 6$], welche vom Punkt P(5|0) den kleinsten Abstand haben. Weise das Minimum nach!

92) Untenstehend abgebildetem Parabelsegment (S … Parabelscheitel, a … Parabelachse) ist ein Rechteck einzubeschreiben, von dem eine Seite auf a zu liegen kommt. Beweise, dass es unter allen möglichen Rechtecken genau dann ein nicht entartetes umfangsgrößtes gibt, wenn die Tangente an die Parabel in P gegenüber a unter weniger als 45° ansteigt! Zeige ferner, dass dieser maximale Umfang dann gleich der Summe aus der „doppelten Segmenthöhe“ (auf a gemessen) und dem Parabelparameter ist.



93) **Zur Abwechslung einmal wieder ein ehemaliges Maturabeispiel:**

4. In einem Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten die Koordinatenachsen sind, wird die Tangente t_P gelegt.

   (a) Ermittle in Abhängigkeit der Koordinaten von P die Halbachsenlängen der flächengrößten Ellipse in Hauptlage, welche t_P als Tangente besitzt und zeige, dass dieser maximale Flächeninhalt nur vom Parameter der Hyperbel, nicht aber von der Wahl des Punktes P abhängt.

   (b) Was läßt sich über die Lage des Berührungspunktes von t_P mit der Ellipse aussagen?

94) Berechne inkl. Nachweis des Minimums die Koordinaten jener Punkte der NEILschen Kurve ν mit der Gleichung ν: $y^2 = (x+28)^3$, welche dem Koordinatenursprung am nächsten liegen.

95) a) Berechne $(y^2+4y-12)\cdot(y-4)$!
b) Welcher Punkt der Parabel par [par: $y^2 = 2x$] liegt dem Punkt P(15|–24) am nächsten?

96) Einer Kugel (Radius R) soll der volumskleinste Drehkegel berührend umschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?

97) Einer Kugel (Radius R) soll der volumsgrößte Drehkegel eingeschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?

98) Einer Kugel (Radius R) soll der volumsgrößte Drehzylinder eingeschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Zylinder- und Kugelvolumen?

99) Einer Halbkugel (Radius R) soll der volumskleinste Drehkegel berührend umschrieben werden. In welchem Verhältnis stehen Kegel- und Kugelvolumen?

100) Durch den Punkt A(–12|y_P) sowie den Hochpunkt H der Schleife des NEWTONschen Knotens ν mit der Gleichung ν: $32y^2 = x^2(x+12)$ wird die eindeutig bestimmte Gerade g gelegt, welche ν ferner in P schneidet. Verifiziere anhand der konkreten Kurve ν die folgenden Sätze (allgemeingültig für NEWTONsche Knoten mit Gleichungen der Form $y^2 = b^2x^2(x+3a)$, wobei für Satz 2 zusätzlich die Bedingung $8ab^2 = 1$ gelten muss!):

↓↓ ↓↓↓↓↓

Wieder eine gute Gelegenheit, das Rechnen mit←←←←←←←←←←←←←←←←←←
Parametern [Bemerkung zur Aufgabe 87) der
Übungsaufgaben für die 1. Schularbeit!] zu üben!

SATZ 1. $x_P = \dfrac{x_A \cdot x_H}{x_H - x_A}$ **SATZ 2.** ν wird in P von g unter einem spitzen Winkel geschnitten, der um 90° kleiner ist als der H-C-H-Bindungswinkel des Methanmoleküls.

101) Durch den Punkt A(–3|y_P) sowie den Tiefpunkt T der Schleife des NEWTONschen Knotens ν mit der Gleichung ν: $49y^2 = 2500x^2(x+3)$ wird die eindeutig bestimmte Gerade g gelegt, welche ν ferner in P schneidet. Verifiziere anhand der konkreten Kurve ν die folgenden Sätze (allgemeingültig für NEWTONsche Knoten mit Gleichungen der Form $y^2 = b^2x^2(x+3a)$, wobei für Satz 4 zusätzlich die Bedingung $49ab^2 = 2500$ gelten muss!):

↓↓ ↓↓↓↓↓↓↓↓

Wieder eine gute Gelegenheit, das Rechnen mit←←←←←←←←←←←←
Parametern [Bemerkung zur Aufgabe 87) der
Übungsaufgaben für die 1. Schularbeit!] zu üben!

SATZ 3. $y_T : y_P = 1:9$ **SATZ 4.** ν wird in P von g unter einem spitzen Winkel von ziemlich genau 2° geschnitten.

102) Durch den Punkt A(–27|y_P) sowie den Hochpunkt H der Schleife des NEWTONschen Knotens ν mit der Gleichung ν: $256y^2 = 225x^2(x+27)$ wird die eindeutig bestimmte Gerade g gelegt, welche ν ferner in P schneidet. Verifiziere anhand der konkreten Kurve ν die folgenden Sätze (allgemeingültig für NEWTONsche Knoten mit Gleichungen der Form $y^2 = b^2x^2(x+3a)$, wobei für Satz 6 zusätzlich die Bedingung $256ab^2 = 2025$ gelten muss!):

↓↓ ↓↓↓↓↓↓↓↓

Wieder eine gute Gelegenheit, das Rechnen mit←←←←←←←←←←←←←←←←
Parametern [Bemerkung zur Aufgabe 87) der
Übungsaufgaben für die 1. Schularbeit!] zu üben!

SATZ 5. $\overline{AH} : \overline{HP} = 1:8$ **SATZ 6.** ν wird in P von g unter einem spitzen Winkel von ziemlich genau 5° geschnitten.

103) bis 106): **<u>Siehe Box!</u>** (aus Platzgründen ohne Punkteverteilung!)

Klasse: 7B(G) **28. 05. 2008**

2. Schularbeit (zweistündig)

<u>Pflichtmodul PM4:</u> *Differentialrechnung*

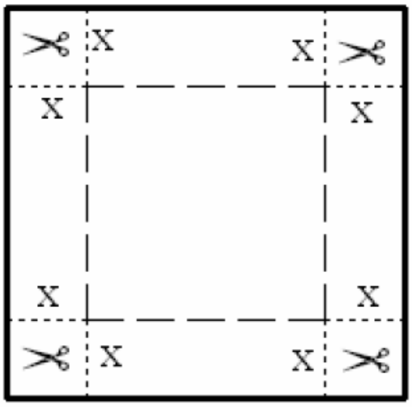
1) Auf der kubischen Kurve ν mit der Gleichung $\boxed{\nu\colon y = x^3}$ liegen die Punkte $P(1|y_P)$ und $Q(2|y_Q)$.

   a) Berechne die Koordinaten des dritten gemeinsamen Punkts R von g_{PQ} und ν.

   b) Stelle in den Punkten P, Q und R Gleichungen der Tangenten t_P, t_Q und t_R an ν auf!

   c) Verifiziere am konkreten Beispiel der Kurve ν den für alle kubischen Kurven gültigen **SATZ.** Sind P, Q und R Punkte einer kubischen Kurve ν in kollinearer Lage mit den entsprechenden Tangenten t_P, t_Q und t_R und gilt ferner $t_P \cap \nu = \{P, P'\}$, $t_Q \cap \nu = \{Q, Q'\}$ sowie $t_R \cap \nu = \{R, R'\}$, dann liegen auch P´, Q´ und R´ kollinear.

2) Aus zwei kongruenten quadratischen Kartons (siehe Abbildungen 1 und 2!) der Seitenlänge a sollen wie in den Abbildungen 1 und 2 illustriert durch Wegschneiden von "Eckenquadraten" zwei verschiedene Schachteln mit jeweils größtmöglichem Volumen hergestellt werden, wobei die erste Schachtel (vgl. Abbildung 1) vier und die zweite Schachtel (vgl. Abbildung 2) nur zwei Stellwände benötigt. Beweise, dass das Volumen der Schachtel mit zwei Stellwänden doppelt so groß als das Volumen der Schachtel mit vier Stellwänden ist, der Anteil des anfallenden Abfalls aber für beide Varianten derselbe ist.



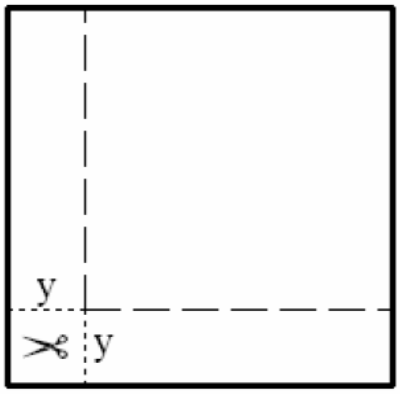
A b b i l d u n g 1

3) **<u>Das Ibrahim-Glücksbringer-Poster der letzten Schularbeit (unter Abbildung 2!) nun als Gegenstand eines interessanten Optimierungsproblems:</u>**

   Bei der grafischen Planung des Posters lauteten die Vorgaben folgendermaßen: Das Motiv soll auf einem rechteckigen Bogen mit einem Flächeninhalt von $2{,}16\,m^2$ gedruckt werden, wobei der obere und untere Rand jeweils 45mm sowie der linke und der rechte Rand jeweils 30mm breit sein soll.

   a) Wie sollen Länge und Breite des Bogens gewählt werden, damit der bedruckte Bereich möglichst groß wird?

   b) Wie viel Prozent des Bogens nimmt das Motiv ein?



A b b i l d u n g 2

4) Gegeben ist der NEWTONsche Knoten k mit der Gleichung $k: 3y^2 = 2x^2(x+6)$. Durch die Punkte $P(-6|y_P)$ und $Q(6|y_Q > 0)$ von k wird eine Gerade g gelegt, welche k noch in einem weiteren Punkt R schneidet.

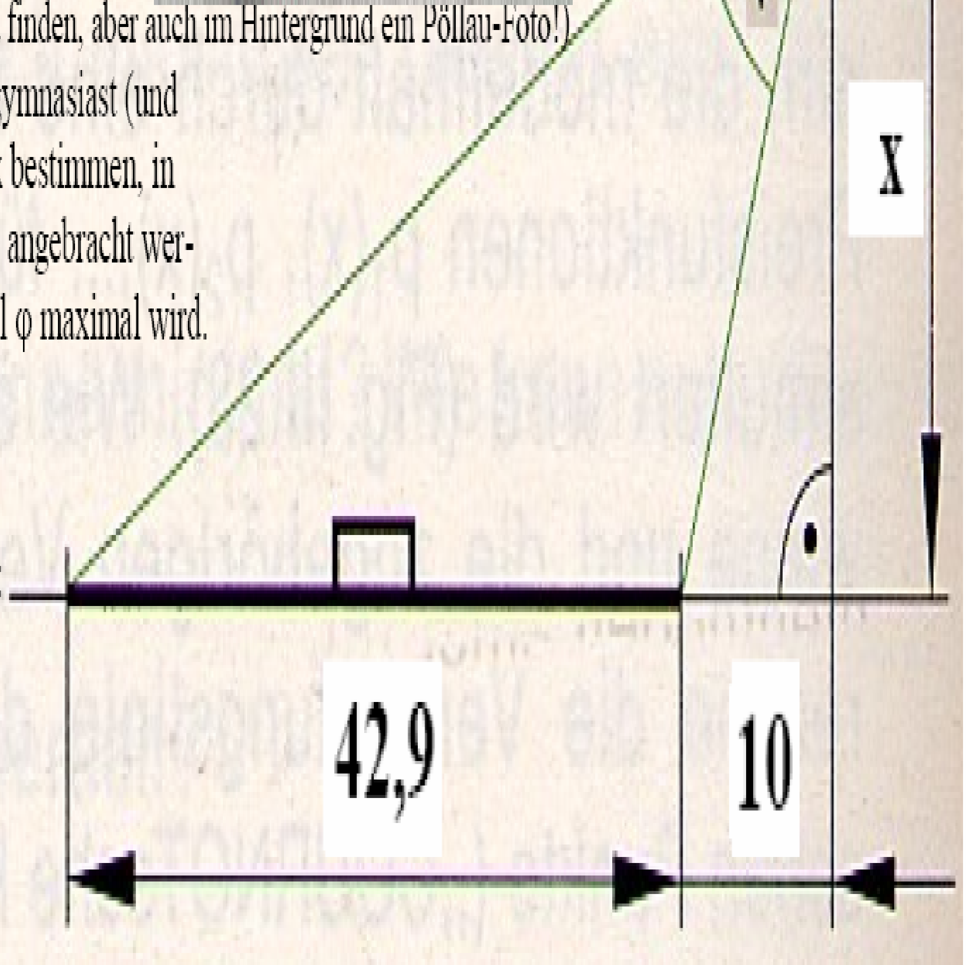
   a) Berechne die Koordinaten von R und zeige, dass k in R von g rechtwinklig geschnitten wird (keine Dezimalzahlen, sondern Wurzelausdrücke verwenden!).

   b) Fertige eine saubere Skizze an, welche insbesondere Informationen über die gegenseitige Lagebeziehung von P, Q, R sowie dem höchsten Punkt der Schleife von k enthält.

107) Aus der Schularbeit der 7C(Rg) vom 30. 05. 2008 (**besonders groß** wegen so manchem Kicker in der 7D, ferner mit einer Fußnote[1] versehen!):

2) Passend zur EM 2008 ein entsprechendes Optimierungsproblem:

Ein 42,9m breiter Fußballplatz soll eine Flutlichtanlage bekommen, wobei die Scheinwerfer (horizontal gemessen! vgl. rechte Abbildung!) 10m vom rechten Spielfeldrand entlang der gesamten Länge des Spielfelds angebracht werden sollen. (In der rechten Abbildung ist die variable Position eines Scheinwerfers S eingezeichnet.) Tommy B. (in der Abbildung rechts oben zu finden, aber auch im Hintergrund ein Pöllau-Foto!) soll nun als mathematisch gebildeter Realgymnasiast (und natürlich "Weltklassekicker"!) jene Höhe x bestimmen, in der die Scheinwerfer über dem Boden (☺) angebracht werden müssen, damit der Beleuchtungswinkel φ maximal wird.



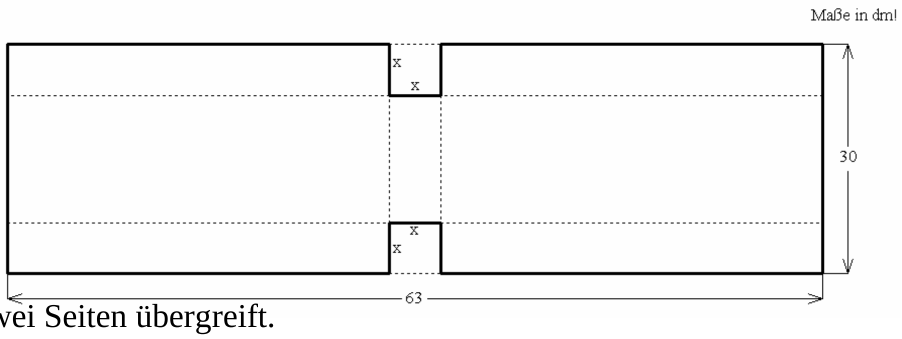
Da aber auch du diese Schularbeit zu bestreiten hast, gilt die (folgende) Aufgabenstellung selbstverständlich ebenso für dich:

a) Berechne die erforderliche Höhe x!
(Die zweite Ableitung kann entfallen!)

b) Ermittle den sich daraus ergebenden maximalen Beleuchtungswinkel φ!

[1]: Aus finanziellen Gründen ist bei diesem Platz die minimal erforderliche Spielfeldbreite von 45 Metern (Maximum: 90 Meter!) nicht realisierbar, bei einem Ländermatch muss die Spielfeldbreite gar zwischen 64 und 75 Metern betragen!

108) Aus nebenstehend abgebildetem Rechteck (a=63dm, b=30dm) soll durch Wegschneiden von zwei symmetrisch liegenden Quadraten der Seitenlänge x das Netz einer nach einer Seite hin offenen Schachtel gebildet werden, wobei der Deckel auf zwei Seiten übergreift.



a) Wie groß ist x zu wählen, damit das Volumen der Schachtel maximal wird?

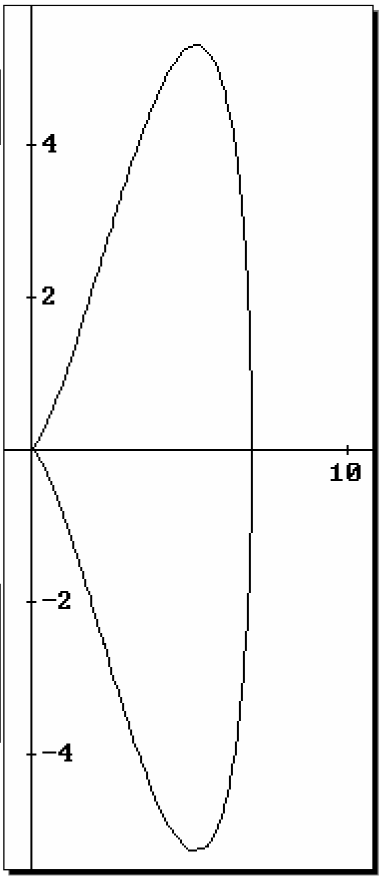
b) Berechne dieses maximale Volumen V und überprüfe am konkreten Beispiel nebenstehende allgemeingültige Formel!

$$\boxed{V = \frac{abx}{4} - \frac{x^3}{2}}$$

Aufgaben 109) bis 112): Ausblick auf quartische Kurven und damit verbundene Optimierungsprobleme [vgl. auch die Aufgaben 51), 94) und 95) zu quadratischen und kubischen Kurven!]:

109) In nebenstehender Abbildung ist die quartische Kurve ν mit nebenstehender Gleichung illustriert.

$$\boxed{\nu: 9y^2 = x^3 \cdot (7-x)}$$



a) Erläutere und begründe die Gestalt von ν!

b) Ergänze die Beschriftung in der Abbildung!

c) Welcher im ersten Quadrant liegende Punkt P auf ν hat von der Schnabelspitze S(0|0) den größten Abstand (Nachweis des Maximums!) und wie groß ist dieser Abstand?

d) Berechne das Maß des Winkels zwischen g_{PS} und t_P! Wie läßt sich das Resultat intuitiv begründen?

110) Die quartische Kurve ν mit nebenstehender Gleichung hat eine ähnliche Gestalt wie die rechts abgebildete.

$$\boxed{\nu: y^2 = 4x^3 \cdot \left(\frac{7}{5} - x\right)}$$

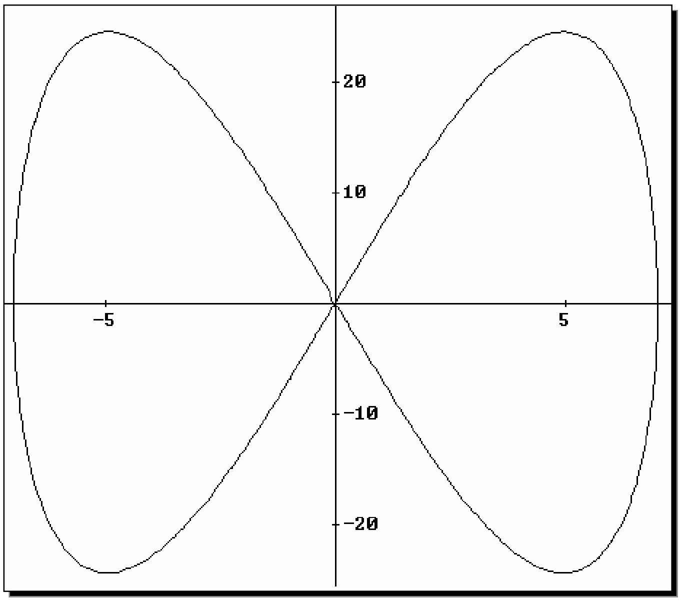
a) Welcher im ersten Quadrant liegende Punkt P auf ν hat vom am weitesten rechts liegenden Punkt R von ν den größten Abstand (Nachweis des Maximums!) und wie groß ist dieser Abstand?

b) Berechne das Maß des Winkels zwischen g_{PR} und t_P und begründe das Resultat intuitiv!

111) In nebenstehender Abbildung ist die quartische Kurve

$$\boxed{\nu: y^2 = x^2 \cdot (49 - x^2)}$$

ν mit nebenstehender Gleichung illustriert, welche als LISSAJOUS-Kurve (nach dem französischen Physiker Jules Antoine LISSAJOUS, 1822-1880) bezeichnet wird, in der Physik bei orthogonalen Schwingungen und in der **Raum(!)**-Geometrie als **Normalprojektion** der Schnittkurve einer Kugel- mit einer Zylinderfläche ("VIVIANI-Kurve", siehe unter Abbildungen, genaueres dazu ggf. im Wahlpflichtfach!) auftritt.



a) Erläutere und begründe die Gestalt von ν!

b) Ergänze die Beschriftung in der Abbildung!

c) Welcher im ersten Quadrant liegende Punkt P auf ν hat vom Doppelpunkt D von ν den größten Abstand (Nachweis des Maximums!) und wie groß ist dieser Abstand?

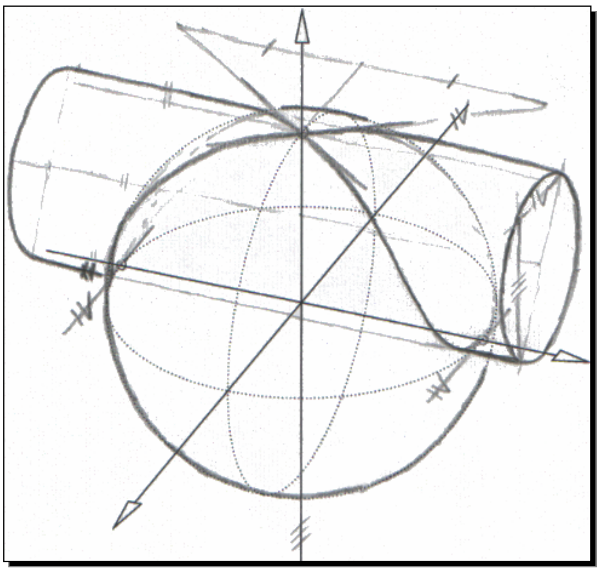
d) Berechne das Maß des Winkels zwischen g_{DP} und t_P! Was ist zu erwarten und warum?

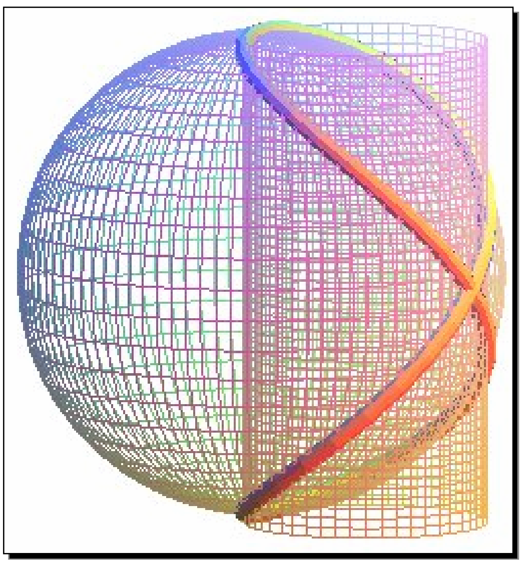
112) Auch bei der Kurve ν mit nebenstehender Gleichung handelt es sich um eine **LISSAJOUS-Kurve**.

$$\boxed{\nu: y^2 = 2x^2 \cdot \left(\tfrac{9}{4} - x^2\right)}$$

a) Welcher im ersten Quadrant liegende Punkt P auf ν hat vom am weitesten rechts liegenden Punkt R von ν den größten Abstand (Nachweis des Maximums!) und wie groß ist dieser Abstand?

b) Berechne das Maß des Winkels zwischen g_{PR} und t_P!





Gutes Gelingen beim Lösen dieser schönen Aufgaben!

Wien, im Mai 2008. Dr. Robert Resel, e. h.

Hinweise zum (lohnenden!) Üben:

- **<u>Folgende 24 Aufgaben</u>** werden sicher in Schulübungen bearbeitet werden: 2, 5, 10, 13, 25, 20, 27, 100, 32, 50, 51, 52, 94, 95, 61, 63, 53, 64, 43, 38, 41, 108, 110, 111

Insgesamt 17 Hausübungen (19. bis 35, HÜ), wobei die im Folgenden aufgelisteten Aufgaben genau in der Reihenfolge der aufgetragenen Hausübungen angeführt sind!

↑↑↑↑↑↑↑↑↑

- **<u>Folgende 17 Aufgaben</u>** werden im Laufe des Aprils und Mais als Hausübung aufgegeben: 3, 9, 19, 24, 28, 22, 34, 15, 102, 91, 60, 65, 39, 42, 104, 109, 112

Die restlichen 71(!) Aufgaben betreffend ist es diesmal so, dass es bei den folgenden 41 Aufgaben <u>jedenfalls</u> im Sinne des eigenständigen Übens sehr ratsam ist, sie zu bearbeiten:

1, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 21, 23, 26, 29, 30, 31, 33, 35, 36, 37, 40, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 62, 66, 101, 103, 105, 106, 107

Bei den Aufgaben 67 bis einschließlich 99 (ausgenommen 91, 94 und 95!) handelt es sich um Aufgaben, die du/wir in der 8. Klasse im Rahmen des Übens für die (schriftliche) Reifeprüfung bearbeiten wirst/werden (Ein paar wenige kommen u. U. noch hinzu!) und <u>MÜSZEN SOMIT NICHT UNBEDINGT SCHON JETZT ZUM ÜBUNGSZWECK HERANGEZOGEN WERDEN</u>. ………………………………………

………………………………………. was nun aber auch wieder nicht heißt, dass du dich nicht zumindest an ein paar wenigen davon probieren darfst/sollst!

Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 2. Schularbeit (zweistündig), Teil 1

7D, Realgymnasium, SS 2009

8) $54y^2 = (x+10)^3$

11) t = 8 (Vgl. Bsp. 10 und kontrolliere, dass dort a=12 sowie t=8 gilt!)

12) t = 4 (Vgl. Bsp. 9 und kontrolliere, dass dort a=3 sowie t=4 gilt!)

17) a) $F\left(\frac{10a}{3b}\middle|\frac{81b^4}{10000a^3}\right)$, $t_F: y = \frac{27}{50000a^4}\cdot(25a-3bx)$

b) $S\left(-\frac{5a}{b}\middle|\frac{27b^4}{1250a^3}\right)$

29) R(6/42), P´(-9/77), Q´(-4/7), R´(-1/-35)

30) R(12/18), P´(2/218), Q´(-3/93), R´(-6/18)

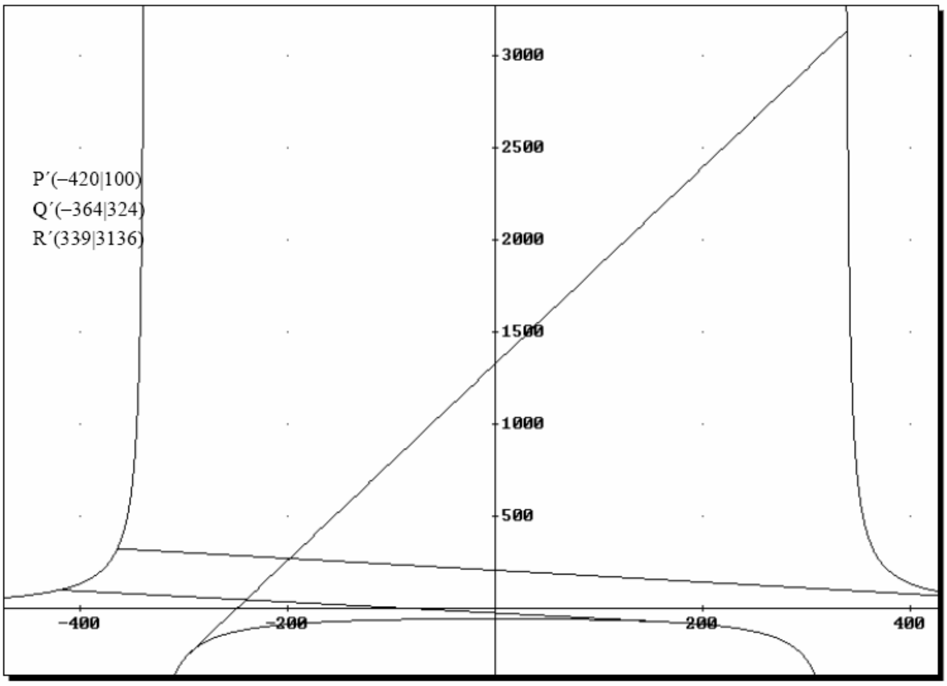
Lösungen zu ausgewählten Übungsbeispielen für die 2. Schularbeit (zweistündig), Teil 2

7D, Realgymnasium, SS 2009

31) Rechts:

$$y = \frac{6350400}{x^2 - 112896}$$

$P(168|-75) \rightarrow$
$Q(504|45) \rightarrow$
$R(-294|-240) \rightarrow$



33) R(-33/5|-693/5), P´(33|4851), Q´(132|25344), R´(15|1125)

39) Abstand 198cm, Winkel beträgt dann 31°

43) a) 6€, b) 300 Stück, 120 Stück

45) a) Stückpreis: 60€, Gewinn: 3600€, b) 40 Freiplätze

47) a) 340€, b) 231200€, 4 Assistenten weniger

48) Die zu P, Q und R "dualen" Punkte P´, Q´ und R´ liegen ja alle auf der x-Achse, weil sie die Nullstellen von f sind!

49) H_1´(3/-9), T_1´(1.5/-4.5) und H_2´(-4.5/13.5), liegen auf der Gerade g´ [g´: 3x+y=0]. H_1, T_1 und H_2 liegen auf der Gerade g [g: 3x–2y=0]

51) a) 60° bzw. 120° b) P(-24/8√3) d) Q(48/80√3)

56) x = 7, V_{max}=12544, 7/135≈5,185185185...% Abfall, 57) x = 10, V_{max}=12100, 5/126≈3,97% Abfall

58) x = 13, V_{max}=132496, 13/405≈3,21% Abfall

66) Schenkellänge b: $b = \sqrt{\frac{24}{(2-\cos\alpha)\sin\alpha}}$ = 7,92459335... , Sohlbreite c = 1,052696222…,
Höhe h ("Kanaltiefe"): h = 2,839920273…, ergo h≈2,84m $\Longrightarrow$ Weder Leonid Stadnik, noch Robert Wadlow könnte drin stehen